

Quelques aspects de géostatistique appliquée en géosciences et en environnement

Chantal de FOUQUET

**Ecole des Mines de Paris
géosciences - géostatistique**

GdR MASCOT-NUM

ANR CHORUS

Krigeage par processus gaussiens pour les codes numériques

IHP – 30 avril 2014

Introduction

- **La géostatistique**

Initiée par Georges Matheron, fin des années 1950

à partir de travaux d'estimation des gisements miniers en Afrique du Sud

-> notion de **support** : bloc/échantillon $10^4 - 10^6$, panneau/échantillon $10^5 - 10^9$

la variabilité dépend du support

-> **effet d'information** : contrôle des teneurs, économie d'un projet minier
quantifier l'incertitude d'estimation

- Plusieurs branches

linéaire (stationnaire ou non, multivariable...)

non linéaire (estimer $f(Z)$ ou $f(Z_V)$), simulations (fonctions ou ensembles)

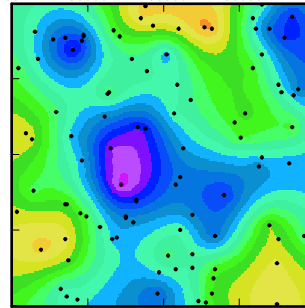
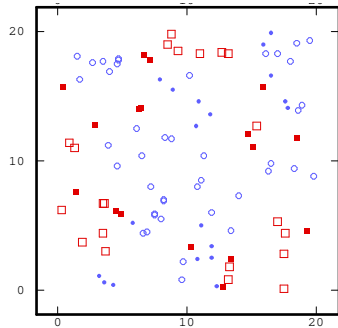
- Présentation de la démarche linéaire classique, aucune exhaustivité

Contexte

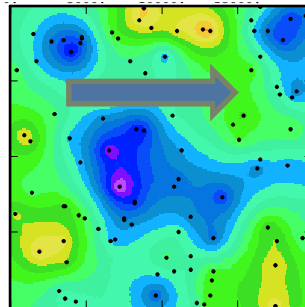
Données



estimation linéaire optimale (krigeage)



variogramme linéaire
voisinage unique



variogramme exponentiel
voisinage glissant

- Optimalité ... si le variogramme est connu
- **Inférer le variogramme** ... ou modélisation bayésienne

Données



variographie



krigeage

1. Modélisation pour l'estimation linéaire

variable régionalisée $z(x)$, Fonction Aléatoire $Z(x)$

- **Stationnarité d'ordre 2 :**

- $E [Z(x)] = m$

- covariance $E [(Z(x)-m) (Z(x+h)-m)] = C(h)$

- **Inférence de la variance à partir de N points expérimentaux $S = \{x_1, \dots, x_N\}$**

Variance empirique de l'échantillon : $m^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z(x_i), C^*(0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Z(x_i) - m^*)^2$

représente la « variance de dispersion » d'un point parmi N

$$\begin{aligned} E[C^*(0)] &= C(0) - \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N C(x_i - x_j) \\ &= C(0) - \bar{C}(S,S) \end{aligned}$$

$E[C^*(0)] \neq C(0)$, $E[C^*(h)] \neq C(h)$, $E[\rho^*(h)] \neq \rho(h)$ car échantillonnage et champ finis

Si l'hypothèse de stationnarité d'ordre 2 n'est pas vérifiée ?

exemple : $Z_n = \sum_{i=1}^n A_i$ où A_i iid, $m_A = 0$, variance σ^2

- dans le modèle : $E[Z_n Z_{n+k}] = n \sigma^2$, non stationnaire.

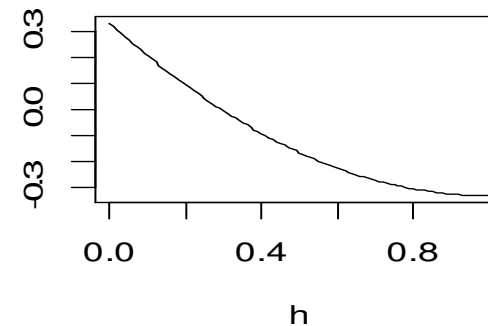
- variance de dispersion de Z_1, \dots, Z_N : $E\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Z_i - m_Z^*)^2\right] = \frac{N^2 - 1}{3N}$

► La variance de toute réalisation est finie et indéfiniment croissante avec N.

- Covariance, sur segment de longueur L :

$$C^*(h) = \frac{1}{L-h} \int_0^{L-h} (Z(x+h) - \bar{Z})(Z(x) - \bar{Z}) dx$$

$$E[C^*(h)] = \frac{1}{3}L - \frac{4}{3}h + \frac{2}{3}\frac{h^2}{L}$$



► covariance empirique : dépend de l'implantation des x_i et du champ

artefact si covariance non stationnaire $C(x, x+h)$

Fonction Aléatoire intrinsèque d'ordre 0

- Les accroissements $Z(x+h)-Z(x)$ sont stationnaires d'ordre 2

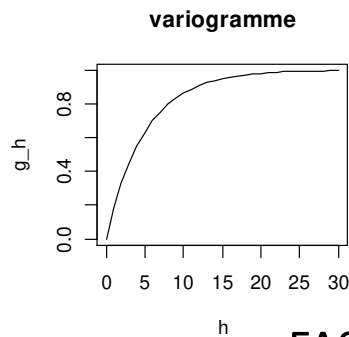
- $E [Z(x+h)-Z(x)] = 0$

- $D^2 [Z(x+h)-Z(x)] = 2 \gamma (h)$, $\gamma (h)$ variogramme

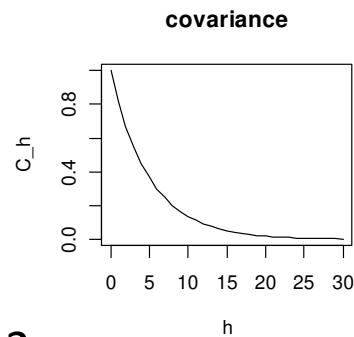
Combinaison linéaire autorisée : $\sum_i \lambda_i Z(x_i)$ avec $\sum_i \lambda_i = 0$

Variance d'une CLA
$$D^2 \left[\sum_i \lambda_i Z(x_i) \right] = - \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i - x_j)$$

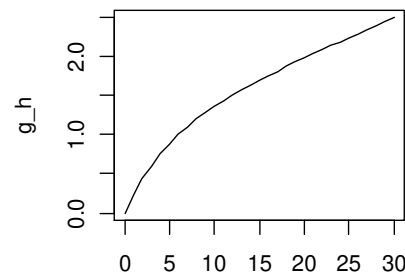
Toute FAST-2 est intrinsèque et son variogramme est borné : $\gamma (h) = C(0) - C(h)$



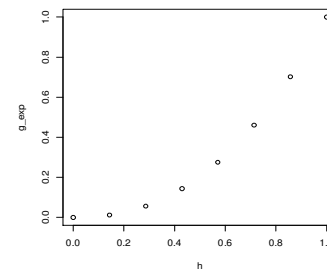
FAST-2



h



FAI-0



non FAI-0

Inférence du variogramme

- $E[\gamma^*(h)] = \gamma(h)$ cas du segment $\gamma^*(h) = \frac{1}{2(L-h)} \int_0^{L-h} (Z(x+h) - Z(x))^2 dx$

$\lim_{h \rightarrow \infty} \gamma(h) < A|h|^2$ permet la détection de non-stationnarités

- Le variogramme spatial empirique n'est pas un modèle discret

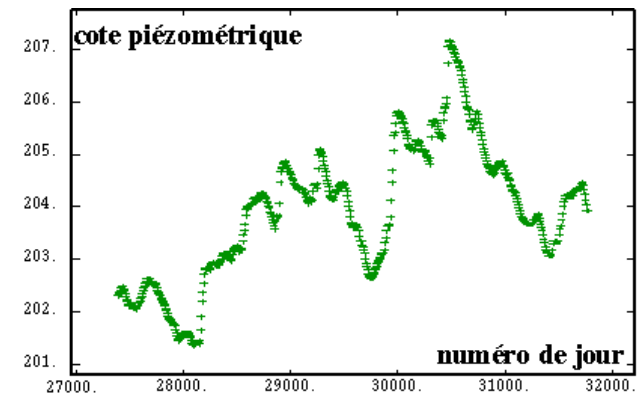
► Calcul du **variogramme expérimental sur les données**
et ajustement par un modèle

- **Analyse exploratoire et variographique**

en pratique : échantillonnage préférentiel ?

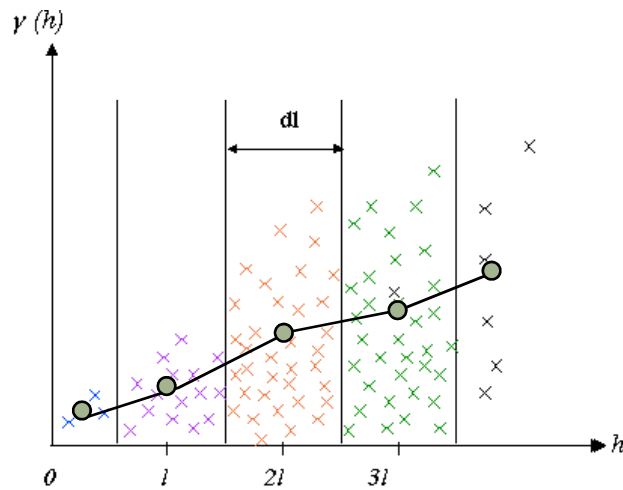
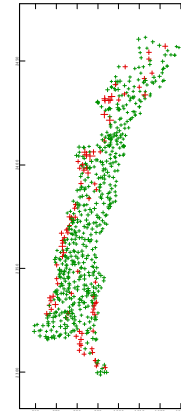
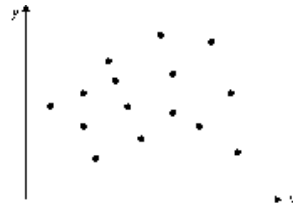
Stationnarité, anisotropie, régularité, échelles de variabilité ...

Le degré de stationnarité dépend de l'échelle d'observation



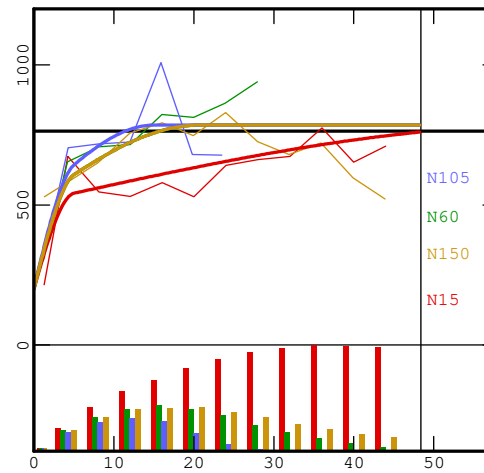
Le variogramme et ses variantes

Données



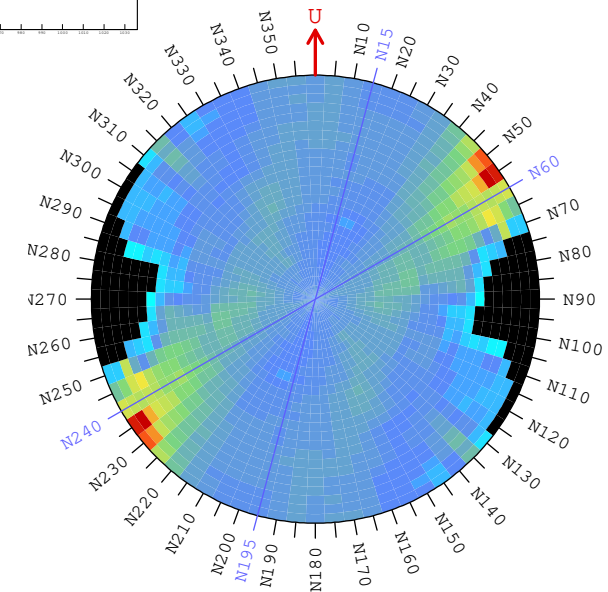
Nuée variographique

► singularités



variogrammes directionnels

► anisotropies



carte variographique

Modèles multivariables

- Variogramme croisé des FAI-0 Z_1 et Z_2 :

$$\gamma_{12}(h) = \frac{1}{2} E \left[(Z_1(x+h) - Z_1(x))(Z_2(x+h) - Z_2(x)) \right]$$

Cas stationnaire :

variogramme croisé = partie paire de la covariance croisée

► le variogramme croisé ne détecte pas les dissymétries

- Modèles

Corrélation intrinsèque $\gamma_{ij}(h) = C_{ij} \gamma(h)$

$\rho_{ij} = C_{ij} / (C_{ii} C_{jj})^{1/2}$ indépendante du support

Cas bivariable $Z_1 = a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2$, $Z_2 = a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2$

Y_1 et Y_2 indépendantes, de même variogramme γ

modèle linéaire de corégionalisation, dérivation, convolution ...

Modèle linéaire de corégionalisation

- Varigrammes simples et croisés des $Z_i(x)$ sont CL de modèles élémentaires

$$\gamma_{ij}(h) = \sum_u C_{ij}^u \gamma_u(h)$$

- Les Variables se décomposent en composantes d'échelles, elles-mêmes combinaison linéaires de composantes non corrélées

$$Z_i(x) = \sum_u Z_i^u(x) \text{ avec } Z_i^u(x) = \sum_j a_{ij}^u Y_j^u(x)$$

où le variogramme de $Y_j^u(x)$ est $\gamma_u(h)$

Krigeage

- Estimateur linéaire optimal
- Cas ponctuel

$$Z^*(x) = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}(x) Z(x_{\alpha})$$

- FAST-2 : non biais si $m = E[Z(x)]$ inconnue
- FAI-0 : l'erreur d'estimation $Z(x) - Z^*(x)$ est une CLA

même condition : $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}(x) = 1$

$$\begin{bmatrix} \Sigma & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ 1 \end{bmatrix} \text{ avec } \Sigma = [K(x_{\alpha} - x_{\beta})], \sigma_x = [K(x_{\alpha} - x)], \lambda = [\lambda_{\alpha}(x)]$$

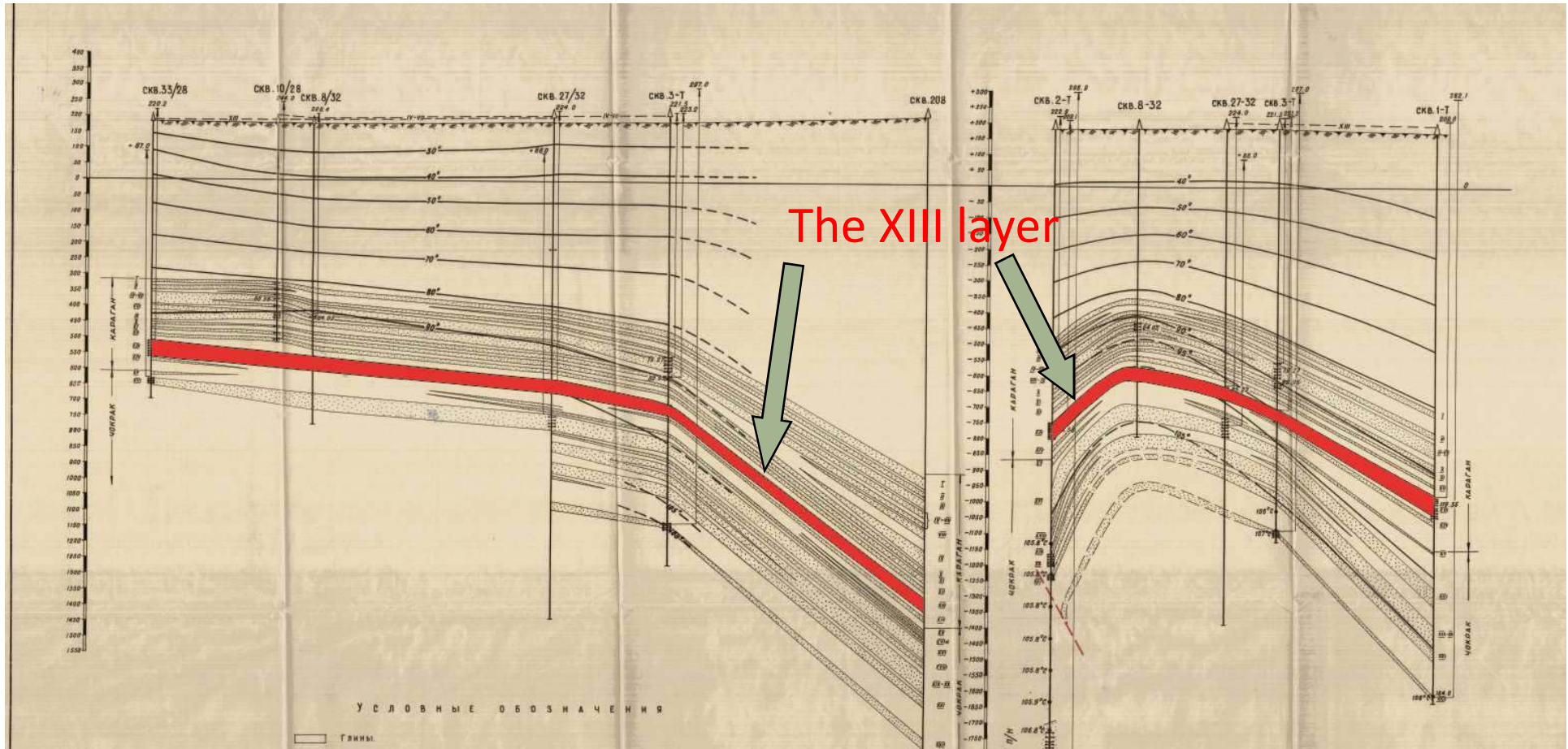
$$E\left[(Z(x) - Z^*(x))^2\right] = K(0) - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}(x) K(x_{\alpha} - x) - \mu$$

Quelques propriétés

- estimateur exact : $Z^*(x_\alpha) = Z(x_\alpha)$
- relations linéaires sont conservées : $Z_V^* = \frac{1}{V} \int_V Z^*(x) dx$
- ... en adaptant les conditions de non biais : $(Z_{An_i} - Z_{An_j})^* = Z_{An_i}^* - Z_{An_j}^*$
- toutes les données n'ont pas nécessairement même support (adapter la covariance)
- choix du voisinage
- sous forme d'interpolateur, en voisinage unique : notant $D = [Z(x_\alpha)]$

$$\begin{aligned} Z^*(x) &= \lambda^t D = \begin{bmatrix} D^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} D^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 1 \\ 1^t & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^t & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{\alpha} b_{\alpha} K(x_{\alpha} - x) + c \end{aligned}$$

Modélisation non-stationnaire



Modélisation non-stationnaire (KU)

- Lorsque l'hypothèse de stationnarité des accroissements est trop stricte, modèle non stationnaire :

$$Z(x) = m(x) + Y(x) \text{ avec}$$

- $Y(x)$ FA Stationnaire, espérance nulle
- $m(x)$ polynomiale $a_\ell f^\ell(x)$, $\ell \leq k$ où a_ℓ inconnus

Problème : déterminer les a_ℓ et $K(h)$

Krigeage universel :

$$Z^*(x) = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} Z_{\alpha} \quad \text{avec } E[Z(x) - Z^*(x)] = 0, \forall a_{\ell} \text{ inconnus}$$

Conditions de non-biais ou "d'universalité" : $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} f^{\ell}_{\alpha} = f^{\ell}(x) \quad \ell = 0, \dots, k$

D'où krigeage universel :

$$\begin{bmatrix} K & F \\ F^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x \\ f_x \end{bmatrix} \quad \text{avec } K_x = [K(x_{\alpha} - x)]^t, \lambda = [\lambda_{\alpha}]^t, f_x = \begin{bmatrix} 1 \\ f^1(x) \\ \dots \\ f^k(x) \end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \dots \\ \mu_k \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & f_1^1 & f_1^k \\ 1 & f_2^1 & f_2^k \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & f_N^1 & f_N^k \end{bmatrix}$$

Dérive externe

$$Z(x) = m(x) + Y(x) \text{ avec}$$

- $Y(x)$ FA Stationnaire, espérance nulle
- $m(x) = a_\rho f^\rho(x)$ $f^\rho(x)$ fonctions connues quelconques, système libre

Problème : a_ρ inconnus, déterminer $K(h)$

- empiriquement, sur les résidus de la régression linéaire de Z sur les f^ρ
- validation croisée

Krigeage avec dérive externe : analogue au krigeage universel

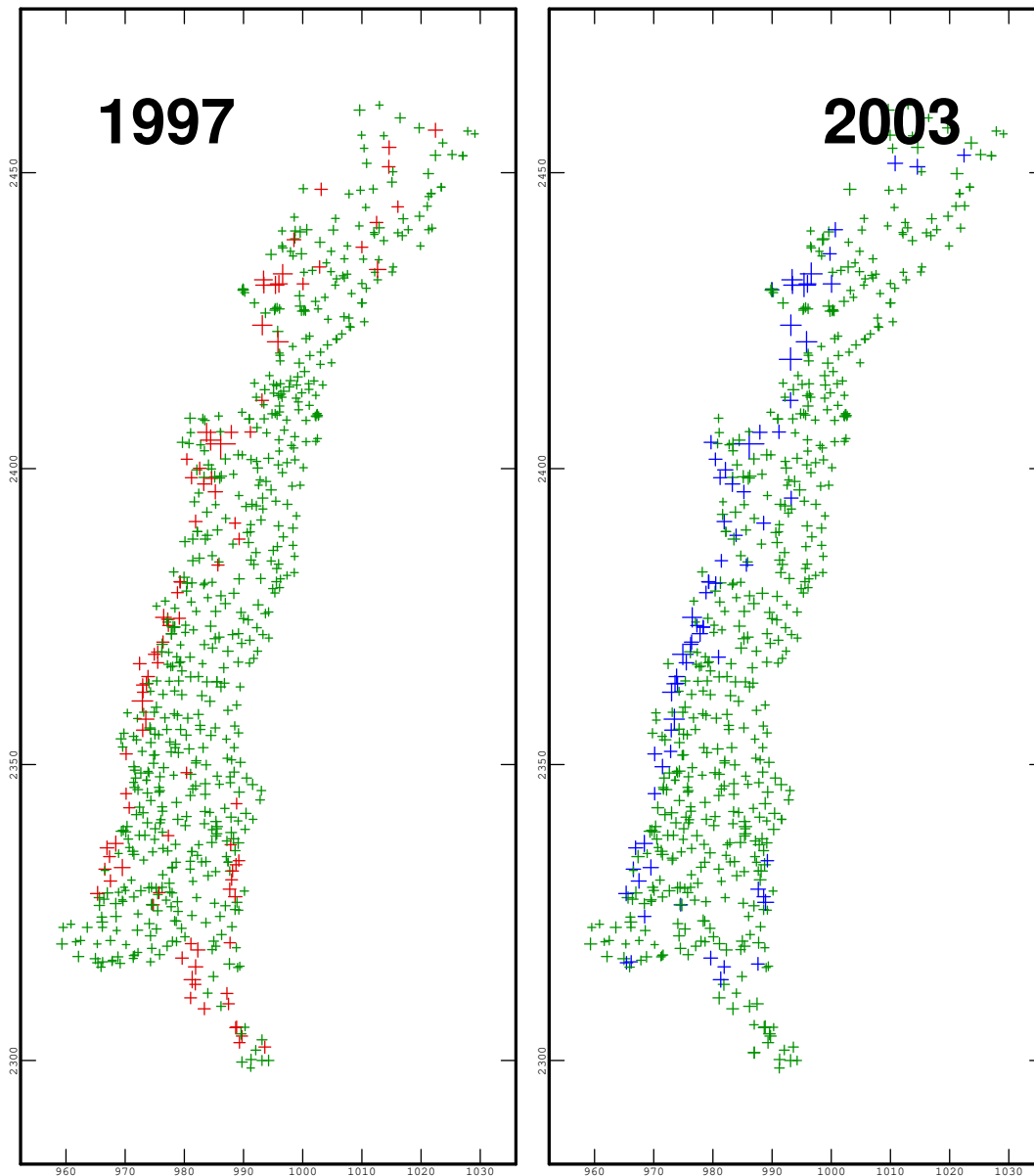
Régression linéaire avec corrélation des résidus

En voisinage glissant : coefficients de la régression variables

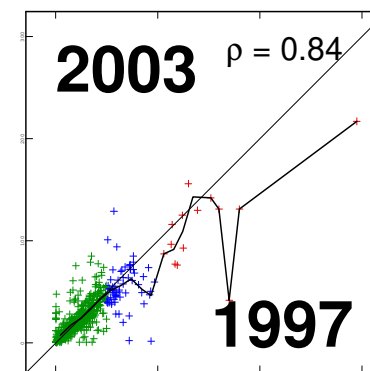
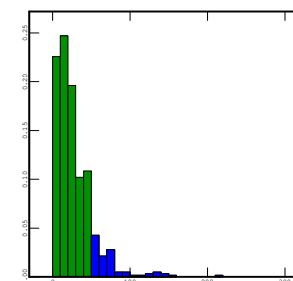
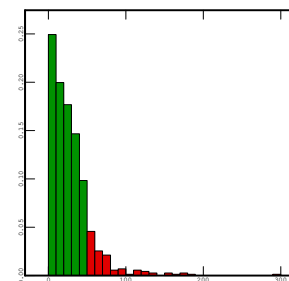
Très utilisé !

2. Exemples

Expl 1. Concentrations en nitrates de la nappe d'Alsace

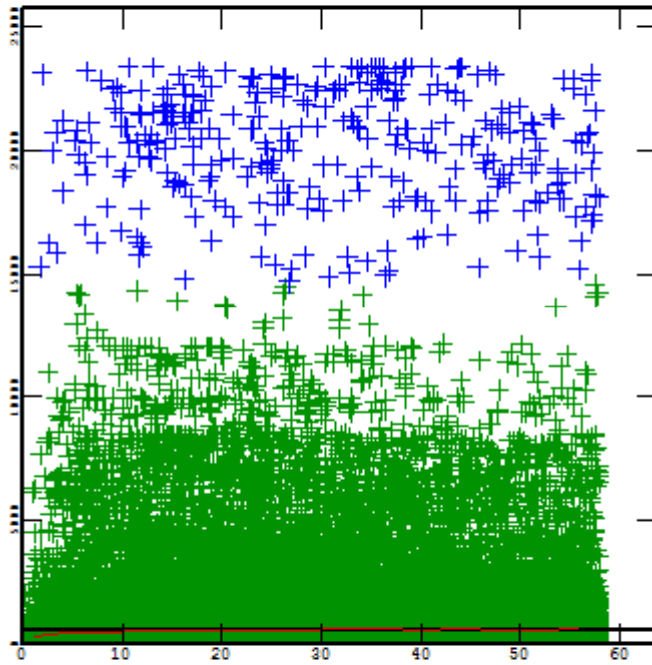


	1997	2003
effectif	702	605
Minimum	0,17 ; 295	0,50 ; 217
Moyenne	28,15	27,28
Ecart type	27,50	24,60

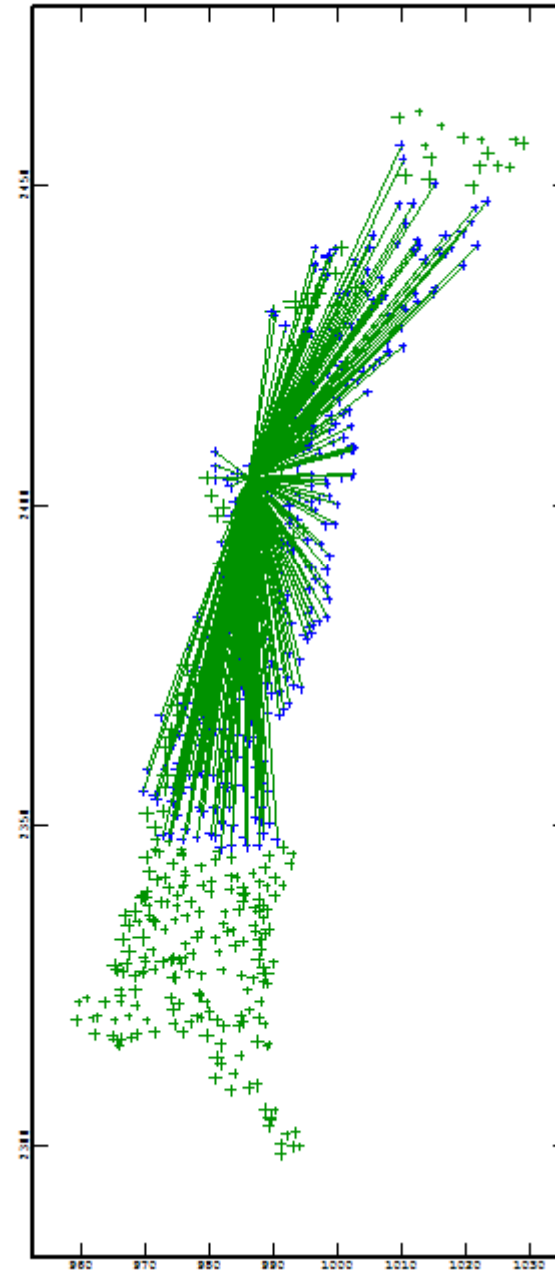


NUÉE VARIOGRAPHIQUE

2003

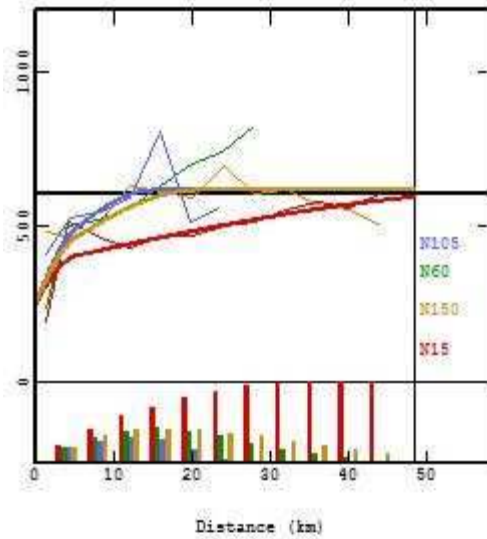


Distance (km)



Ajustement bivariante en modèle linéaire de corégionalisation

2003



effet de pente

$$\begin{bmatrix} 250 & 190 \\ 190 & 200 \end{bmatrix} r = 0.85$$

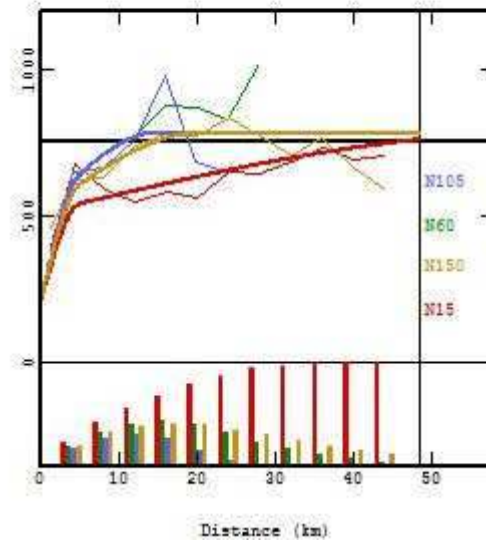
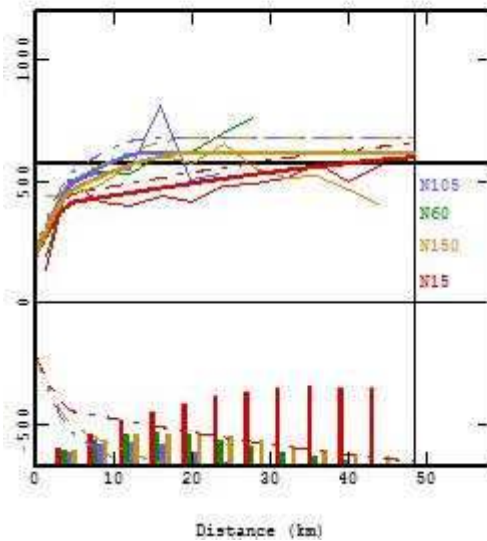
sphérique isotrope, 5km

$$\begin{bmatrix} 125 & 195 \\ 195 & 310 \end{bmatrix} r = 0.99$$

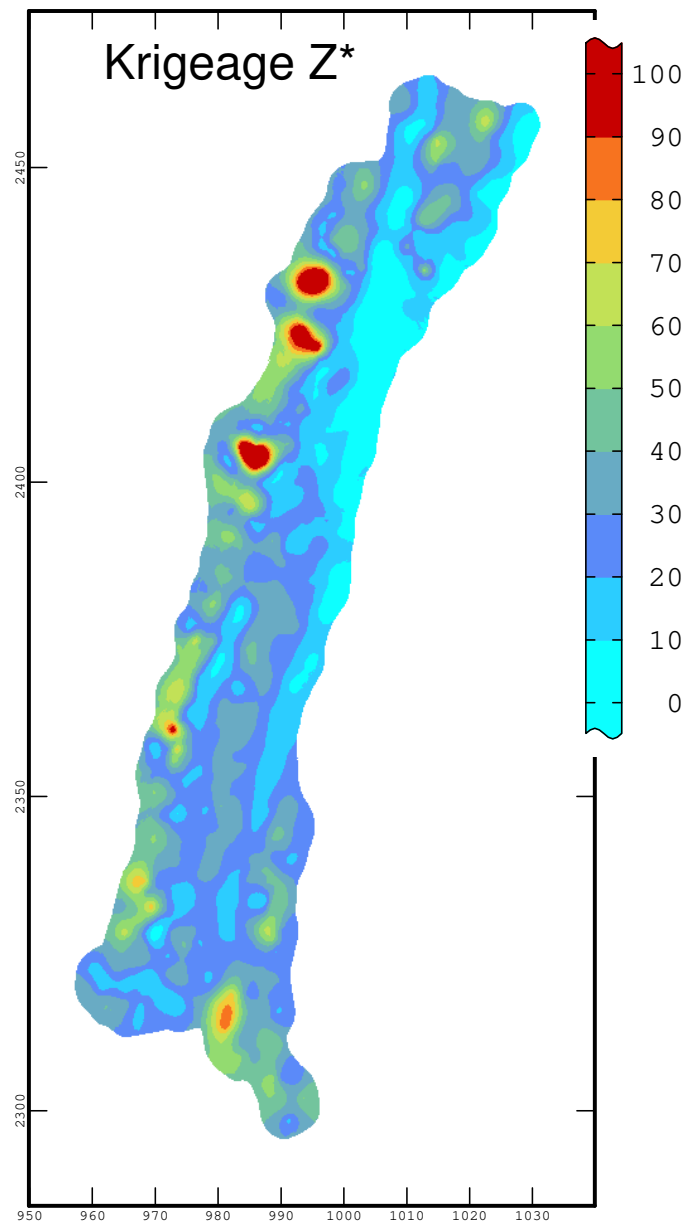
sphérique anisotrope, 65 & 15km

$$\begin{bmatrix} 240 & 230 \\ 230 & 275 \end{bmatrix} r = 0.90$$

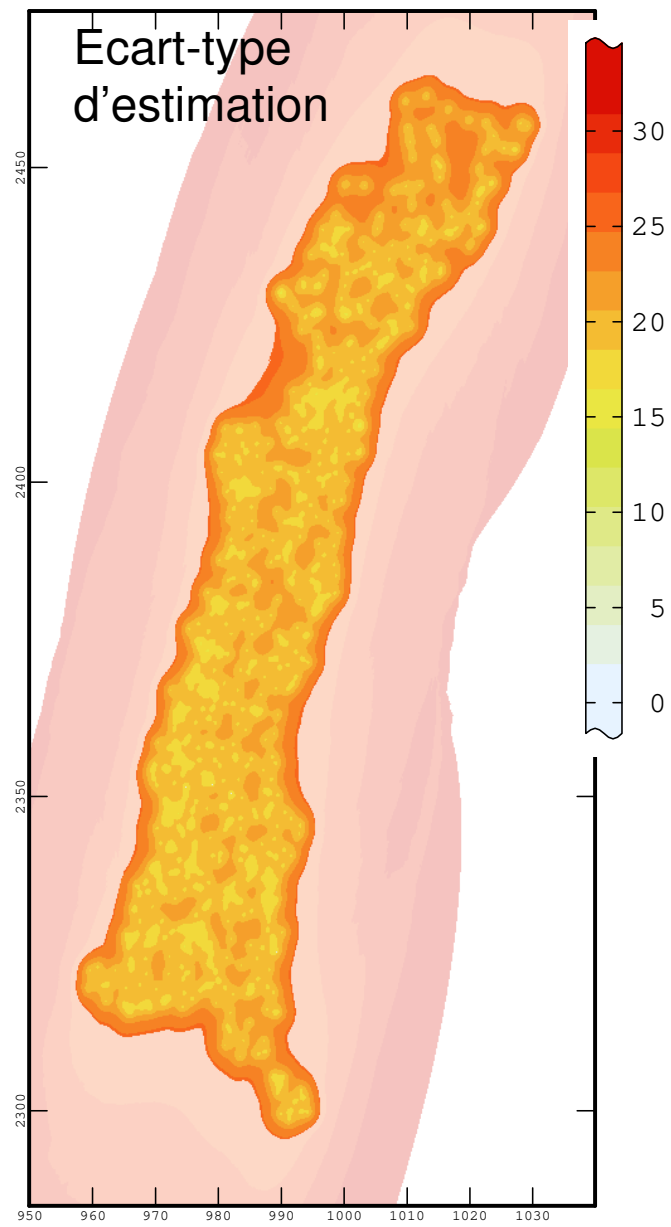
1997



ESTIMATION

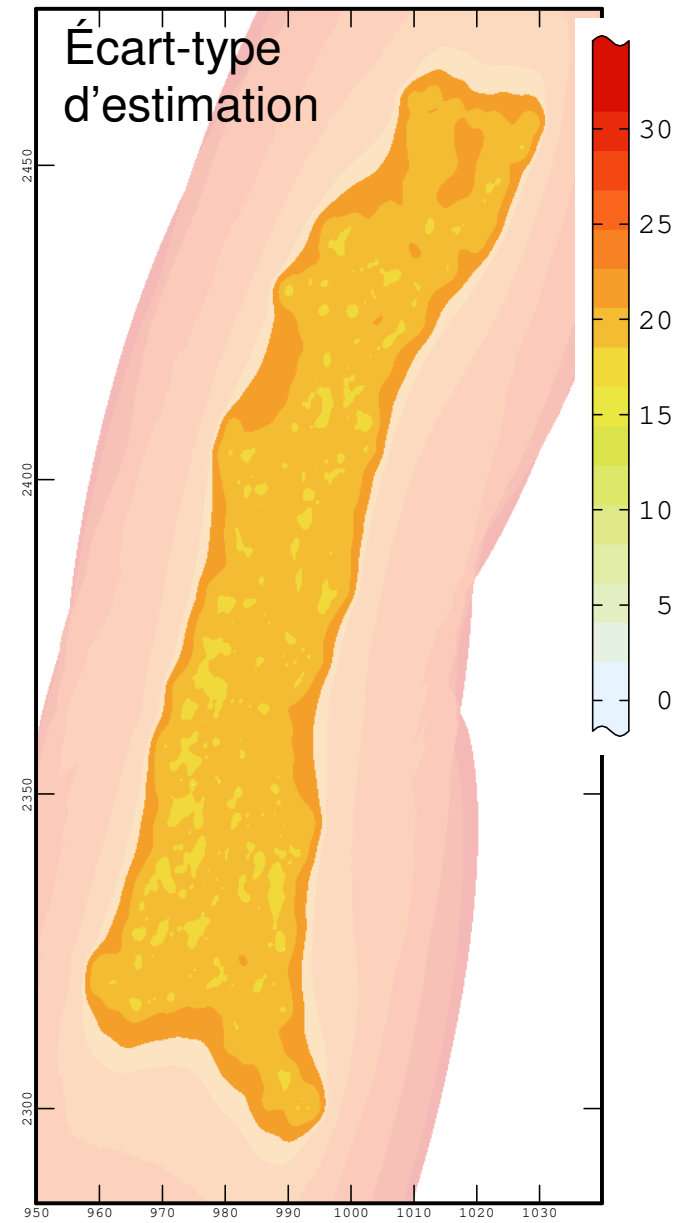
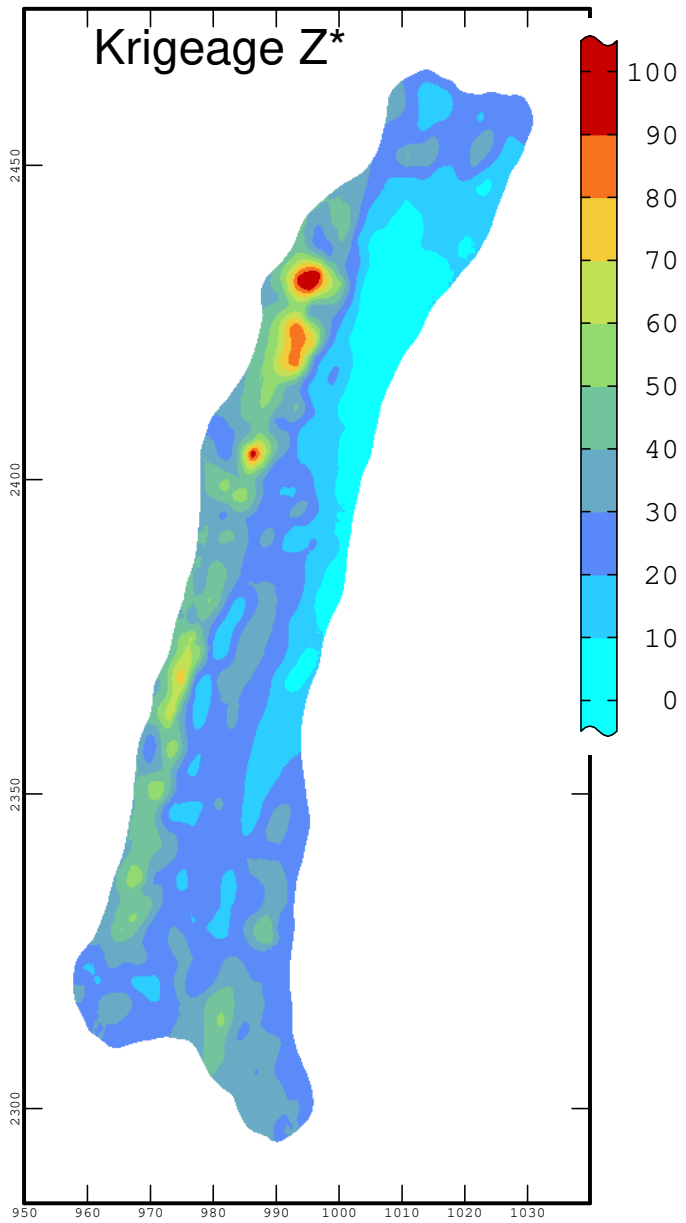


1997



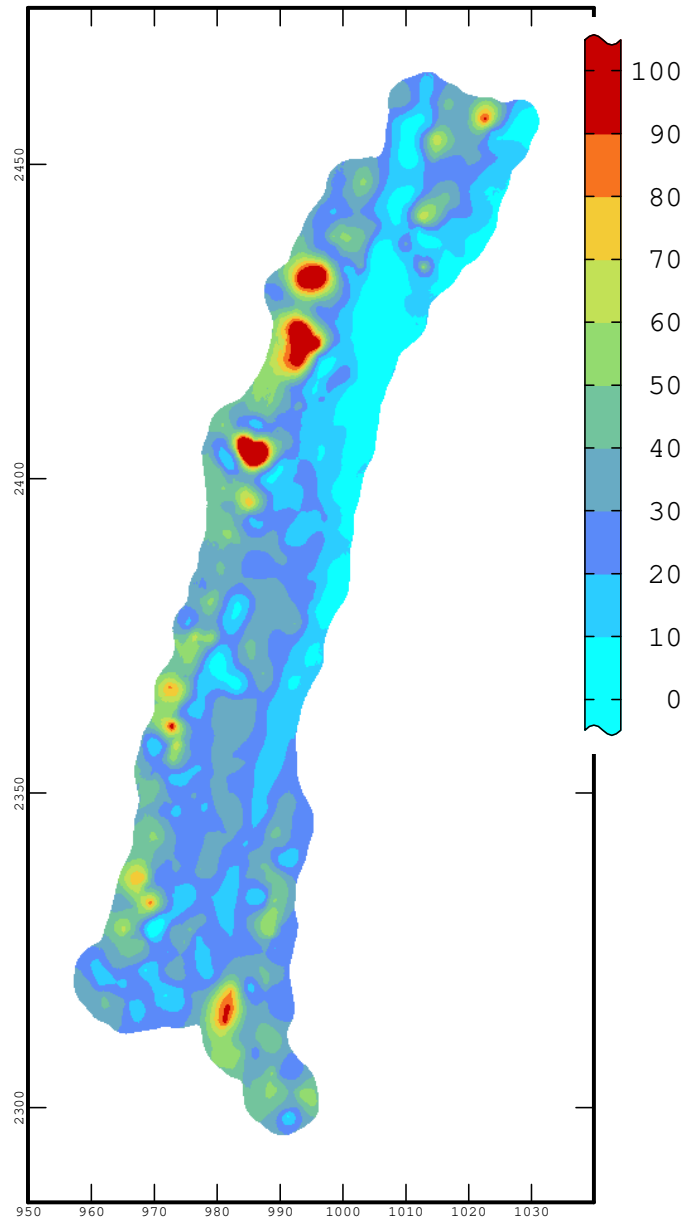
ESTIMATION

2003

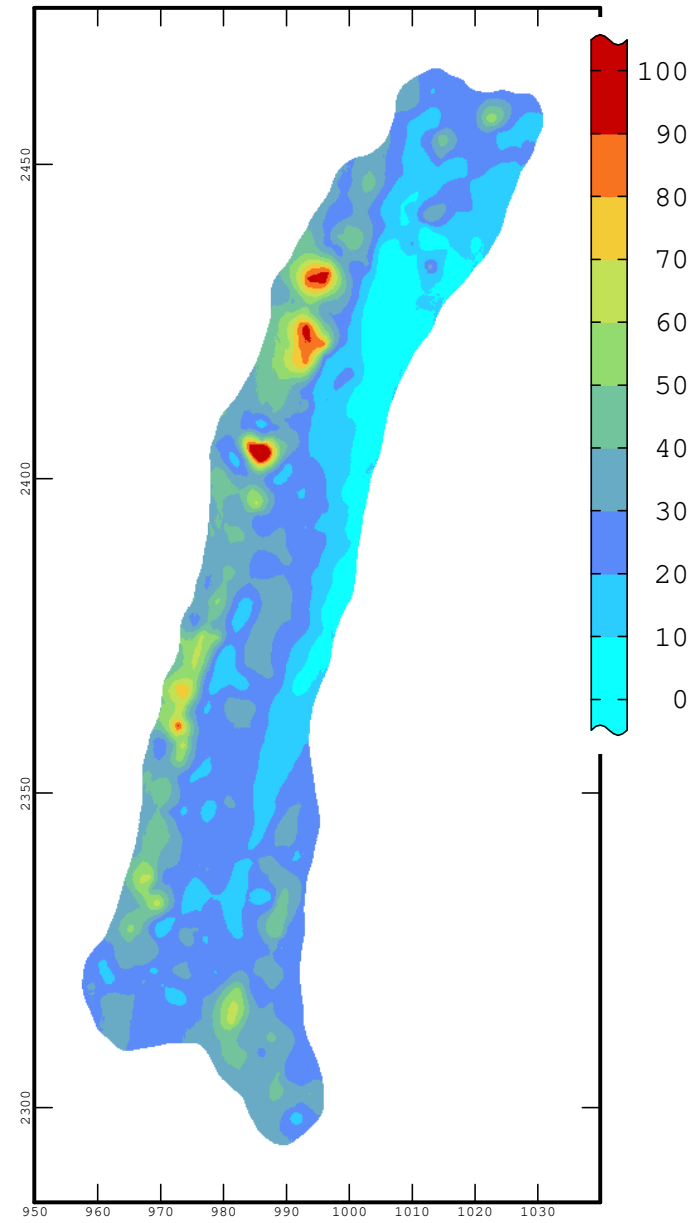


COKRIGEAGE

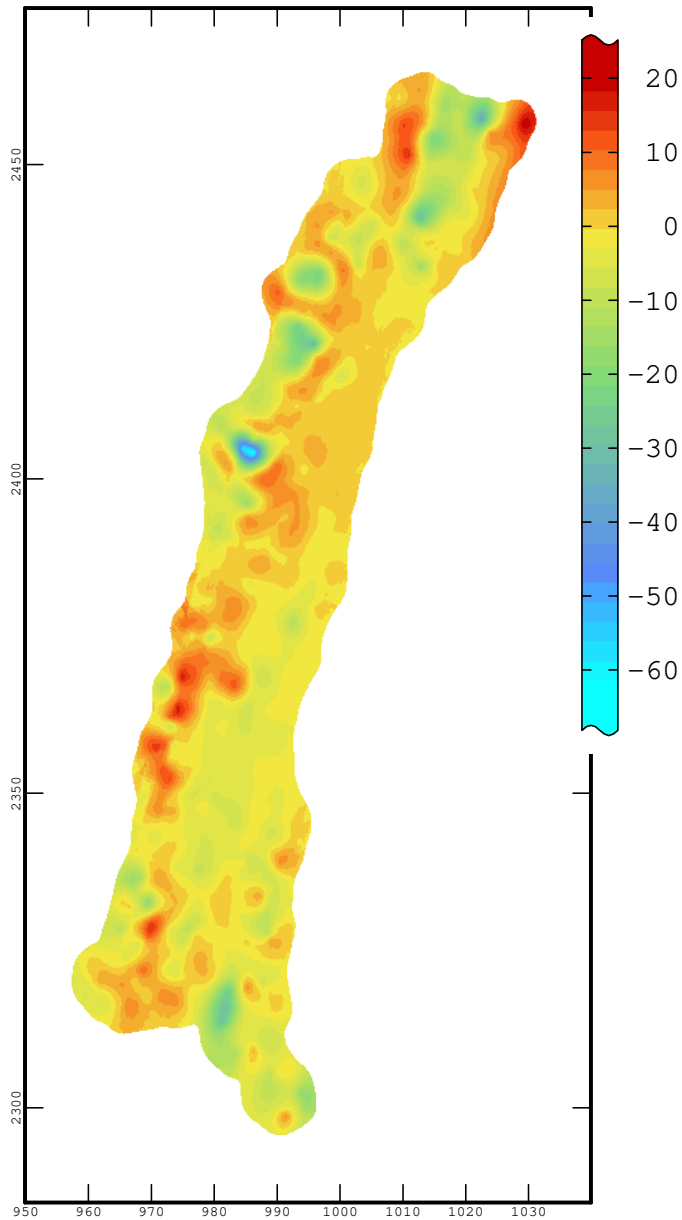
1997



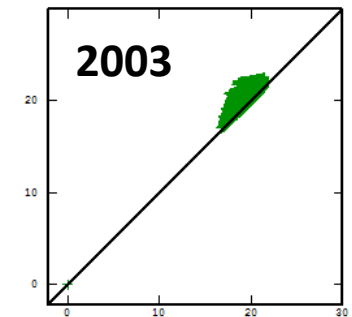
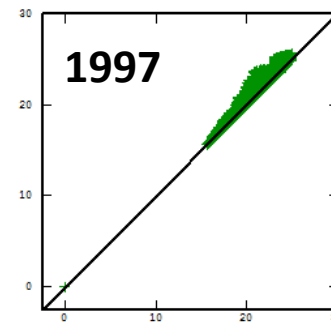
2003



Différence des cokrigeages = cokrigeage de la différence par 1997 et 2003



Ecart-type
de krigeage



Ecart-type de cokrigeage

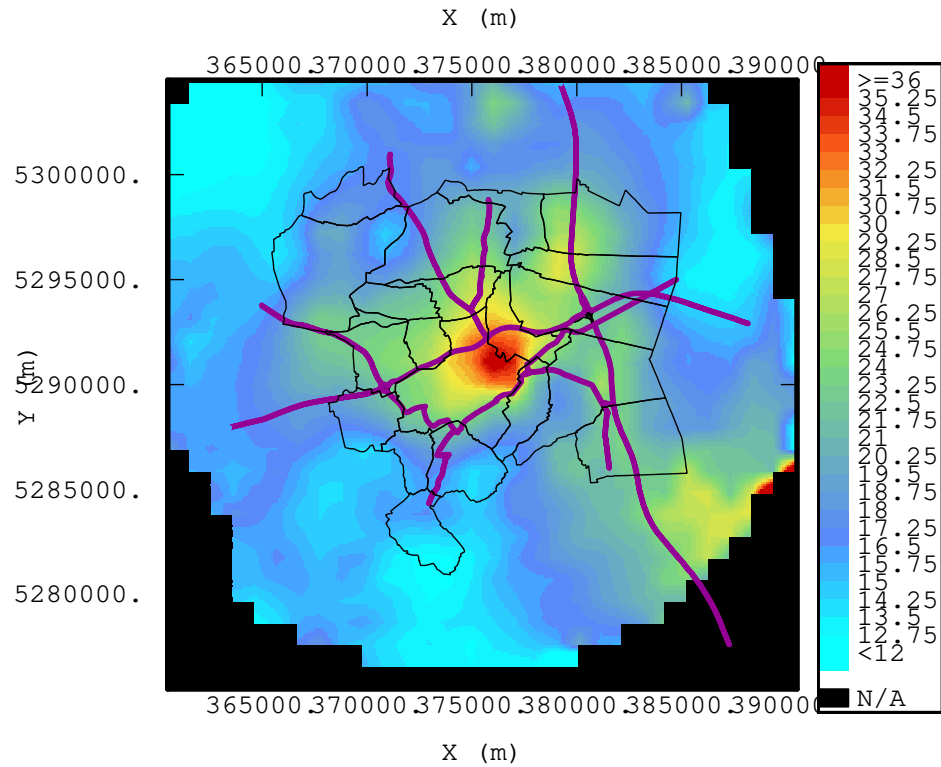
Exemple 2. NO₂ à Mulhouse en 2001 (D. Gallois, 2004)

- 75 sites mesurés
- 3 quinzaines hivernales : 64 sites informés
- 3 quinzaines estivales : 62 sites informés
- 52 sites informés sur l'ensemble des 6 quinzaines

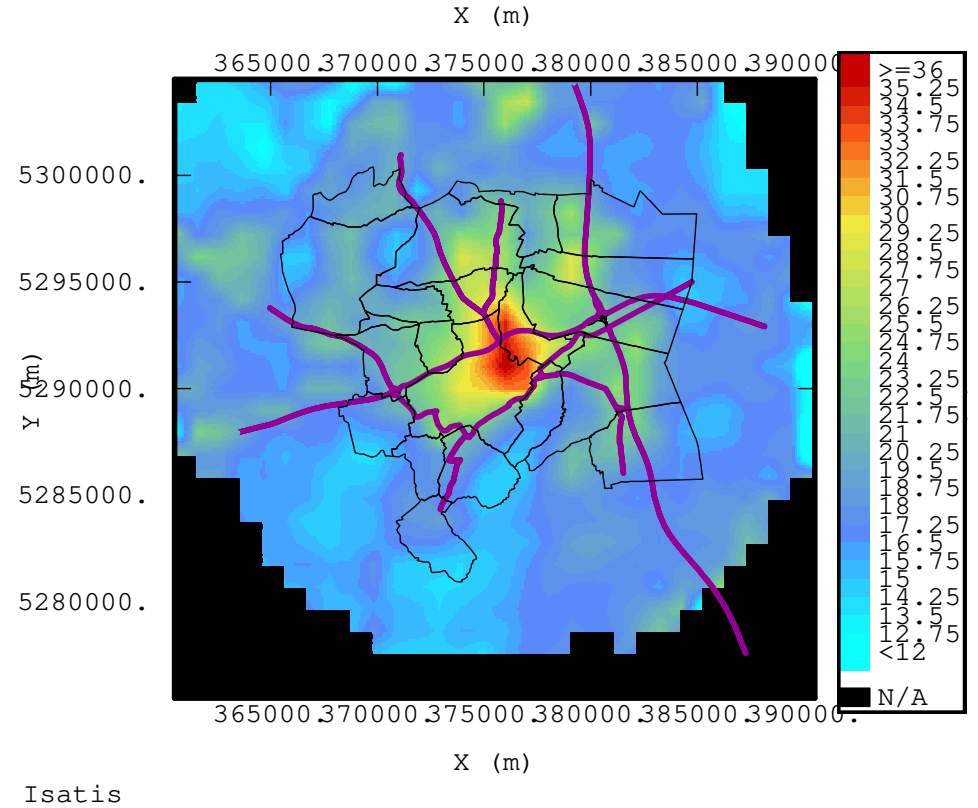
- Cokrigeage des mesures saisonnières, avec variables auxiliaires en dérive externe
 - occupation des sols (bâti dense)
 - densité de population
 - les émissions en NO_x

Résultats

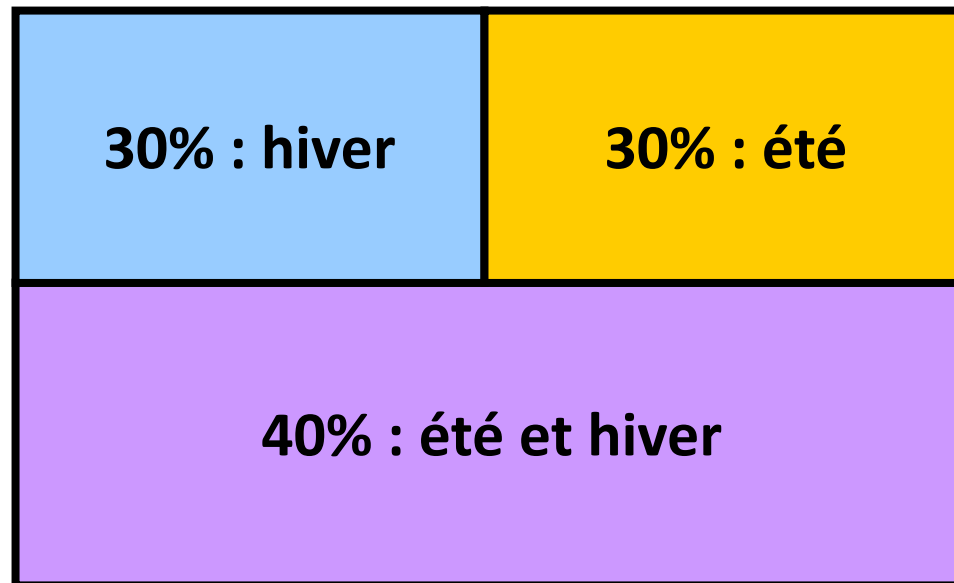
Krigeage par dérive externe



Cokrigeage par dérive externe

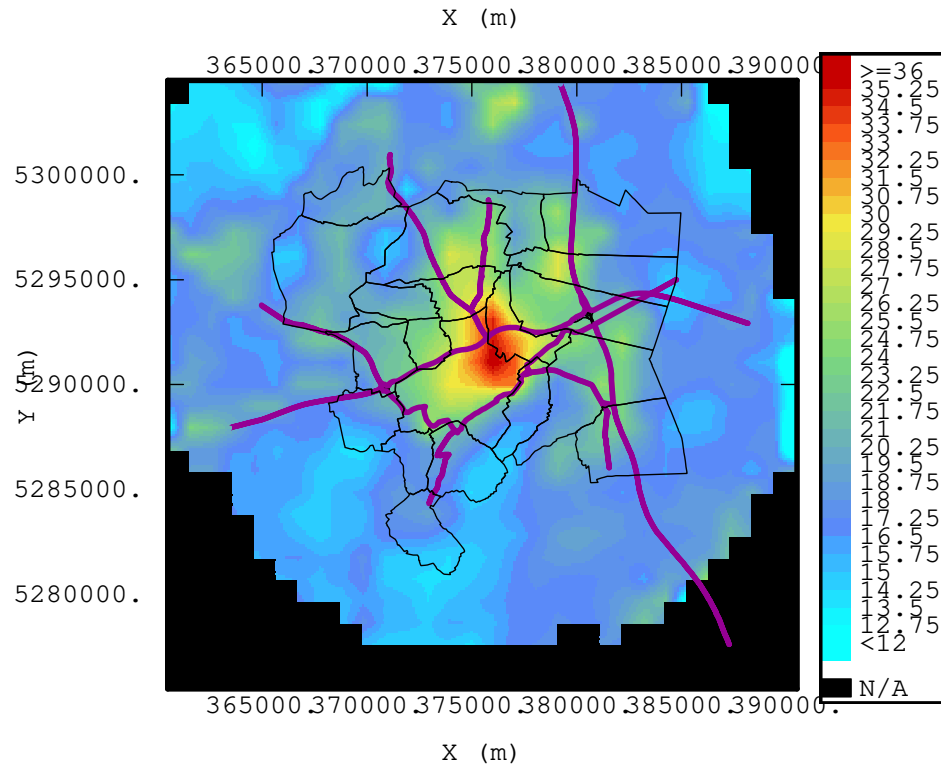


Réduction de l'échantillonnage



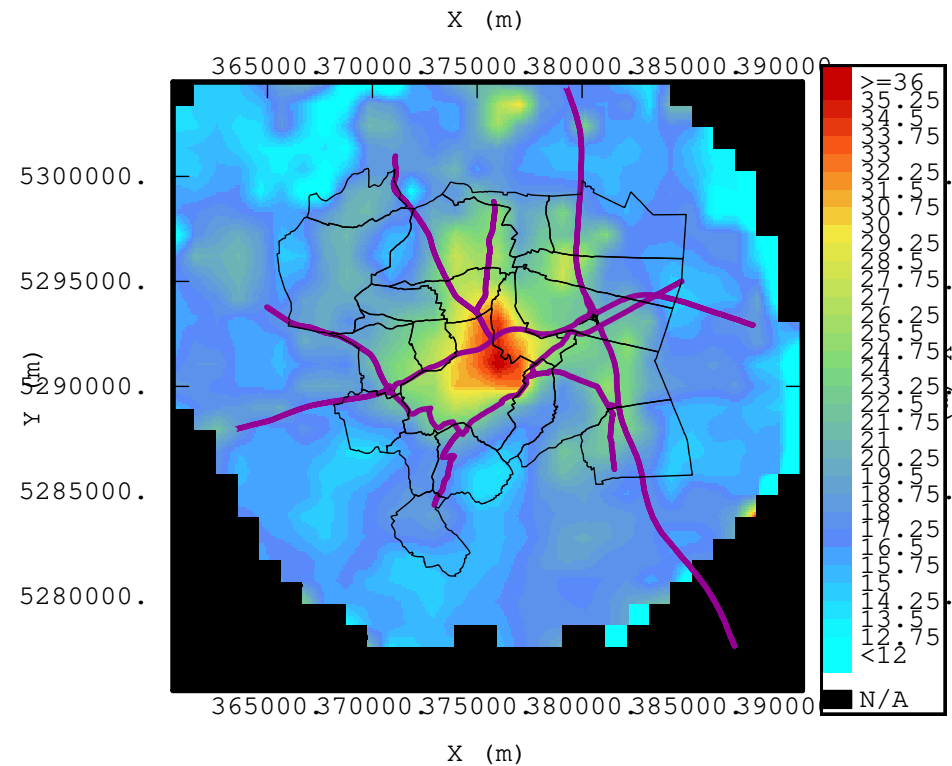
Résultats

Cokrigage par dérive externe



Isatis

Cokrigage en dérive externe
(échantillonnage réduit à 70%)

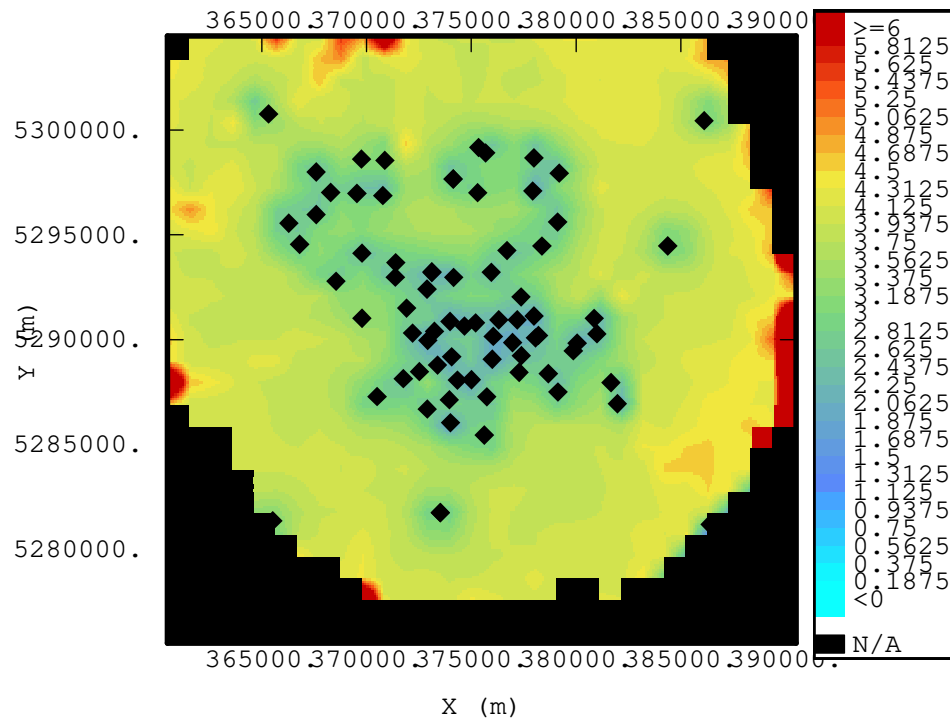


Isatis

Résultats

Base Map (CK drift annee std)

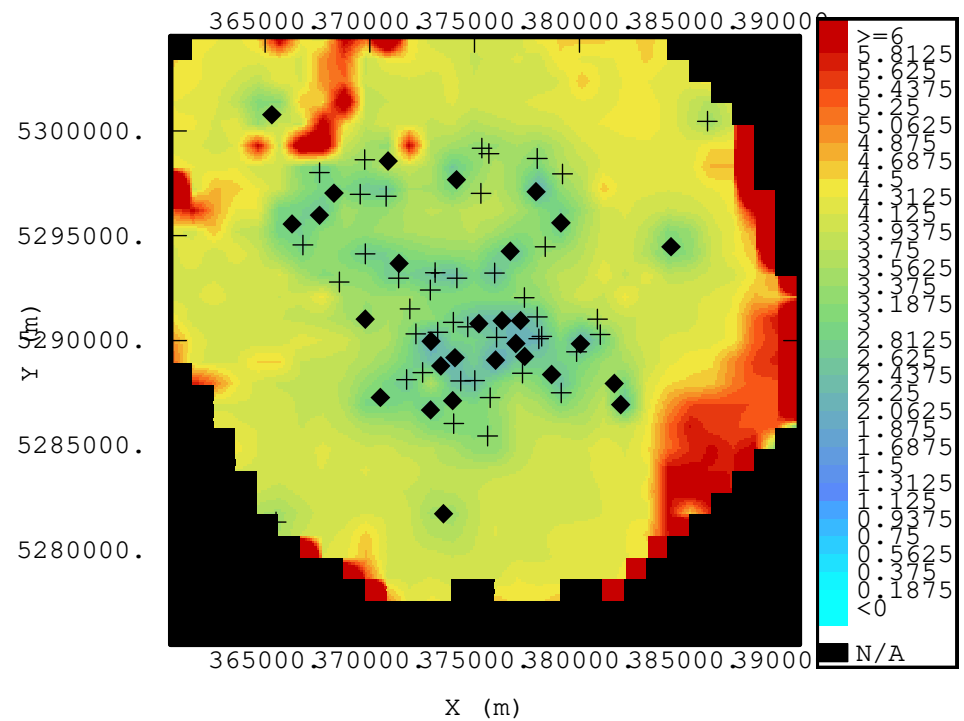
X (m)



Isatis

Ecart-type de l'erreur d'estimation
(échantillonnage réduit à 70%)

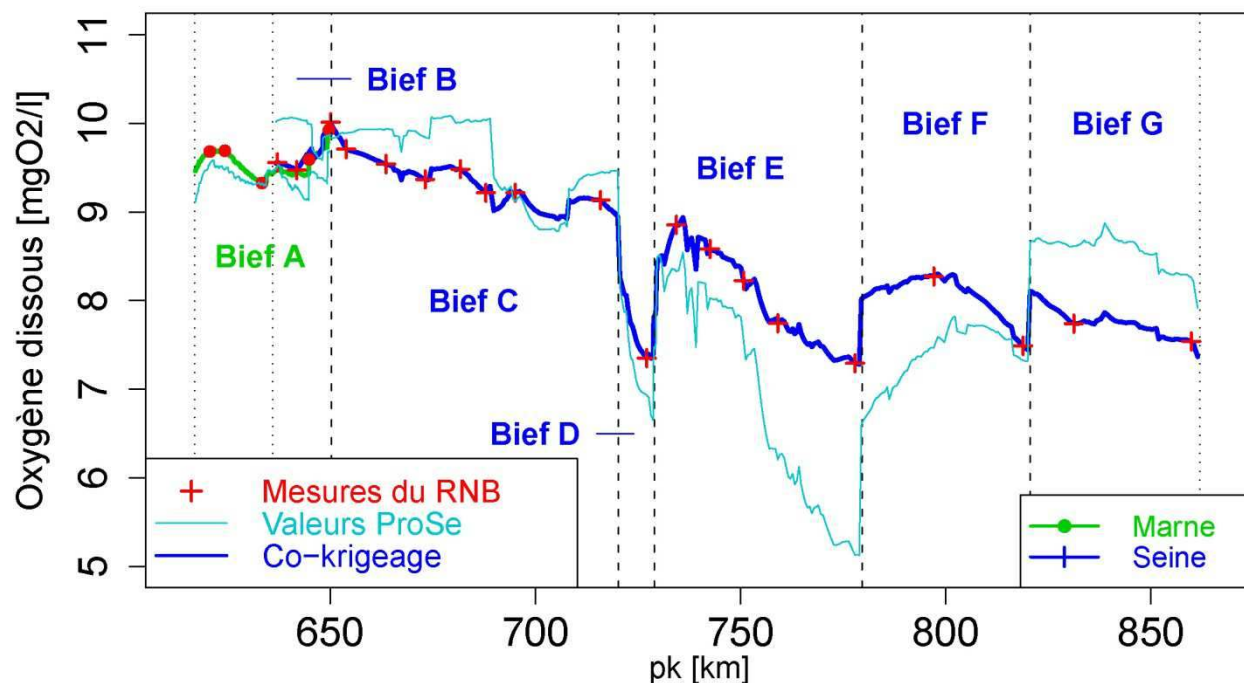
X (m)



Isatis

Expl 3. Co-krigeage simulation ProSe & observations

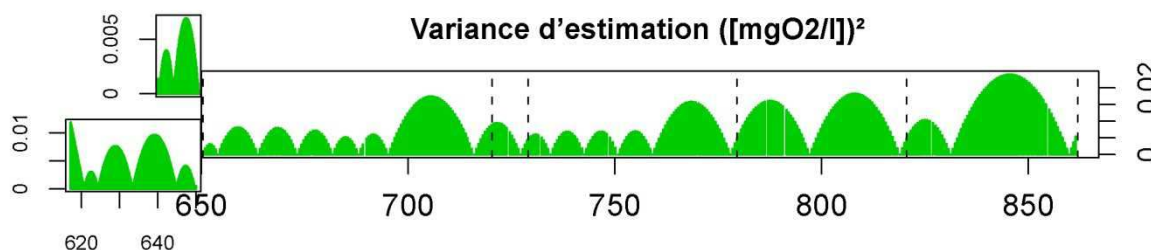
Variogramme global le long du réseau



*Ecart-type
d'estimation
moyen :*

$$\sigma_E / Z^* = 0.9 \%$$

partout < 2%



Expl 4. Which relations between deterministic simulations and observations ?

Chantal de Fouquet^a, Nicolas Flipo^a, Laurent Létinois^b, Laure Malherbe^b, Edwige Polus-Lefèbvre^{a,c}, Michel Poulin^a, Antony Ung^b



a) Ecole des mines de Paris (Mines ParisTech), b) INERIS

Linear coregionalisation between S et Y

- « Real » phenomenon : Y
- Observations : $Z = Y + \varepsilon$, ε measurement error at sites x_α
- Deterministic simulation S, known everywhere
- « Reality » Y and simulation are combinations of several components

$$S(x) = \sum S_u(x), Y(x) = \sum \omega_u [r_u S_u(x) + (1-r_u^2)^{1/2} T_u(x)] + T(x)$$

where S_u et T_u have same variogram γ_u and are spatially not correlated

- **Interpretation**

Divergences of amplitude ω_u and correlation r_u between S et Y differ following spatial components

⇒ **Estimation of Y by cokriging of observation Z and S**

- “Markov model” between Y and S :
particular case where $\forall u, \omega_u r_u = \omega$

$$Y(x) = \omega S(x) + \sum \omega_u (1-r_u^2)^{1/2} T_u(x) + T(x)$$

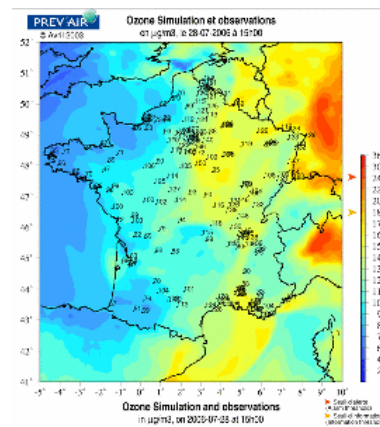
Operational forecast of air quality

Forecast made by INERIS in collaboration with CNRS, METEO France & ADEME

- based on **deterministic tridimensional chimie-transport models** : CHIMERE et al.
- numerical simulations of **ozone** concentration

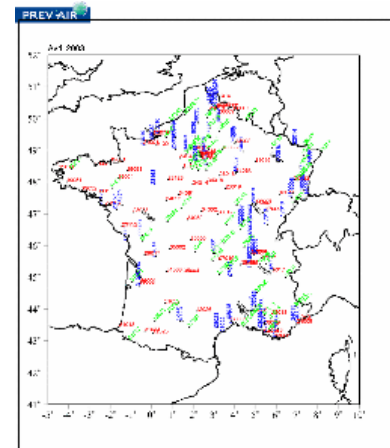
Analyse : correction of simulation for the day before (**J-1**) by the **observations (J-1)**

Understand the differences between simulations & observations, to enhance the automatic correction by kriging of innovations



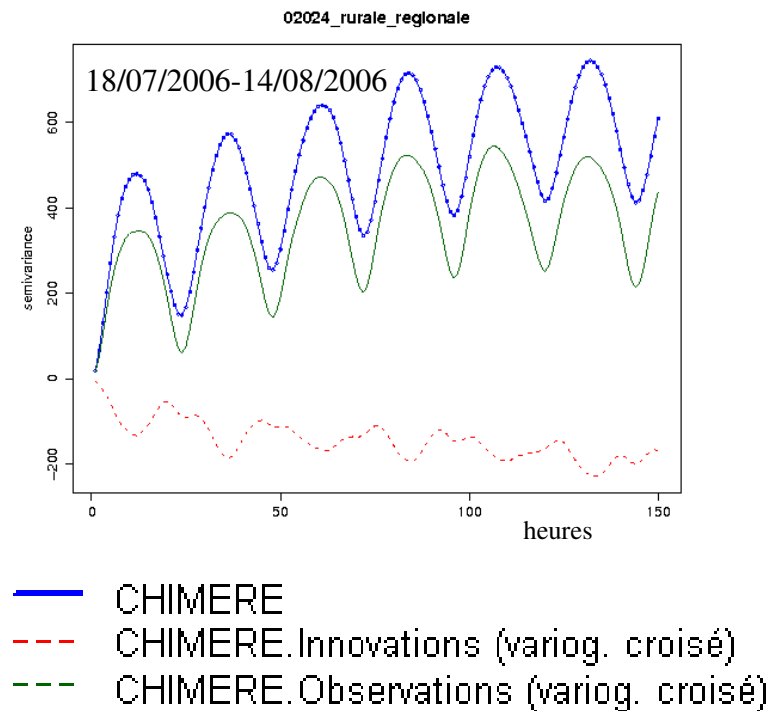
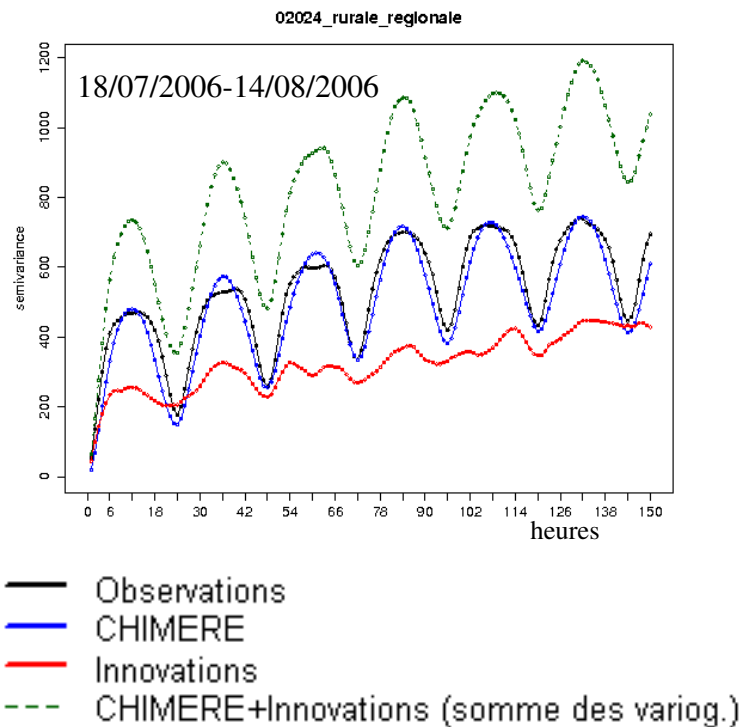
CHIMERE

&



observations

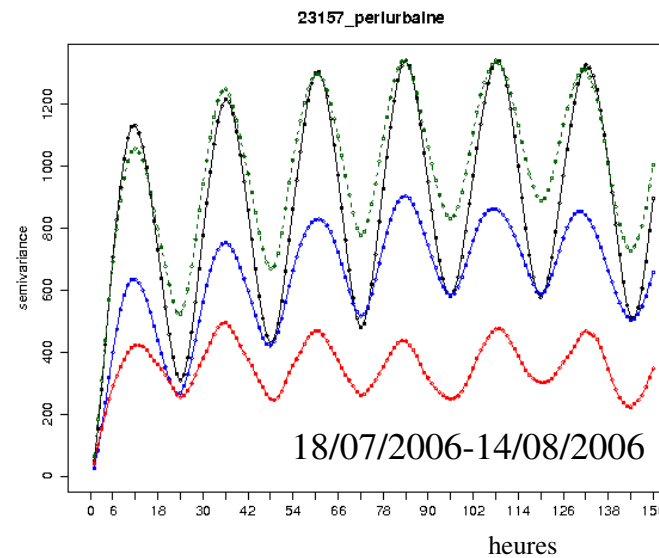
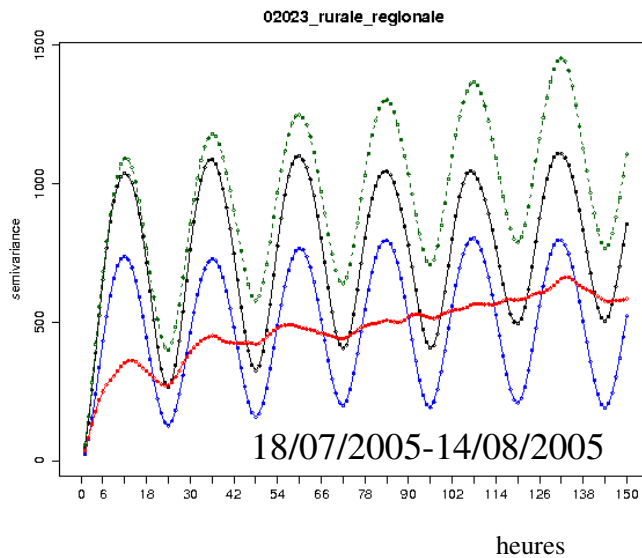
Temporal variogram at each measurement station



⇒ CHIMERE and observation variogram are analogous

but presence of temporal correlation between CHIMERE and innovations.

Temporal Variogram per measurement station



— Observations
— CHIMERE
— Innovations
- - - CHIMERE+Innovations (somme des variog.)

⇒ CHIMERE reproduces well

the periodic component

and attenuates

the large range component

the large range component

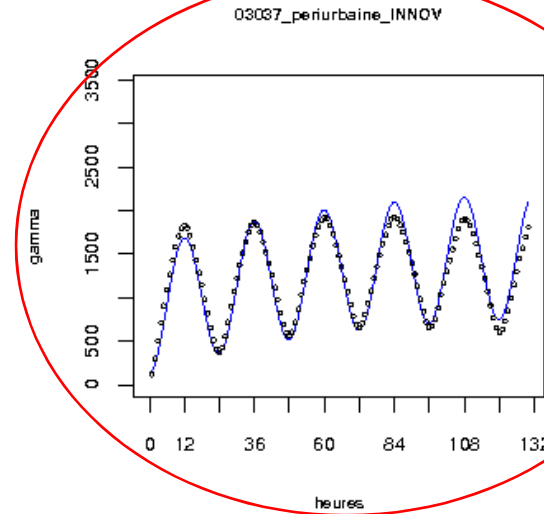
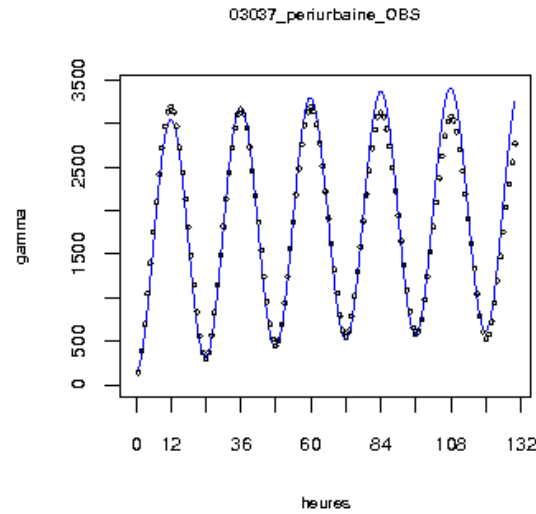
the periodic component

⇒ temporal correlation between S CHIMERE and innovations Z-S

Automatic fitting of temporal variograms

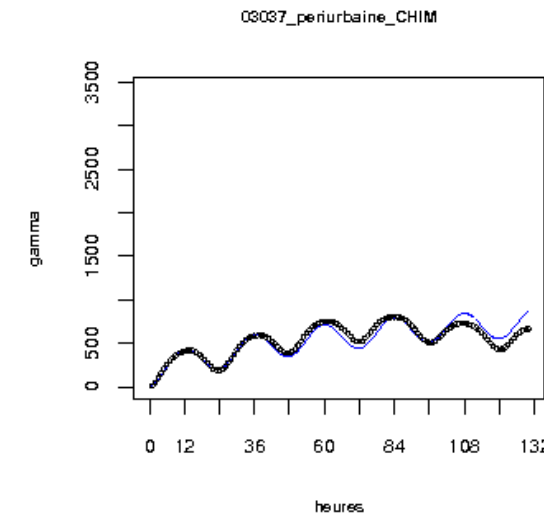
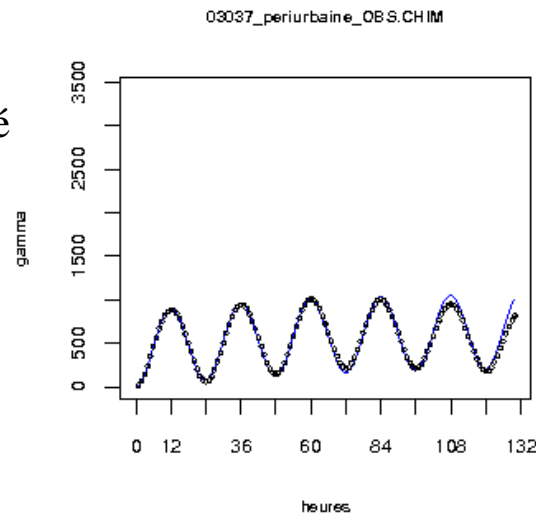
temporal variogram per station $\rightarrow w_1(xi), w_2(xi), r_1(xi), r_2(xi)$

Observations



Control on Innovations

Croisé



CHIMERE

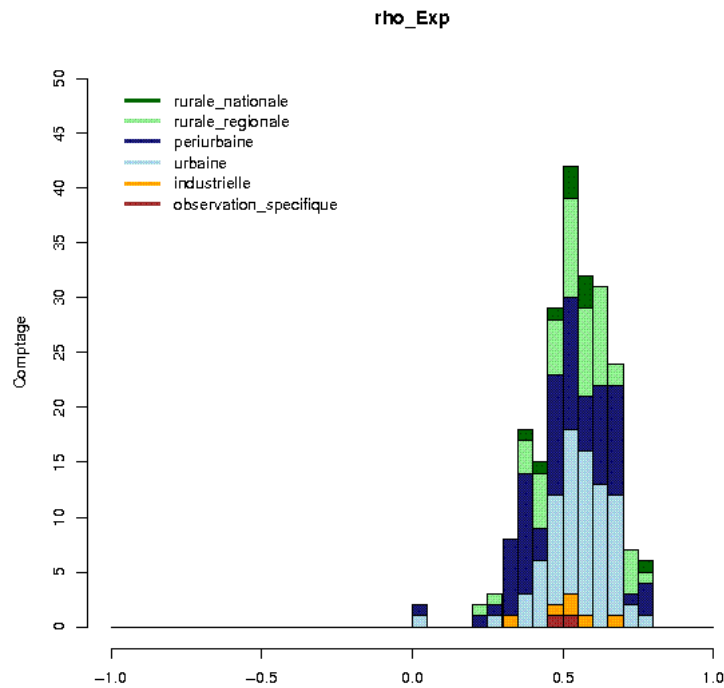
--- Vario. exp.
— Vario. mod.

2006, un mois d'été (18/07/06-14/08/06)

Analysis of model coefficients : correlation r

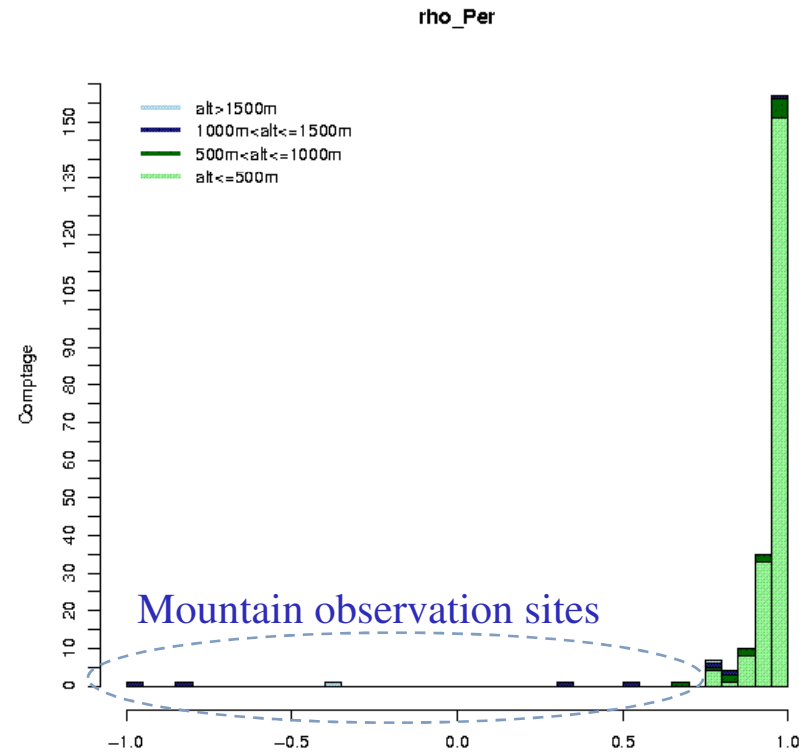
Large range Component

coefficient $r_1(x_i)$ fitted per station



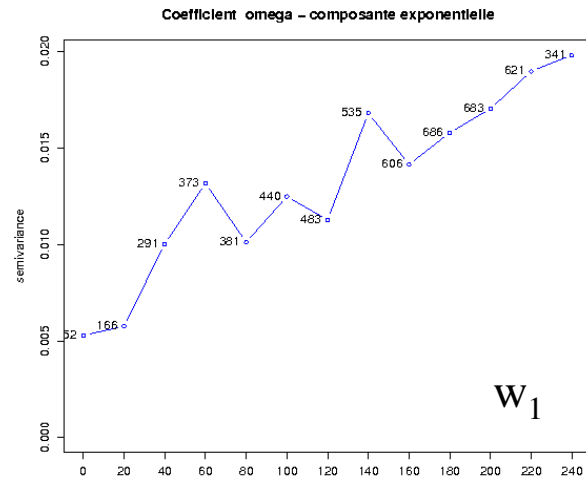
Periodic Component

coefficient $r_2(x_i)$ fitted par station

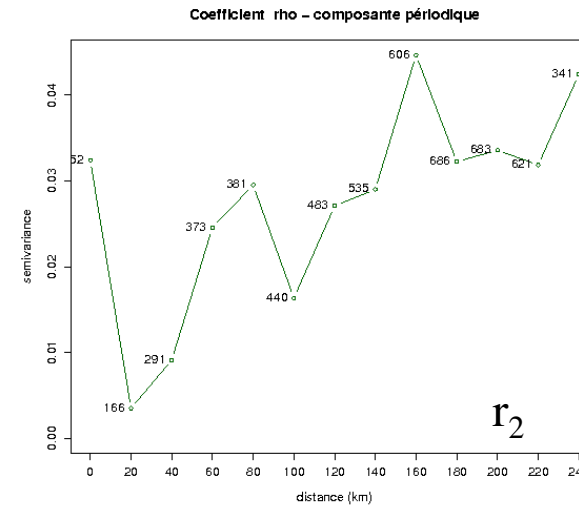
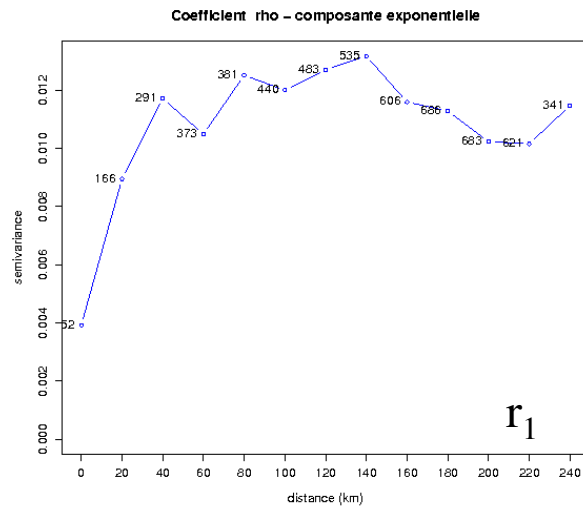
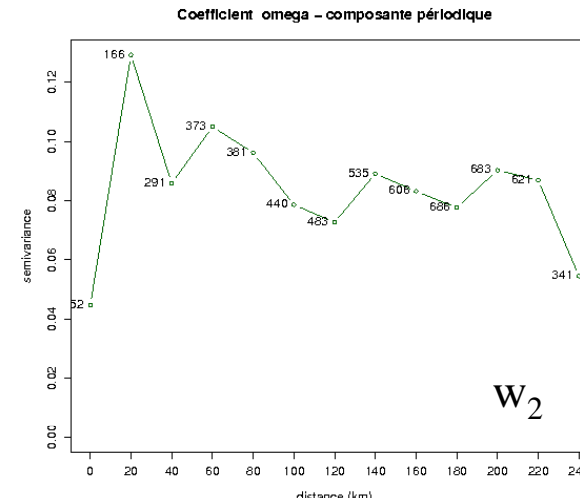


Spatial Variograms of coefficients w_1, w_2, r_1, r_2

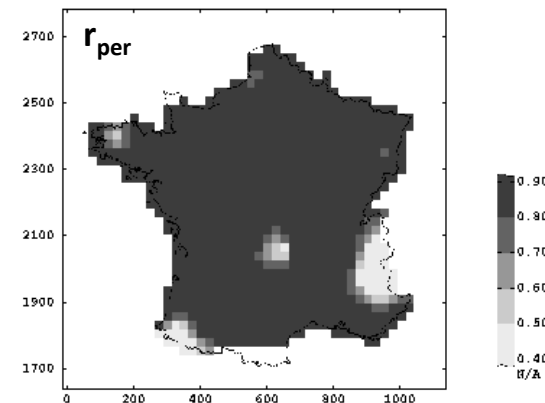
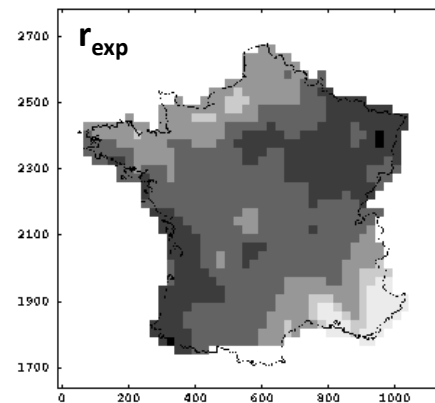
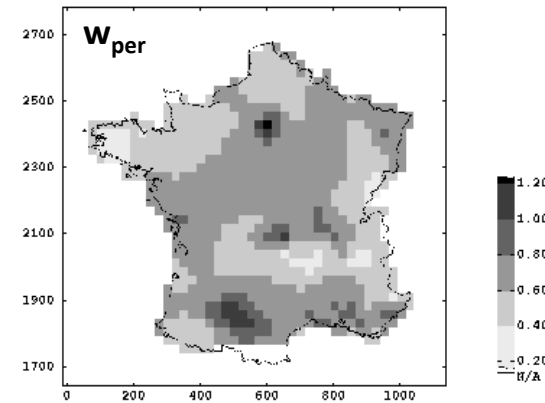
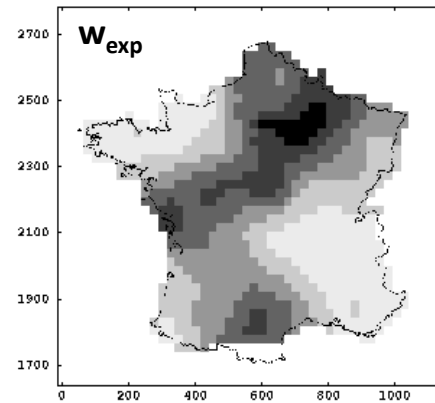
Large range component



Periodic component



Kriging map of coefficients



3. Modélisation non stationnaire : FAI-k

- Combinaison linéaire autorisée d'ordre k

mesure $\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i \delta_{x_i}$ t.q. pour tout polynôme P de degré $\leq k$,

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^m \lambda_i P(x_i) = 0$$

- **Def 1** : la FA Z est une FAI-k si $Z_\lambda(x) = \sum_i \lambda_i Z(x_i + x)$ est stationnaire d'ordre 2
 - $E[Z_\lambda(x)] = 0$
 - $E[Z_\lambda(x)Z_\lambda(y)] = K_\lambda(y-x)$ covariance généralisée

Exemple : Y FASt $m=0$,

$$Z_0(x) = \int_0^x Y(t) dt \quad \text{est une FAI-0}$$

$$Z_{k+1}(x) = \int_0^x Z_k(t) dt \quad \text{est une FAI-k}$$

Modélisation non stationnaire : FAI-k

- Déf 2 : classe d'équivalence, à un polynôme aléatoire de degré k près

$$Z(x) + \sum_{|\ell| \leq k} A_\ell x^\ell, \quad A_\ell \text{ variables aléatoires}$$

Propriétés « intrinsèques » à la classe d'équivalence

- FAI-k continue = FAI-k indéfiniment différentiable + FA stationnaire

Plus général que FA stationnaire + dérive polynomiale

- Covariance généralisée : définie à un polynôme pair près, de degré $\leq 2k$

relation nécessaire : $|K(0) - K(h)| \leq a + b |h|^{2k+2}$ ($a, b \geq 0$)

- FAI-0 : $K(h) : C_0 \delta(h), -\gamma(h) + c$

- FAI-k : $K(h) : (-1)^{\lfloor 1+\alpha/2 \rfloor} |h|^\alpha, (-1)^{k+1} |h|^{2k} \log(|h|)$, polynomiales (degré $\leq 2k+1$)

à 2D : le krigeage avec covariance $C_0 \delta(h) + |h|^2 \log(|h|)$ est équivalent à spline de lissage

Inférence des Covariances généralisées

- Indirecte : degré puis covariance (Delfiner, 1976)
 - régression, par anneaux concentriques : classement du degré selon les erreurs
 - comparaison d'écartés quadratiques à la variance pour des combinaisons de covariances généralisées, avec calage des coefficients
- validation croisée
- Importance du voisinage

Krigeage en FAI-k

Analogue au krigeage universel,
mais avec la classe des covariances généralisées

$$Z^*(x) = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} Z_{\alpha} \quad \text{où } Z(x) - Z^*(x) \text{ est une CLA}$$

$$\text{Conditions : } \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} f_{\alpha}^{\ell} - f^{\ell}(x) = 0 \text{ pour } \ell = 0, \dots, k$$

$$\text{D'où krigeage en FAI-k : } \begin{bmatrix} K & F \\ F^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x \\ f_x \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } K_x = [K(x_{\alpha} - x)]^t, \lambda = [\lambda_{\alpha}]^t, f_x = \begin{bmatrix} 1 \\ f^1(x) \\ \dots \\ f^k(x) \end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \dots \\ \mu_k \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & f_1^1 & f_1^k \\ 1 & f_2^1 & f_2^k \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & f_N^1 & f_N^k \end{bmatrix}$$

FAI-k et dérivation

- **L'équation $Z'=Y$**
- Soit Y une FASt. Il existe une FAI-0 Z unique, solution de $Z'=Y$.
Son variogramme vérifie $\gamma_Z''(h) = C_Y(h)$
- Soit Y une FAI-k. Il existe une FAI-(k+1) Z unique, solution de $Z'=Y$.
Relation entre covariances généralisées : $C_Z''(h) = -C_Y(h)$

- **L'équation de Poisson $\Delta Z = Y$**

Matheron, 1971 :

- Soit Y une FASt. Il existe une FAI-1 Z unique, solution de $\Delta Z = Y$
- Soit Y une FAI-k. Il existe une FAI-(k-1) Z unique, solution de $\Delta Z = Y$

Relation entre covariances généralisées :

$$C_{\Delta Z} = \Delta^2 C_Z \text{ d'où } \Delta^2 C_Z = C_Y$$

Cokrigage et dérivation

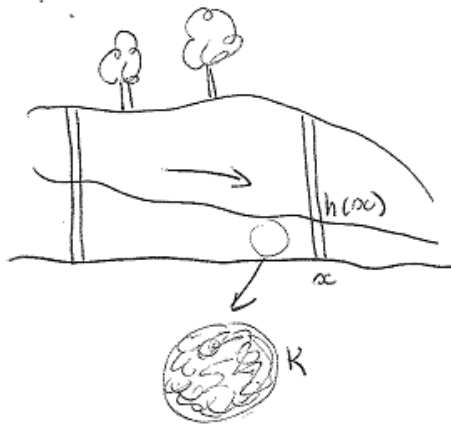
A condition d'utiliser

- un modèle de covariances simples et croisées cohérent avec les relations différentielles ;
- les mêmes données pour l'estimation de Z et de ses dérivées , les relations différentielles sont vérifiées sur les estimations par cokrigage de Z et de ses dérivées partielles.

$$\text{Par exemple : } (\Delta Z)^* = \Delta(Z^*)$$

Avantage : l'estimation de la dérivée ne dépend pas du choix d'une maille, contrairement aux différences finies

Exemple : équation de diffusivité



- A 2D, en régime permanent et en l'absence de recharge
- loi de Darcy et conservation de la masse
→ équation de diffusivité : $\text{div} (T \cdot \text{Grad } H) = 0$
- T transmissivité
- H charge hydraulique

Solution au 1^{er} ordre de l'équation $div (T. Grad H)=0$

- Gradient de charge macroscopique constant J , suivant Ox_1
- Transmissivité T scalaire

- **Milieu uniforme**

$$T=T_0 \rightarrow h(x_1, x_2) = h_0 - Jx_1 \text{ avec } x=(x_1, x_2)$$

- **Milieu perturbé**

Perturbation de la transmissivité

$$T(x_1, x_2) = T_0 e^{\Theta}$$

Perturbation de la charge

$$H(x_1, x_2) = h(x_1) + \Phi(x_1, x_2)$$

Au 1^{er} ordre :

$$\Delta \Phi = J \partial \Theta / \partial x_1$$

La transmissivité généralement non différentiable (A. Dong, 1990) :

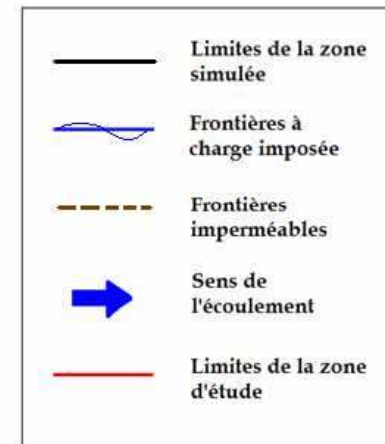
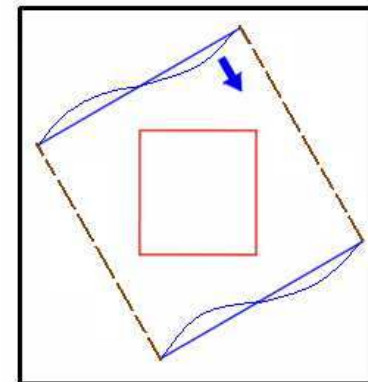
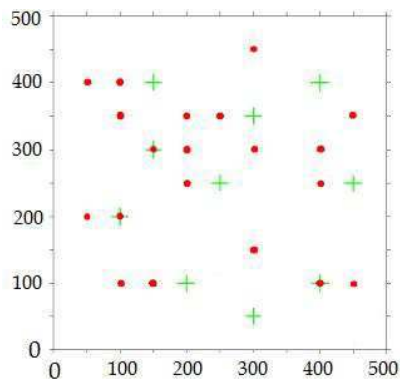
$$J\Theta = \Delta Z \text{ et } \Phi = \partial Z / \partial x_1$$

Relations entre perturbations $J\Theta = \Delta Z$ et $\Phi = \partial Z / \partial x_1$

- $J\Theta = \Delta Z$: si Θ stationnaire, Z est FAI-1 deux fois différentiable
- $\Phi = \partial Z / \partial x_1$: si Z FAI-1, alors Φ est FAI-0 différentiable et anisotrope
- Relations entre covariances (généralisées) directes et croisées
$$J^2 C_\Theta = \Delta^2 C_Z ; C_\Phi = -\frac{\partial}{\partial h_1^2} C_Z \text{ et } J C_{\Theta\Phi} = \Delta \frac{\partial}{\partial h_1} C_Z$$
- Co-krigeage des perturbations de la charge à partir de celles de charge et de transmissivité.
 - conditions aux limites sur la charge imposées seulement là où elles sont bien connues
 - possibilité de croiser les directions d'écoulement
 - Inconvénient : simplification de l'écoulement

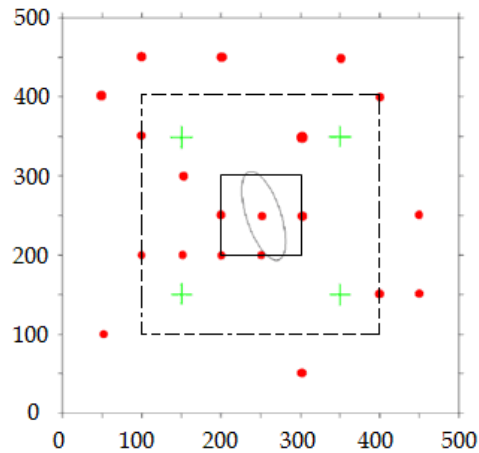
Croisement d'écoulements (J. Nos, 2007)

- Simulation d'un champ de transmissivité
- Deux écoulements de directions différentes
- Données de charge ● et de transmissivité +
- Estimation de la transmissivité

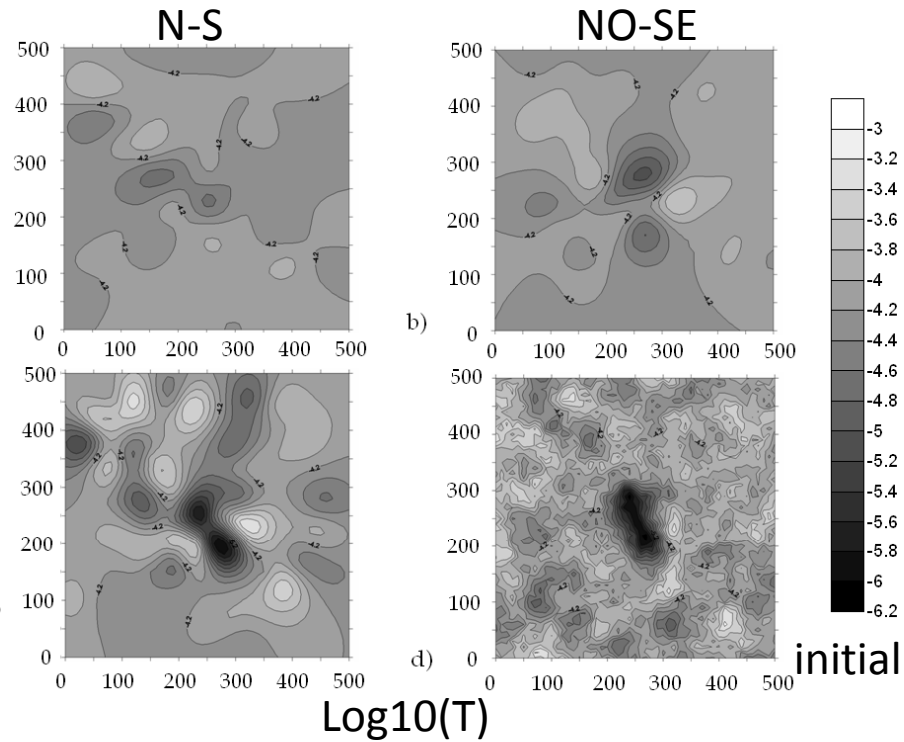


		Ecart	Ecart Std
Krigage		0,238	0,760
Cokrigage à 1 écoulement	Nord-Sud	0,223	0,760
	NO-SE	0,220	0,754
	Ouest-Est	0,223	0,766
Cokrigage à 2 écoulements	N-S/NO-SE	0,218	0,805
	N-S/O-E	0,214	0,790
	NO-SE/O-E	0,218	0,804

Hétérogénéité du champ de transmissivité



1 écoulement



2 écoulements

Estimation dans la zone centrale

		Ecart	Ecart Std
Krigage		0,916	2,667
Cokrigage à 1 écoulement	Nord-Sud	0,703	2,434
	NO-SE	0,612	2,184
	Ouest-Est	0,365	1,280
Cokrigage à 2 écoulements	N-S/NO-SE	0,347	1,486
	N-S/O-E	0,305	1,296
	NO-SE/O-E	0,326	1,393

En guise de conclusion

- Pas seulement « géo » , plus probabiliste que « statistique »
- Intérêt de l'analyse variographique
anisotropies, combinaison de covariances élémentaires
- Nombreuses variantes du krigeage
 - Potentiel pour des interfaces sans croisement
 - Krigeage bayésien
 - Topologie non euclidienne (réseaux hydrographiques, déformation d'espace)
 - Choix du voisinage (cf. Rivoirard, 1984)
 - Effet de pépite : données incertaines
 - Données sous forme d'intervalle
- Liens avec « computer experiments » ?

Références bibliographiques

- Matheron G. 1965. Les variables régionalisées et leur estimation. Masson et C^{ie}, Paris.
- Matheron G. 1970. La théorie des variables régionalisées, et ses applications. *Les Cahiers du CMM, fasc. 5*, Ecole des Mines de Paris.
- Matheron G. 1973. The intrinsic random functions and their applications. *Advances in Applied probability*, 5, 439-468.
- Rivoirard, J. 1994. Introduction to disjunctive kriging and non-linear geostatistics. Oxford university press.
- Aug Ch. 2004. Modélisation géologique 3D et caractérisation des incertitudes par la méthode du champ de potentiel. Thèse de doctorat. Ecole des mines de Paris & BRGM.
- **Chilès J.-P., Delfiner P. Geostatistics. Modeling Spatial Uncertainty. 2nd edition. Wiley, 2012.**
- **“Bibliothèque” de “géostatistique” “en ligne”**