Une nouvelle méthode de simulation : Stratification Directionnelle Adaptative

M. Munoz Zuniga & J. Garnier
Laboratoire de probabilités et modèles aléatoires, Université Paris VII, Paris, France

E. Remy & E. de Rocquigny
EDF R&D, Chatou, France

RESUME :
L'objectif de cet article est de présenter une nouvelle méthode de Monte Carlo accélérée, que nous avons nommée SDA - Stratification Directionnelle Adaptative -, et que nous avons conçue pour répondre aux contraintes industrielles rencontrées en pratique : robustesse de l'estimation de la probabilité de défaillance (potentiellement très faible), modèle physique (potentiellement monotone) complexe et temps de calculs limités.

---

1. Contexte

Le contexte industriel considéré dans ce papier est l'estimation de la probabilité de rupture brutale de la cuve d'un réacteur nucléaire en situation de fonctionnement incidentel (Munoz et al. 2008 [2]). Ce calcul probabiliste est un réel défi numérique. En effet :

- la probabilité de défaillance de la cuve est très faible
- le modèle multi-physique modélisant le comportement de la cuve est complexe, entraînant de longs temps de calculs
- le résultat attendu doit s'accompagner d'un contrôle de l'erreur d'estimation pour avoir un quelconque poids décisionnel.

Les "méthodes standards" utilisées en fiabilité des structures sont ici mises en défaut. En effet, les méthodes d'intégration numérique, efficaces en petite dimension, demandent déjà, à partir de 3 dimensions (un minimum dans notre contexte industriel) trop d'appels au modèle. Les méthodes FORM-SORM ont l'avantage d'être rapides même en dimension élevée, mais l'erreur commise, due au non conservatisme du design point, n'est pas contrôlable. Reste alors la méthode de Monte-Carlo (Rubinstein et al. 2007) : elle offre la maîtrise sur l'erreur d'estimation, mais le fait que nous cherchions à estimer une probabilité faible oblige à multiplier le nombre de simulations (et donc le nombre d'appels au modèle) de façon rédhibitoire. Pour pallier ce dernier point, il existe les méthodes de Monte-Carlo accélérées qui par rapport à Monte-Carlo permettent d'améliorer la précision de l'estimation pour un même nombre de simulations. C'est sur deux d'entre elles, la stratification et la simulation directionnelle, que nous avons basé la construction d'une nouvelle méthode de propagation d'incertitudes, nommée Stratification Directionnelle Adaptative (SDA), qui permet d'obtenir un meilleur contrôle sur l'estimation de la probabilité de défaillance malgré les contraintes pratiques précédemment décrites. Il est également possible d'utiliser des méthodes de type "surface de réponse", mais nous n'analyserons pas ce point de vue qui peut être traité de manière indépendante à celui qui nous anime ("méthodes de simulations").

2. Méthode SDA

2.1. *Préliminaire : stratification, simulation directionnelle et optimisation*

Pour construire la nouvelle méthode, nous avons couplé les méthodes de stratification et de simulation directionnelle, pour tirer avantage de chacune d'elles. La stratification, en dehors d'être une méthode de Monte-Carlo accélérée, permet également d'envisager une stratégie adaptative. La méthode de simulation directionnelle a pour sa part un bon ratio "précision/temps de calcul". Voici un bref rappel sur ces deux méthodes. La méthode de simulation directionnelle se décompose en trois étapes :

- transformer le vecteur aléatoire des variables d'entrée de la fonction physique de défaillance en un vecteur dont toutes les coordonnées sont des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes
- tirer uniformément une direction dans l'espace gaussien et estimer la probabilité de défaillance, P_f, dans cette direction fixée. Pour cela, nous avons à disposition un certain nombre d'algorithmes : dichotomie, sécante... Ces derniers aboutissent à des erreurs d'approximation numérique, sur lesquelles nous avons mené une étude permettant de contrôler leur éventuelle propagation à la variance de l'estimateur (Munoz et al. 2008 [1])
- réitérer sur plusieurs directions pour obtenir l'estimateur global de la probabilité de défaillance.

La méthode de stratification se décompose aussi en trois étapes :

- partitionner l'espace physique en plusieurs strates
- simuler, dans chacune des strates, un certain de nombre de points pour obtenir une estimation de la probabilité de défaillance dans la strate considérée
- calculer la probabilité de défaillance comme la somme des probabilités de défaillance dans chacune des strates, pondérées par la probabilité d'appartenir à la strate.

Un intérêt de cette méthode est qu'il est possible de calculer l'allocation optimale de simulations dans chacune des strates de façon à minimiser la variance de l'estimateur de P_f. L'idée sera donc de réutiliser ce résultat avec une méthode de tirage directionnel et de construire une méthode adaptative. Remarquons que des méthodes de stratification adaptative ont déjà été étudiées dans (Cannamela et al. 2007) et (Etoré et al. 2007).

Pour construire la méthode SDA, il nous faut donc à présent stratifier l'espace en strates adaptées au tirage directionnel : dans ce cas les strates naturelles sont des cônes. Nous choisissons ces cônes comme étant les quadrants de l'espace physique, ce qui peut être motivé par le fait que sous hypothèse de monotonie de la fonction de défaillance, nous avons de l'information sur ces quadrants.

Dans ce cadre, pour un nombre total de simulations, n, nous avons mené le calcul sur l'allocation optimale par quadrant à réaliser pour réduire la variance de l'estimateur $\hat{P}_f$ et nous avons calculé la variance minimale associée : σ^2_{opt}. Il est alors possible de montrer le résultat asymptotique suivant :

$$\sqrt{n}(\hat{P}_f - P_f) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2_{opt}) \qquad \text{quand } n \to +\infty$$

2.2. *2-SDA, L-SDA et ∞-SDA*

2.2.1. *2-SDA : méthode SDA à 2 étapes*

Pour commencer, on sépare le nombre total de simulations que l'on souhaite réaliser, n, en deux parties : la première partie, $f(n)$, servira à estimer l'allocation optimale qui minimise la variance de $\hat{P}_f$ et la seconde, $n - f(n)$, servira à estimer P_f avec l'estimateur couplant stratification et simulation directionnelle et prenant en compte l'allocation optimale. Nous pouvons également recycler les $f(n)$ premiers tirages en les réutilisant dans notre estimation.

Après une étude du comportement asymptotique de l'estimateur, $\hat{P}^{2SDA}_f$, nous avons montré que, sous quelques hypothèses sur f présentées dans (Munoz et al. 2008 [2]), nous avons le résultat suivant :

$$\sqrt{n}(\hat{P}^{2SDA}_f - P_f) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2_{opt}) \qquad \text{quand } n \to +\infty$$

Ce résultat permet d'obtenir la robustesse souhaitée sur nos estimations.

2.2.2. *L-SDA : nombre d'étapes L fixé et ∞-SDA*

Nous sommes capables de généraliser la méthode 2-SDA en une méthode multi-adaptative. Deux points de vue sont possibles. Le premier consiste à se donner un nombre d'étapes d'adaptation L, qui sera fixé, puis à construire notre estimateur, $\hat{P}^{LSDA}_f$, et finalement à étudier son comportement asymptotique lorsque n deviendra grand. Le second consiste, pour un nombre d'étapes d'adaptation L, à construire un estimateur puis à regarder son comportement asymptotique lorsque L et n deviendront grands : on notera cet estimateur $\hat{P}^{\infty SDA}_f$. Sous certaines hypothèses présentées dans (Munoz et al. 2008 [2]), les résultats asymptotiques escomptés sont obtenus :

$$\sqrt{n}(\hat{P}^{LSDA}_f - P_f) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2_{opt}) \qquad \text{quand } n \to +\infty$$

$$\sqrt{\tilde{N}^L}(\hat{P}^{\infty SDA}_{f,L} - P_f) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2_{opt}) \qquad \text{quand } L \to +\infty$$

3. Résultats numériques

Tout d'abord, nous avons appliqué notre méthode sur un exemple académique, en considérant une fonction de défaillance hyperplane. A partir de cette fonction de défaillance simple, sur laquelle nous pouvons lancer un très grand nombre de simulations (entre 10^2 et 10^7), nous avons pu confirmer numériquement nos résultats asymptotiques. Nous avons également constaté numériquement que la méthode 2-SDA est optimale par rapport aux méthodes L-SDA avec $L > 2$. Ce résultat est dû au fait que les strates sont fixes : par conséquent, on constate qu'une seule étape d'adaptation permet de "repérer" les strates importantes avec un bon paramétrage de $f(n)$.
Nous avons ensuite appliqué notre méthode au cas de la cuve d'un réacteur nucléaire. Pour cela, nous avons considéré un modèle de défaillance à 3 variables aléatoires. Nous avons alors comparé 2-SDA à la méthode de simulation directionnelle standard (SD).

	Méthode	n	$f(n)$	$\hat{P}_f$	Longueur IC 95%	Nb. d'appels à fonc. déf.
1	2-SDA	50	18	6.7×10^{-6}	6.8×10^{-6}	510
2	SD	200	/	3.7×10^{-6}	1.6×10^{-5}	822
3	2-SDA	200	40	8.0×10^{-6}	5.0×10^{-6}	2290
4	SD	1000	/	7.6×10^{-6}	7.0×10^{-6}	4028

On constate toujours une certaine amélioration de la méthode 2-SDA par rapport à la méthode SD. En effet :

- pour un même nombre de tirages n, la méthode SDA fournit a priori une meilleur estimation de P_f et permet de diminuer la longueur de l'IC
- pour un même niveau d'incertitude d'estimation, la méthode 2-SDA permet de diminuer le nombre d'appels à la fonction de défaillance d'à peu près un facteur 9 (ligne 1 et 4).

On peut également s'attendre, comme dans le cas de l'hyperplan étudié précédemment, à une nette amélioration sur le résultat de l'estimation et de l'incertitude associée lorsque nous considérerons plus de paramètres aléatoires en entrée du modèle. Nous pourrons sans doute atteindre un facteur dix d'amélioration en nombre d'appels à la fonction de défaillance pour une dimension supérieure à 6 ou 7.

4. Conclusion et perspectives

Dans cet article, nous avons présenté une nouvelle méthode de Monte-Carlo accélérée conçue pour répondre aux contraintes industrielles rencontrées en fiabilité des structures : estimation robuste d'une faible probabilité à partir d'un modèle lourd en temps de calcul. Cette méthode est basée sur la stratification et la simulation directionnelle. Nous les avons combinées en y ajoutant une stratégie adaptative. Nous l'avons tout d'abord appliquée à un exemple académique, sur lequel nous avons montré que L-SDA donne de meilleurs résultats que la méthode de simulation directionnelle classique (SD). Ensuite, nous l'avons appliquée au cas d'un composant nucléaire, confirmant à nouveau son efficacité vis-à-vis de la méthode SD.
Cependant, nous avons constaté, sur ce dernier exemple, que la méthode L-SDA avec $L \geq 3$ n'est pas plus efficace que 2-SDA. Ceci s'explique par le fait que les strates sont fixes lors du processus adaptatif. Par conséquent, une perspective intéressante à court terme sera de développer une méthode similaire à L-SDA, mais comprenant également une adaptation des angles des cônes, pour ainsi mieux se concentrer dans la zone de défaillance.

REFERENCES

(Cannamela et al. 2007) Cannamela, C., Garnier, J., Iooss, B. 2007. Controlled stratification for quantile estimation. *Preprint submitted to Annals of Applied Statistics.*

(Etoré et al. 2007) Etoré, P. and Jourdain, B. 2007. Adaptive optimal allocation in stratified sampling methods. Preprint.

(Munoz et al. 2008 [1]) Munoz Zuniga, M., Garnier, J., Remy, E., de Rocquigny, E. 2008. Estimation contrôlée de faibles probabilités sur des modèles physiques complexes. *Communication au congrès $\lambda\mu$16.*

(Munoz et al. 2008 [2]) Munoz Zuniga, M., Garnier, J., Remy, E., de Rocquigny, E. 2008. Adaptive Directionnal Stratification - An adaptive directional sampling method on a stratified space. *Communication at ICOSSAR congress.*

(Rubinstein et al. 2007) Rubinstein, R.Y. and Kroese, D.P. 2007. *Simulation and the Monte-Carlo Method.* Wiley.