

Apport de la géométrie aux statistiques de formes complexes: l'exemple des déformations par difféomorphisme

Etics 2025 - Évian les bains | 10 octobre 2025

Gwenaël SALIN, Paul LARTAUD
CEA, DAM, DIF, F-91297, Arpajon, France
gwenael.salin@cea.fr, paul.lartaud@cea.fr



Organisation de la présentation

- **Motivation** : problème inverse en grande dimension
 - Inversion déterministe et/ou probabiliste
 - Choix d'une distance
 - Exemples d'objet
- **Distance par déformation** : cadre géométrique
 - Action de groupe de déformation sur l'espace ambiant, sur des objets
 - Distance sur le groupe : groupe de Lie \ni distance sur les objets
 - Le problème d'appariement
- **Construction du groupe** : Choix de difféomorphisme
 - Difféomorphisme : flot associé à un champ de vecteur
 - Espace de champs de vecteurs : RKHS (régularité)
 - Le groupe de Lie de déformations par difféomorphisme
- **Déformation des mesures**
 - Définition du problème d'appariement
 - Condition d'optimalité
 - Algorithme de résolution
- **Déformation d'autres objets** : Courants, varifolds, Images
- **Exemples** : Courbes (problème inverse), Images
- **Extensions et perspectives**



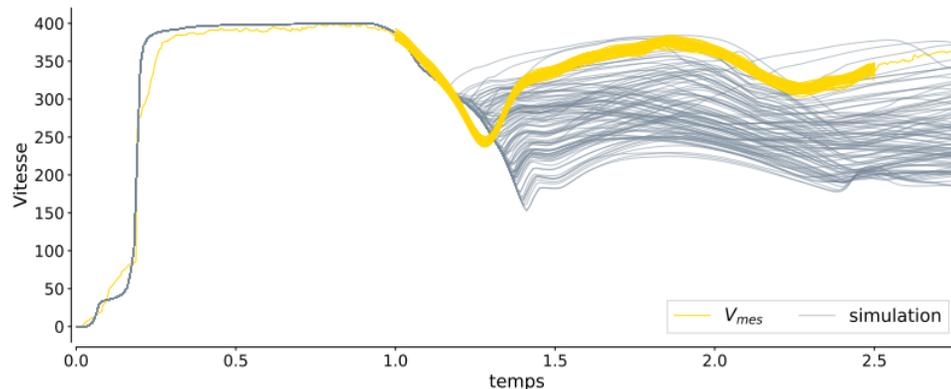
1 .

CONTEXTE : PROBLÈME INVERSE EN GRANDE DIMENSION

- Inversion déterministe et/ou probabiliste
- Choix d'une distance
- Exemples d'objet

Contexte : statistique sur des objets de dimension infinie

Profils de vitesse issus des simulations V_{sim} et d'expériences V_{mes}

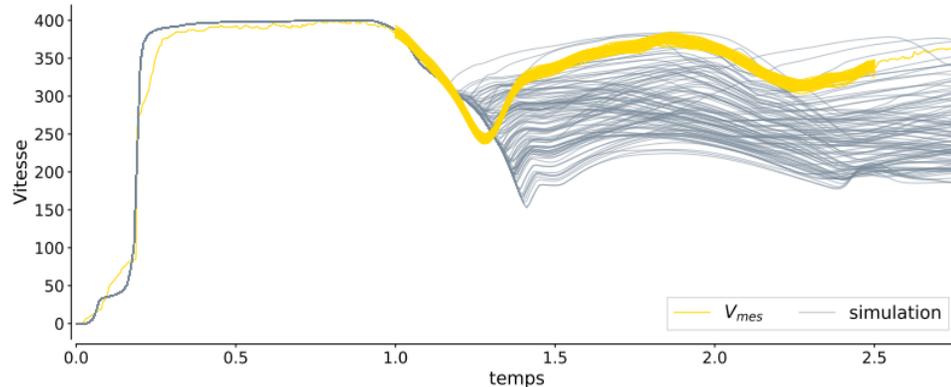


- Profil (discrétisé) sur un domaine :

$$Y = (V(t_1), V(t_2), \dots, V(t_{n_t})) \in \mathbb{R}^{n_t}$$

Contexte : statistique sur des objets de dimension infinie

Profils de vitesse issus des simulations V_{sim} et d'expériences V_{mes}



■ Profil (discrétisé) sur un domaine :

$$Y = (V(t_1), V(t_2), \dots, V(t_{n_t})) \in \mathbb{R}^{n_t}$$

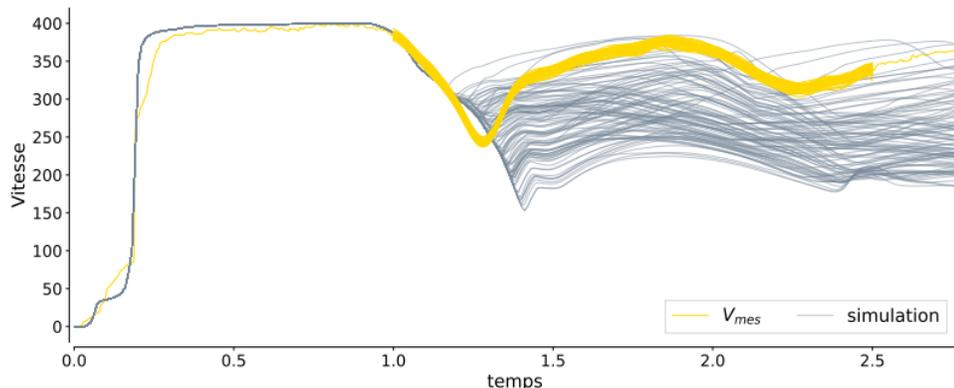
Exemple de problème inverse fonctionnel : (même domaine)

- **Résolution déterministe** : Cas moindres carrés : $d(V_{\text{mes}}, V_{\text{sim}}) = \|V_{\text{mes}}(t) - V_{\text{sim}}(t)\|_{L^2}^2$
- **Résolution probabiliste** : $V_{\text{mes}}(t) = V_{\text{sim}}(t, \beta) + \varepsilon(t)$, où $\varepsilon \sim \mathcal{PG}(0, k)$

Ce modèle probabiliste "généralise" le problème déterministe L^2

Contexte : statistique sur des objets de dimension infinie

Profils de vitesse issus des simulations V_{sim} et d'expériences V_{mes}



■ Profil (discrétisé) sur un domaine :

$$Y = (V(t_1), V(t_2), \dots, V(t_{n_t})) \in \mathbb{R}^{n_t}$$

Exemple de problème inverse fonctionnel : (même domaine)

- **Résolution déterministe** : Cas moindres carrés : $d(V_{\text{mes}}, V_{\text{sim}}) = \|V_{\text{mes}}(t) - V_{\text{sim}}(t)\|_{L^2}^2$
- **Résolution probabiliste** : $V_{\text{mes}}(t) = V_{\text{sim}}(t, \beta) + \varepsilon(t)$, où $\varepsilon \sim \mathcal{PG}(0, k)$

Ce modèle probabiliste "généralise" le problème déterministe L^2

Autres comparaisons possibles ?

- **Résolution déterministe** : Autre distance
- **Résolution probabiliste** : ?

Comparaison d'objets - Choix d'une distance

On note a et b fonctions du temps :



Comparaison d'objets - Choix d'une distance

On note a et b fonctions du temps :

Distance Sobolev : [Brezis, 1983] $d^P(a, b) = \sum_{k=1}^P \int_{\mathbb{R}} (a^{(k)}(x) - b^{(k)}(x))^2 dx.$



Comparaison d'objets - Choix d'une distance

On note a et b fonctions du temps :

Distance Sobolev : [Brezis, 1983] $d^P(a, b) = \sum_{k=1}^P \int_{\mathbb{R}} (a^{(k)}(x) - b^{(k)}(x))^2 dx.$

Distances par immersion/Distribution : [Sriperumbudur *et al.*, 2010, Gretton *et al.*, 2012]

- Immersion dans le dual (topologique) de \mathcal{F} : $K_a : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}; f \mapsto K_a(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)a(t)dt$
- Norme opérateur $\|K_a\|_{\mathcal{F}^*} = \sup_{\|f\|_{\mathcal{F}} \leq 1} |K_a(f)|$
- Distance : $\gamma_{\mathcal{F}}(a, b) = \|K_a - K_b\|_{\mathcal{F}^*},$

Comparaison d'objets - Choix d'une distance

On note a et b fonctions du temps :

Distance Sobolev : [Brezis, 1983] $d^P(a, b) = \sum_{k=1}^P \int_{\mathbb{R}} (a^{(k)}(x) - b^{(k)}(x))^2 dx.$

Distances par immersion/Distribution : [Sriperumbudur *et al.*, 2010, Gretton *et al.*, 2012]

- Immersion dans le dual (topologique) de \mathcal{F} : $K_a : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}; f \mapsto K_a(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)a(t)dt$
- Norme opérateur $\|K_a\|_{\mathcal{F}^*} = \sup_{\|f\|_{\mathcal{F}} \leq 1} |K_a(f)|$
- Distance : $\gamma_{\mathcal{F}}(a, b) = \|K_a - K_b\|_{\mathcal{F}^*}$,
- Si \mathcal{F} est l'espace des fonctions bornées lipschitz, alors $\gamma_{\mathcal{F}}(V_a, V_b) = \int_{\mathbb{R}} |F_a(t) - F_b(t)| dt$,
où $F_a(t) = \int_{-\infty}^t a(s) ds$ est la fonction de répartition de a (distance \mathcal{W}_1)

Comparaison d'objets - Choix d'une distance

On note a et b fonctions du temps :

Distance Sobolev : [Brezis, 1983] $d^P(a, b) = \sum_{k=1}^P \int_{\mathbb{R}} (a^{(k)}(x) - b^{(k)}(x))^2 dx.$

Distances par immersion/Distribution : [Sriperumbudur *et al.*, 2010, Gretton *et al.*, 2012]

- Immersion dans le dual (topologique) de \mathcal{F} : $K_a : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}; f \mapsto K_a(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)a(t)dt$
- Norme opérateur $\|K_a\|_{\mathcal{F}^*} = \sup_{\|f\|_{\mathcal{F}} \leq 1} |K_a(f)|$
- Distance : $\gamma_{\mathcal{F}}(a, b) = \|K_a - K_b\|_{\mathcal{F}^*}$,
- Si \mathcal{F} est l'espace des fonctions bornées lipschitz, alors $\gamma_{\mathcal{F}}(V_a, V_b) = \int_{\mathbb{R}} |F_a(t) - F_b(t)| dt$, où $F_a(t) = \int_{-\infty}^t a(s) ds$ est la fonction de répartition de a (distance \mathcal{W}_1)
- Si \mathcal{F} est un RKHS de noyau k et si $\mu_a = \int_{\mathbb{R}} k(t, \cdot) a(t) dt \in \mathcal{F}$, puisque dans ce cas $K_a(f) = \langle \mu_a, f \rangle_{\mathcal{F}}$, on a

$$\gamma_{\mathcal{F}}(a, b) = \|\mu_a - \mu_b\|_{\mathcal{F}}$$

e.g. si $k(t, s) = ts$ alors $\gamma_{\mathcal{F}}(a, b) = |\bar{a} - \bar{b}|$, où $\bar{a} = \int ta(t)dt$

Remarque : choix d'un k caractéristique, $a \mapsto \mu_a$ injective : $\gamma_{\mathcal{F}}(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b.$

Comparaison d'objets - Choix d'une distance

On note a et b fonctions du temps :

Distance Sobolev : [Brezis, 1983] $d^p(a, b) = \sum_{k=1}^p \int_{\mathbb{R}} (a^{(k)}(x) - b^{(k)}(x))^2 dx.$

Distances par immersion/Distribution : [Sriperumbudur et al., 2010, Gretton et al., 2012]

- Immersion dans le dual (topologique) de \mathcal{F} : $K_a : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}; f \mapsto K_a(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)a(t)dt$
- Norme opérateur $\|K_a\|_{\mathcal{F}^*} = \sup_{\|f\|_{\mathcal{F}} \leq 1} |K_a(f)|$
- Distance : $\gamma_{\mathcal{F}}(a, b) = \|K_a - K_b\|_{\mathcal{F}^*}$,
- Si \mathcal{F} est l'espace des fonctions bornées lipschitz, alors $\gamma_{\mathcal{F}}(V_a, V_b) = \int_{\mathbb{R}} |F_a(t) - F_b(t)|dt$, où $F_a(t) = \int_{-\infty}^t a(s)ds$ est la fonction de répartition de a (distance \mathcal{W}_1)
- Si \mathcal{F} est un RKHS de noyau k et si $\mu_a = \int_{\mathbb{R}} k(t, \cdot)a(t)dt \in \mathcal{F}$, puisque dans ce cas $K_a(f) = \langle \mu_a, f \rangle_{\mathcal{F}}$, on a

$$\gamma_{\mathcal{F}}(a, b) = \|\mu_a - \mu_b\|_{\mathcal{F}}$$

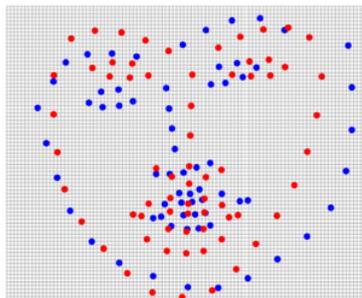
e.g. si $k(t, s) = ts$ alors $\gamma_{\mathcal{F}}(a, b) = |\bar{a} - \bar{b}|$, où $\bar{a} = \int ta(t)dt$

Remarque : choix d'un k caractéristique, $a \mapsto \mu_a$ injective : $\gamma_{\mathcal{F}}(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b.$

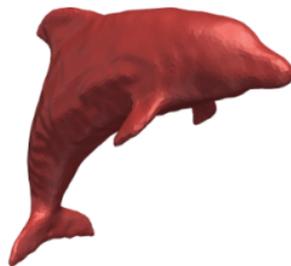
Distances liées aux déformations de l'espace

Galleries de formes

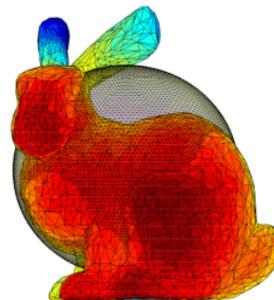
Quelques exemples : issus de [N. Charon, 2013, I. Kaltenmark, B. Charlier et N. Charon 2017]



points dans \mathbb{R}^2



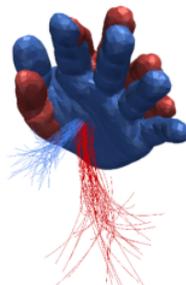
surface dans \mathbb{R}^3



maillage dans \mathbb{R}^3



traits dans \mathbb{R}^2

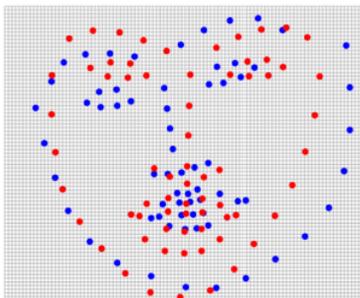


surface et fibre dans \mathbb{R}^3

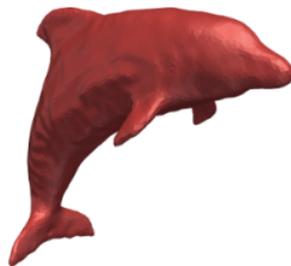
ceci n'est pas un carré vide

Galleries de formes

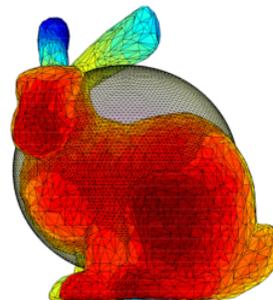
Quelques exemples : issus de [N. Charon, 2013, I. Kaltenmark, B. Charlier et N. Charon 2017]



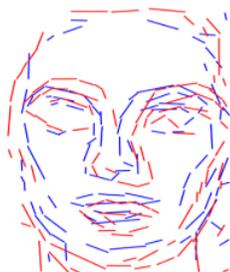
points dans \mathbb{R}^2



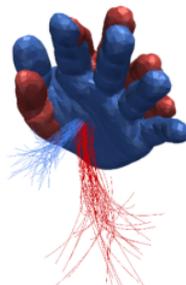
surface dans \mathbb{R}^3



maillage dans \mathbb{R}^3



traits dans \mathbb{R}^2



surface et fibre dans \mathbb{R}^3



ceci n'est pas un carré vide

2.

DISTANCE PAR DÉFORMATION : CADRE GÉOMETRIQUE

- Action de groupe de déformation sur l'espace ambiant, sur des objets
- Distance sur le groupe (groupe de Lie) et distance sur les objets
- Le problème d'appariement

Déformations : cadre général



Déformations d'objets : plongés dans l'espace ambiant $E = \mathbb{R}^d$

- Objets/Formes : $S \subset E$, e.g. points, courbes, formes.
- Espace des formes : $\mathcal{S} = \{S\} \subset \mathcal{P}(E)$

Déformations : cadre général

Déformations d'objets : plongés dans l'espace ambiant $E = \mathbb{R}^d$

- Objets/Formes : $S \subset E$, e.g. points, courbes, formes.
- Espace des formes : $\mathcal{S} = \{S\} \subset \mathcal{P}(E)$

Cadre géométrique : Soit $G = \{g : E \rightarrow E \mid g \text{ satisfait des pptés}\}$

- G a naturellement une structure de groupe, pour tout $x \in E$
 - Neutre : $\text{Id}(x) = x$
 - Composition $g \circ g'(x) = g(g'(x))$
 - Inverse : $g^{-1} \circ g(x) = x$



Déformations : cadre général

Déformations d'objets : plongés dans l'espace ambiant $E = \mathbb{R}^d$

- Objets/Formes : $S \subset E$, e.g. points, courbes, formes.
- Espace des formes : $\mathcal{S} = \{S\} \subset \mathcal{P}(E)$

Cadre géométrique : Soit $G = \{g : E \rightarrow E \mid g \text{ satisfait des pptés}\}$

- G a naturellement une structure de groupe, pour tout $x \in E$
 - Neutre : $\text{Id}(x) = x$
 - Composition $g \circ g'(x) = g(g'(x))$
 - Inverse : $g^{-1} \circ g(x) = x$

Action de G sur E , soit l'application $\cdot : \begin{cases} G \times E & \rightarrow E \\ (g, x) & \mapsto g \cdot x = g(x) \end{cases}$

Déformations : cadre général

Déformations d'objets : plongés dans l'espace ambiant $E = \mathbb{R}^d$

- Objets/Formes : $S \subset E$, e.g. points, courbes, formes.
- Espace des formes : $\mathcal{S} = \{S\} \subset \mathcal{P}(E)$

Cadre géométrique : Soit $G = \{g : E \rightarrow E \mid g \text{ satisfait des pptés}\}$

- G a naturellement une structure de groupe, pour tout $x \in E$
 - Neutre : $\text{Id}(x) = x$
 - Composition $g \circ g'(x) = g(g'(x))$
 - Inverse : $g^{-1} \circ g(x) = x$

Action de G sur E , soit l'application $\cdot : \begin{cases} G \times E & \rightarrow E \\ (g, x) & \mapsto g \cdot x = g(x) \end{cases}$

Exemples de déformations :

- Rigides (linéaires) : les similitudes
- Déformations non linéaires : les difféomorphismes



Déformations : distance sur les transformations

Action sur des objets définis sur E



Déformations : distance sur les transformations

Action sur des objets définis sur E

- Sur $S \subset E : g \cdot S = g(S) \triangleq \{y = g(x) | x \in S\}$ (points, courbes, surfaces).



Déformations : distance sur les transformations

Action sur des objets définis sur E

- Sur $S \subset E : g \cdot S = g(S) \triangleq \{y = g(x) | x \in S\}$ (points, courbes, surfaces).
- Sur $\mu \in \mathcal{M}_s(E) : g \cdot \mu = g_{\#}\mu$ (*mesure image, push forward*)
 - Si $\mu = \sum_i a_i \delta_{x_i}$ alors $g \cdot \mu = \sum_i a_i \delta_{g(x_i)}$
 - Si $\mu(x) = f(x)dx$ alors $g \cdot \mu(x) = f \circ h(x) \det(\nabla h(x))dx$, où $h \circ g = \text{Id}$.



Déformations : distance sur les transformations



Action sur des objets définis sur E

- Sur $S \subset E : g \cdot S = g(S) \triangleq \{y = g(x) | x \in S\}$ (points, courbes, surfaces).
- Sur $\mu \in \mathcal{M}_s(E) : g \cdot \mu = g_{\#}\mu$ (mesure image, push forward)
 - Si $\mu = \sum_i a_i \delta_{x_i}$ alors $g \cdot \mu = \sum_i a_i \delta_{g(x_i)}$
 - Si $\mu(x) = f(x)dx$ alors $g \cdot \mu(x) = f \circ h(x) \det(\nabla h(x))dx$, où $h \circ g = \text{Id}$.
- Sur $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R}^p)$ (e.g. images), on pose $g \cdot f(x) = f \circ g^{-1}(x)$.



Déformations : distance sur les transformations



Action sur des objets définis sur E

- Sur $S \subset E : g \cdot S = g(S) \triangleq \{y = g(x) | x \in S\}$ (points, courbes, surfaces).
- Sur $\mu \in \mathcal{M}_s(E) : g \cdot \mu = g_{\#}\mu$ (mesure image, push forward)
 - Si $\mu = \sum_i a_i \delta_{x_i}$ alors $g \cdot \mu = \sum_i a_i \delta_{g(x_i)}$
 - Si $\mu(x) = f(x)dx$ alors $g \cdot \mu(x) = f \circ h(x) \det(\nabla h(x))dx$, où $h \circ g = \text{Id}$.
- Sur $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R}^p)$ (e.g. images), on pose $g \cdot f(x) = f \circ g^{-1}(x)$.
- Sur les courants, les varifolds, etc.



Déformations : distance sur les transformations

Action sur des objets définis sur E

- Sur $S \subset E : g \cdot S = g(S) \triangleq \{y = g(x) | x \in S\}$ (points, courbes, surfaces).
- Sur $\mu \in \mathcal{M}_s(E) : g \cdot \mu = g_{\#}\mu$ (*mesure image, push forward*)
 - Si $\mu = \sum_i a_i \delta_{x_i}$ alors $g \cdot \mu = \sum_i a_i \delta_{g(x_i)}$
 - Si $\mu(x) = f(x)dx$ alors $g \cdot \mu(x) = f \circ h(x) \det(\nabla h(x))dx$, où $h \circ g = \text{Id}$.
- Sur $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R}^p)$ (e.g. images), on pose $g \cdot f(x) = f \circ g^{-1}(x)$.
- Sur les courants, les varifolds, etc.

Distance sur l'espace des formes : Si G muni d'une distance d_G invariante à droite [A. Trouvé, 2009] alors

$$d(S, S_{\text{cible}}) = \inf_{g \in G} \{d_G(\text{Id}, g) \mid S_{\text{cible}} = g \cdot S\}$$

muni l'espace des formes S d'une distance : on veut aller là !

Autrement dit, la distance entre deux objets est la distance de la déformation reliant ces deux objets la plus proche de l'élément neutre \rightarrow Recherche de géodésique.



Déformations : distance sur les transformations

Action sur des objets définis sur E

- Sur $S \subset E : g \cdot S = g(S) \triangleq \{y = g(x) | x \in S\}$ (points, courbes, surfaces).
- Sur $\mu \in \mathcal{M}_s(E) : g \cdot \mu = g_{\#}\mu$ (*mesure image, push forward*)
 - Si $\mu = \sum_i a_i \delta_{x_i}$ alors $g \cdot \mu = \sum_i a_i \delta_{g(x_i)}$
 - Si $\mu(x) = f(x)dx$ alors $g \cdot \mu(x) = f \circ h(x) \det(\nabla h(x))dx$, où $h \circ g = \text{Id}$.
- Sur $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R}^p)$ (e.g. images), on pose $g \cdot f(x) = f \circ g^{-1}(x)$.
- Sur les courants, les varifolds, etc.

Distance sur l'espace des formes : Si G muni d'une distance d_G invariante à droite [A. Trouvé, 2009] alors

$$d(S, S_{\text{cible}}) = \inf_{g \in G} \{d_G(\text{Id}, g) \mid S_{\text{cible}} = g \cdot S\}$$

muni l'espace des formes S d'une distance : on veut aller là !

Autrement dit, la distance entre deux objets est la distance de la déformation reliant ces deux objets la plus proche de l'élément neutre \hookrightarrow Recherche de géodésique.

Là, il faut rentrer dans le délire, sinon ça va être long [A. Lomperet, 2025]



Déformations : Problème d'appariement

Selon leur nature, les objets sont notés f , S , μ .



Déformations : Problème d'appariement

Selon leur nature, les objets sont notés f, S, μ .

Problème d'appariement Déformation d'un objet S vers un objet cible S_{cible} :

- Appariement **exact** : On cherche $g \in G$ tel que $S_{\text{cible}} = g \cdot S$ (existence)
- Appariement approché : **terme d'attache** aux données $\mathcal{A}(g)$ mesure l'écart entre $g \cdot S$ et S_{cible}
où de plus $d_G(\text{Id}, g)$ est la plus petite possible \Rightarrow problème de minimisation avec contrainte.

Déformations : Problème d'appariement

Selon leur nature, les objets sont notés f, S, μ .

Problème d'appariement Déformation d'un objet S vers un objet cible S_{cible} :

- Appariement **exact** : On cherche $g \in G$ tel que $S_{\text{cible}} = g \cdot S$ (existence)
- Appariement approché : **terme d'attache** aux données $\mathcal{A}(g)$ mesure l'écart entre $g \cdot S$ et S_{cible} où de plus $d_G(\text{Id}, g)$ est la plus petite possible \Rightarrow problème de minimisation avec contrainte.

Déformer S pour obtenir S_{cible} devient : Minimiser sur G la fonctionnelle $J(g) = d_G(\text{Id}, g) + \lambda \mathcal{A}(g)$

Déformations : Problème d'appariement

Selon leur nature, les objets sont notés f, S, μ .

Problème d'appariement Déformation d'un objet S vers un objet cible S_{cible} :

- Appariement **exact** : On cherche $g \in G$ tel que $S_{\text{cible}} = g \cdot S$ (existence)
- Appariement approché : **terme d'attache** aux données $\mathcal{A}(g)$ mesure l'écart entre $g \cdot S$ et S_{cible} où de plus $d_G(\text{Id}, g)$ est la plus petite possible \ni problème de minimisation avec contrainte.

Déformer S pour obtenir S_{cible} devient : Minimiser sur G la fonctionnelle $J(g) = d_G(\text{Id}, g) + \lambda \mathcal{A}(g)$

Terme d'attache aux données

Déformations : Problème d'appariement

Selon leur nature, les objets sont notés f, S, μ .

Problème d'appariement Déformation d'un objet S vers un objet cible S_{cible} :

- Appariement **exact** : On cherche $g \in G$ tel que $S_{\text{cible}} = g \cdot S$ (existence)
- Appariement approché : **terme d'attache** aux données $\mathcal{A}(g)$ mesure l'écart entre $g \cdot S$ et S_{cible} où de plus $d_G(\text{Id}, g)$ est la plus petite possible \ni problème de minimisation avec contrainte.

Déformer S pour obtenir S_{cible} devient : Minimiser sur G la fonctionnelle $J(g) = d_G(\text{Id}, g) + \lambda \mathcal{A}(g)$

Terme d'attache aux données

- Cas $S \subset E$, attache L^2 (correspondance entre points nécessaire), :
 - Si $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ et $S_{\text{cible}} = \{y_1, \dots, y_k\}$ alors $\mathcal{A}(g) = \sum_{i=1}^k \|g(x_i) - y_i\|^2$
 - Si $S = \gamma(I)$ et $S_{\text{cible}} = \gamma_{\text{cible}}(I)$, où I pavé de \mathbb{R}^k , alors $\mathcal{A}(g) = \int_I \|g \circ \gamma(u) - \gamma_{\text{cible}}(u)\|^2 du$

Déformations : Problème d'appariement

Selon leur nature, les objets sont notés f, S, μ .

Problème d'appariement Déformation d'un objet S vers un objet cible S_{cible} :

- Appariement **exact** : On cherche $g \in G$ tel que $S_{\text{cible}} = g \cdot S$ (existence)
- Appariement approché : **terme d'attache** aux données $\mathcal{A}(g)$ mesure l'écart entre $g \cdot S$ et S_{cible} où de plus $d_G(\text{Id}, g)$ est la plus petite possible \ni problème de minimisation avec contrainte.

Déformer S pour obtenir S_{cible} devient : Minimiser sur G la fonctionnelle $J(g) = d_G(\text{Id}, g) + \lambda \mathcal{A}(g)$

Terme d'attache aux données

- Cas $S \subset E$, attache L^2 (correspondance entre points nécessaire), :
 - Si $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ et $S_{\text{cible}} = \{y_1, \dots, y_k\}$ alors $\mathcal{A}(g) = \sum_{i=1}^k \|g(x_i) - y_i\|^2$
 - Si $S = \gamma(I)$ et $S_{\text{cible}} = \gamma_{\text{cible}}(I)$, où I pavé de \mathbb{R}^k , alors $\mathcal{A}(g) = \int_I \|g \circ \gamma(u) - \gamma_{\text{cible}}(u)\|^2 du$
- Cas $\mu \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d)$
 - Immersion dans un RKHS H de noyau K : $\mathcal{A}(g) = \|(g \cdot \mu)^K - \mu_{\text{cible}}^K\|_K$, où $\mu^K = \int_E K(\cdot, x) d\mu(x) \in H$
 - Distance de Wasserstein : e.g. $\mathcal{A}(g) = W_2(g \cdot \mu, \mu_{\text{cible}})$

Déformations : Problème d'appariement

Selon leur nature, les objets sont notés f, S, μ .

Problème d'appariement Déformation d'un objet S vers un objet cible S_{cible} :

- Appariement **exact** : On cherche $g \in G$ tel que $S_{\text{cible}} = g \cdot S$ (existence)
- Appariement approché : **terme d'attache** aux données $\mathcal{A}(g)$ mesure l'écart entre $g \cdot S$ et S_{cible} où de plus $d_G(\text{Id}, g)$ est la plus petite possible \ni problème de minimisation avec contrainte.

Déformer S pour obtenir S_{cible} devient : Minimiser sur G la fonctionnelle $J(g) = d_G(\text{Id}, g) + \lambda \mathcal{A}(g)$

Terme d'attache aux données

- Cas $S \subset E$, attache L^2 (correspondance entre points nécessaire), :
 - Si $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ et $S_{\text{cible}} = \{y_1, \dots, y_k\}$ alors $\mathcal{A}(g) = \sum_{i=1}^k \|g(x_i) - y_i\|^2$
 - Si $S = \gamma(I)$ et $S_{\text{cible}} = \gamma_{\text{cible}}(I)$, où I pavé de \mathbb{R}^k , alors $\mathcal{A}(g) = \int_I \|g \circ \gamma(u) - \gamma_{\text{cible}}(u)\|^2 du$
- Cas $\mu \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d)$
 - Immersion dans un RKHS H de noyau K : $\mathcal{A}(g) = \|(g \cdot \mu)^K - \mu_{\text{cible}}^K\|_K$, où $\mu^K = \int_E K(\cdot, x) d\mu(x) \in H$
 - Distance de Wasserstein : e.g. $\mathcal{A}(g) = W_2(g \cdot \mu, \mu_{\text{cible}})$
- Les courants et les varifolds peuvent également être plongés dans un RKHS

Déformations : Problème d'appariement

Selon leur nature, les objets sont notés f, S, μ .

Problème d'appariement Déformation d'un objet S vers un objet cible S_{cible} :

- Appariement **exact** : On cherche $g \in G$ tel que $S_{\text{cible}} = g \cdot S$ (existence)
- Appariement approché : **terme d'attache** aux données $\mathcal{A}(g)$ mesure l'écart entre $g \cdot S$ et S_{cible} où de plus $d_G(\text{Id}, g)$ est la plus petite possible \ni problème de minimisation avec contrainte.

Déformer S pour obtenir S_{cible} devient : Minimiser sur G la fonctionnelle $J(g) = d_G(\text{Id}, g) + \lambda \mathcal{A}(g)$

Terme d'attache aux données

- Cas $S \subset E$, attache L^2 (correspondance entre points nécessaire), :
 - Si $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ et $S_{\text{cible}} = \{y_1, \dots, y_k\}$ alors $\mathcal{A}(g) = \sum_{i=1}^k \|g(x_i) - y_i\|^2$
 - Si $S = \gamma(I)$ et $S_{\text{cible}} = \gamma_{\text{cible}}(I)$, où I pavé de \mathbb{R}^k , alors $\mathcal{A}(g) = \int_I \|g \circ \gamma(u) - \gamma_{\text{cible}}(u)\|^2 du$
- Cas $\mu \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d)$
 - Immersion dans un RKHS H de noyau K : $\mathcal{A}(g) = \|(g \cdot \mu)^K - \mu_{\text{cible}}^K\|_K$, où $\mu^K = \int_E K(\cdot, x) d\mu(x) \in H$
 - Distance de Wasserstein : e.g. $\mathcal{A}(g) = W_2(g \cdot \mu, \mu_{\text{cible}})$
- Les courants et les varifolds peuvent également être plongés dans un RKHS

Choix du groupe de déformation G ?

3.

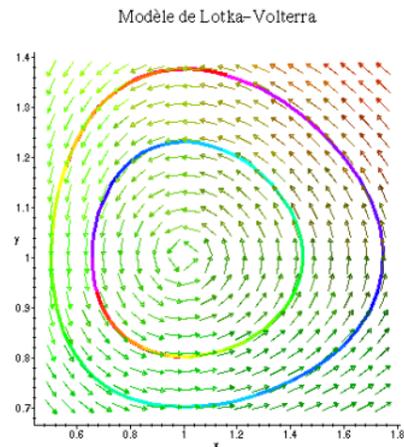
GRUPE DE DIFFEOMORPHISMES

- Flot associé à un champ de vecteur
- Espace de champs de vecteurs : RKHS (régularité)
- Le groupe de Lie de déformations par difféomorphisme

Flot associé à un champs de vecteurs

Champs de vecteurs dépendant du temps. On note

- Soit $v : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto v_t(x) \in \mathbb{R}^d$
- Soit $v : t \in \mathbb{R} \mapsto v_t \in V$ où V e.v. normé $\subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d\}$.



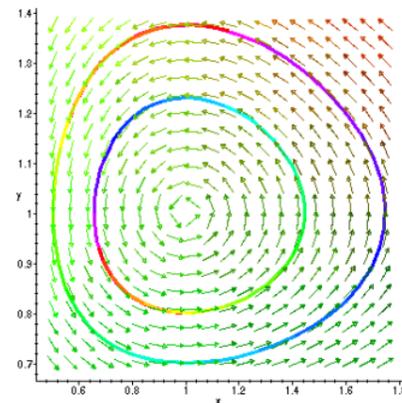
Flot associé à un champs de vecteurs

Champs de vecteurs dépendant du temps. On note

- Soit $v : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto v_t(x) \in \mathbb{R}^d$
- Soit $v : t \in \mathbb{R} \mapsto v_t \in V$ où V e.v. normé $\subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d\}$.
- Pour $x \in \mathbb{R}^d$, le flot $\phi_t(x)$ est solution du problème de Cauchy :

$$\phi_t(x) = x + \int_{\mathbb{R}} v_t \circ \phi_t(x) dt$$

Modèle de Lotka-Volterra



Flot associé à un champs de vecteurs

Champs de vecteurs dépendant du temps. On note

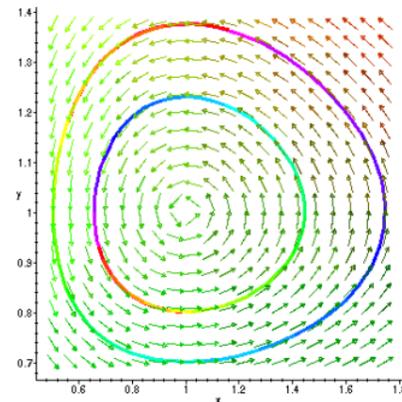
- Soit $v : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto v_t(x) \in \mathbb{R}^d$
- Soit $v : t \in \mathbb{R} \mapsto v_t \in V$ où V e.v. normé $\subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d\}$.
- Pour $x \in \mathbb{R}^d$, le flot $\phi_t(x)$ est solution du problème de Cauchy :

$$\phi_t(x) = x + \int_{\mathbb{R}} v_t \circ \phi_t(x) dt$$

Existence et unicité du flot : [W. Walter, 1998]

- si v continue en t lipschitz en x (Cauchy-Lipschitz).
- si v est $L^1(\mathbb{R})$ en t et lipschitz en x p.s. en t (Carathéodory).

Modèle de Lotka-Volterra



Flot associé à un champs de vecteurs

Champs de vecteurs dépendant du temps. On note

- Soit $v : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto v_t(x) \in \mathbb{R}^d$
- Soit $v : t \in \mathbb{R} \mapsto v_t \in V$ où V e.v. normé $\subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d\}$.
- Pour $x \in \mathbb{R}^d$, le flot $\phi_t(x)$ est solution du problème de Cauchy :

$$\phi_t(x) = x + \int_{\mathbb{R}} v_t \circ \phi_t(x) dt$$

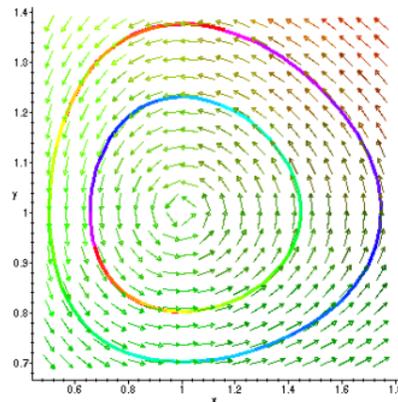
Existence et unicité du flot : [W. Walter, 1998]

- si v continue en t lipschitz en x (Cauchy-Lipschitz).
 - si v est $L^1(\mathbb{R})$ en t et lipschitz en x p.s. en t (Carathéodory).
- **Hypothèse supplémentaire** presque sûrement en t , $v_t \in V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$ et v tel que

$$\int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt < \infty \quad (v \in L_V^2)$$

Injection continue : $V \hookrightarrow W$, $\|v\|_W \leq C\|v\|_V$.

Modèle de Lotka-Volterra



Flot associé à un champs de vecteurs

Champs de vecteurs dépendant du temps. On note

- Soit $v : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto v_t(x) \in \mathbb{R}^d$
- Soit $v : t \in \mathbb{R} \mapsto v_t \in V$ où V e.v. normé $\subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d\}$.
- Pour $x \in \mathbb{R}^d$, le flot $\phi_t(x)$ est solution du problème de Cauchy :

$$\phi_t(x) = x + \int_{\mathbb{R}} v_t \circ \phi_t(x) dt$$

Existence et unicité du flot : [W. Walter, 1998]

- si v continue en t lipschitz en x (Cauchy-Lipschitz).
 - si v est $L^1(\mathbb{R})$ en t et lipschitz en x p.s. en t (Carathéodory).
- **Hypothèse supplémentaire** presque surement en t , $v_t \in V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$ et v tel que

$$\int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt < \infty \quad (v \in L_V^2)$$

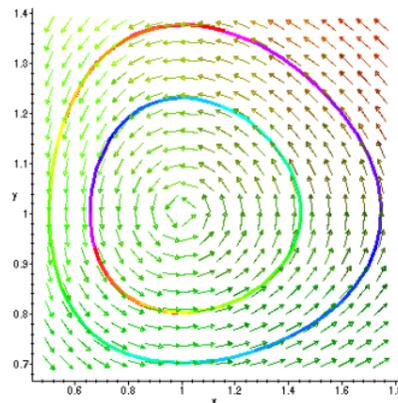
- **Résultat fondamental** [J. A. Glaunes, 2005] Si $v \in L_V^2$, $V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\forall t \geq 0, \quad \phi_t^v = \text{Id} + \int_0^t v_s \circ \phi_s^v ds$$

est un difféomorphisme de \mathbb{R}^d de classe \mathcal{C}^k , i.e $\phi_t^v \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^d)$.

Injection continue : $V \hookrightarrow W$, $\|v\|_W \leq C\|v\|_V$.

Modèle de Lotka-Volterra



Flot associé à un champs de vecteurs

Champs de vecteurs dépendant du temps. On note

- Soit $v : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto v_t(x) \in \mathbb{R}^d$
- Soit $v : t \in \mathbb{R} \mapsto v_t \in V$ où V e.v. normé $\subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d\}$.
- Pour $x \in \mathbb{R}^d$, le flot $\phi_t(x)$ est solution du problème de Cauchy :

$$\phi_t(x) = x + \int_{\mathbb{R}} v_t \circ \phi_t(x) dt$$

Existence et unicité du flot : [W. Walter, 1998]

- si v continue en t lipschitz en x (Cauchy-Lipschitz).
 - si v est $L^1(\mathbb{R})$ en t et lipschitz en x p.s. en t (Carathéodory).
- **Hypothèse supplémentaire** presque surement en t , $v_t \in V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$ et v tel que

$$\int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt < \infty \quad (v \in L_V^2)$$

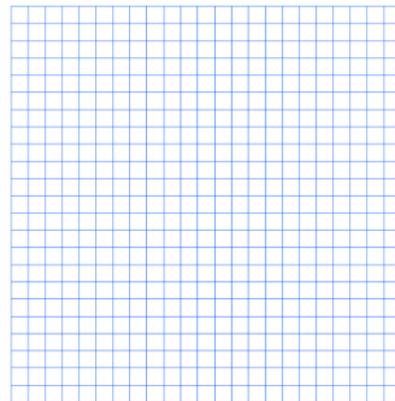
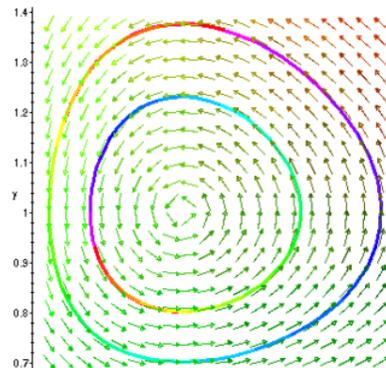
- **Résultat fondamental** [J. A. Glaunes, 2005] Si $v \in L_V^2$, $V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\forall t \geq 0, \quad \phi_t^v = \text{Id} + \int_0^t v_s \circ \phi_s^v ds$$

est un difféomorphisme de \mathbb{R}^d de classe \mathcal{C}^k , i.e $\phi_t^v \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^d)$.

Injection continue : $V \hookrightarrow W$, $\|v\|_W \leq C\|v\|_V$.

Modèle de Lotka-Volterra



Flot associé à un champs de vecteurs

Champs de vecteurs dépendant du temps. On note

- Soit $v : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto v_t(x) \in \mathbb{R}^d$
- Soit $v : t \in \mathbb{R} \mapsto v_t \in V$ où V e.v. normé $\subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d\}$.
- Pour $x \in \mathbb{R}^d$, le flot $\phi_t(x)$ est solution du problème de Cauchy :

$$\phi_t(x) = x + \int_{\mathbb{R}} v_t \circ \phi_t(x) dt$$

Existence et unicité du flot : [W. Walter, 1998]

- si v continue en t lipschitz en x (Cauchy-Lipschitz).
 - si v est $L^1(\mathbb{R})$ en t et lipschitz en x p.s. en t (Carathéodory).
- **Hypothèse supplémentaire** presque surement en t , $v_t \in V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$ et v tel que

$$\int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt < \infty \quad (v \in L_V^2)$$

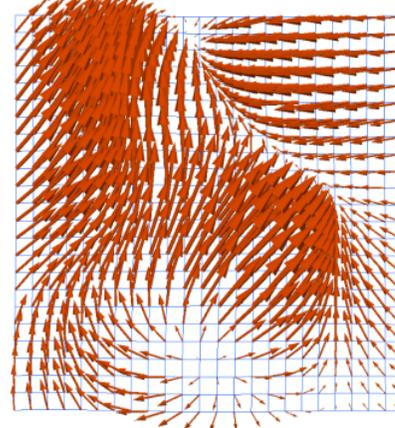
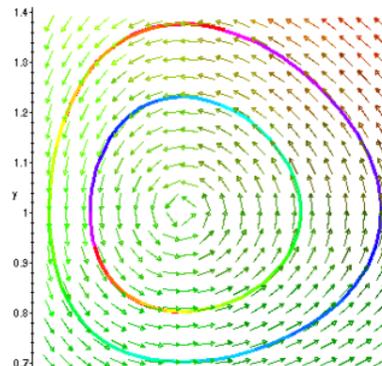
- **Résultat fondamental** [J. A. Glaunes, 2005] Si $v \in L_V^2$, $V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\forall t \geq 0, \quad \phi_t^v = \text{Id} + \int_0^t v_s \circ \phi_s^v ds$$

est un difféomorphisme de \mathbb{R}^d de classe \mathcal{C}^k , i.e $\phi_t^v \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^d)$.

Injection continue : $V \hookrightarrow W$, $\|v\|_W \leq C\|v\|_V$.

Modèle de Lotka-Volterra



Flot associé à un champs de vecteurs

Champs de vecteurs dépendant du temps. On note

- Soit $v : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto v_t(x) \in \mathbb{R}^d$
- Soit $v : t \in \mathbb{R} \mapsto v_t \in V$ où V e.v. normé $\subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d\}$.
- Pour $x \in \mathbb{R}^d$, le flot $\phi_t(x)$ est solution du problème de Cauchy :

$$\phi_t(x) = x + \int_{\mathbb{R}} v_t \circ \phi_t(x) dt$$

Existence et unicité du flot : [W. Walter, 1998]

- si v continue en t lipschitz en x (Cauchy-Lipschitz).
 - si v est $L^1(\mathbb{R})$ en t et lipschitz en x p.s. en t (Carathéodory).
- **Hypothèse supplémentaire** presque surement en t , $v_t \in V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$ et ν tel que

$$\int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt < \infty \quad (v \in L_V^2)$$

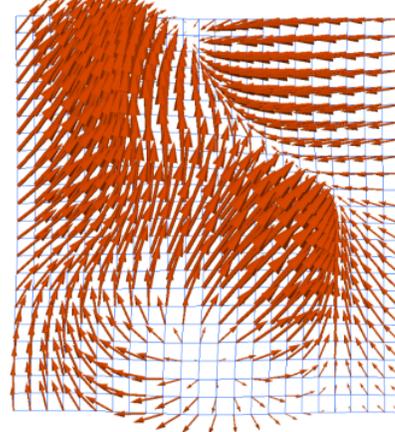
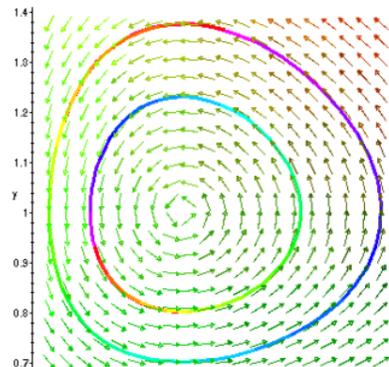
- **Résultat fondamental** [J. A. Glaunes, 2005] Si $v \in L_V^2$, $V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\forall t \geq 0, \quad \phi_t^v = \text{Id} + \int_0^t v_s \circ \phi_s^v ds$$

est un difféomorphisme de \mathbb{R}^d de classe \mathcal{C}^k , i.e $\phi_t^v \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^d)$.

Injection continue : $V \hookrightarrow W$, $\|v\|_W \leq C\|v\|_V$.

Modèle de Lotka-Volterra



Flot associé à un champs de vecteurs

Champs de vecteurs dépendant du temps. On note

- Soit $v : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto v_t(x) \in \mathbb{R}^d$
- Soit $v : t \in \mathbb{R} \mapsto v_t \in V$ où V e.v. normé $\subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d\}$.
- Pour $x \in \mathbb{R}^d$, le flot $\phi_t(x)$ est solution du problème de Cauchy :

$$\phi_t(x) = x + \int_{\mathbb{R}} v_t \circ \phi_t(x) dt$$

Existence et unicité du flot : [W. Walter, 1998]

- si v continue en t lipschitz en x (Cauchy-Lipschitz).
 - si v est $L^1(\mathbb{R})$ en t et lipschitz en x p.s. en t (Carathéodory).
- **Hypothèse supplémentaire** presque surement en t , $v_t \in V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$ et α tel que

$$\int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt < \infty \quad (v \in L_V^2)$$

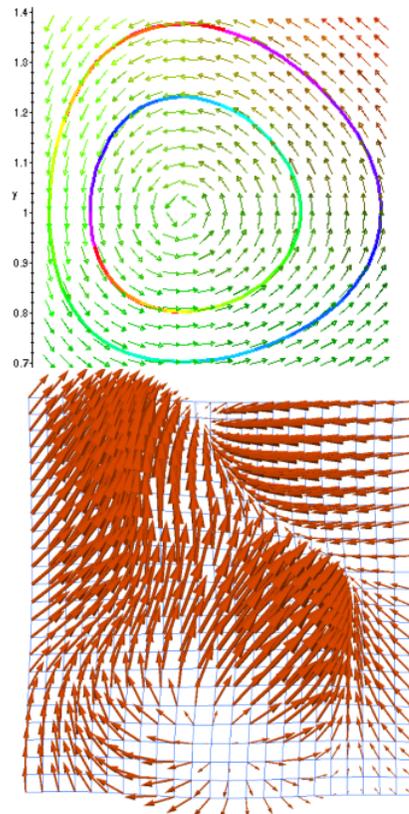
- **Résultat fondamental** [J. A. Glaunes, 2005] Si $v \in L_V^2$, $V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\forall t \geq 0, \quad \phi_t^v = \text{Id} + \int_0^t v_s \circ \phi_s^v ds$$

est un difféomorphisme de \mathbb{R}^d de classe \mathcal{C}^k , i.e $\phi_t^v \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^d)$.

Injection continue : $V \hookrightarrow W$, $\|v\|_W \leq C\|v\|_V$.

Modèle de Lotka-Volterra



Flot associé à un champs de vecteurs

Champs de vecteurs dépendant du temps. On note

- Soit $v : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto v_t(x) \in \mathbb{R}^d$
- Soit $v : t \in \mathbb{R} \mapsto v_t \in V$ où V e.v. normé $\subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d\}$.
- Pour $x \in \mathbb{R}^d$, le flot $\phi_t(x)$ est solution du problème de Cauchy :

$$\phi_t(x) = x + \int_{\mathbb{R}} v_t \circ \phi_t(x) dt$$

Existence et unicité du flot : [W. Walter, 1998]

- si v continue en t lipschitz en x (Cauchy-Lipschitz).
 - si v est $L^1(\mathbb{R})$ en t et lipschitz en x p.s. en t (Carathéodory).
- **Hypothèse supplémentaire** presque sûrement en t , $v_t \in V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$ et α tel que

$$\int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt < \infty \quad (v \in L_V^2)$$

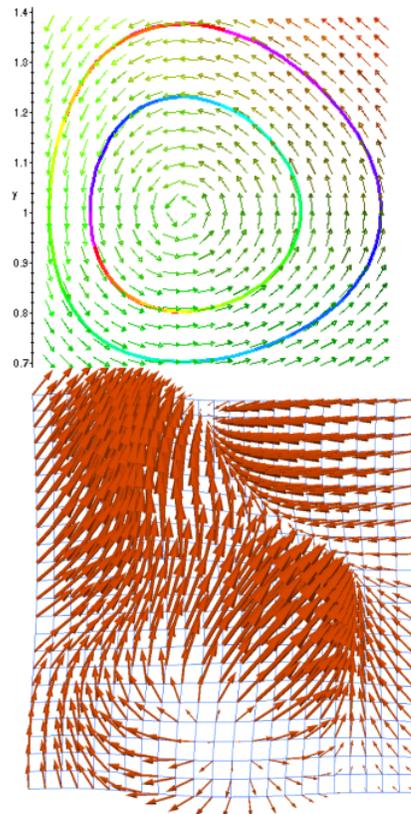
- **Résultat fondamental** [J. A. Glaunes, 2005] Si $v \in L_V^2$, $V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\forall t \geq 0, \quad \phi_t^v = \text{Id} + \int_0^t v_s \circ \phi_s^v ds$$

est un difféomorphisme de \mathbb{R}^d de classe \mathcal{C}^k , i.e $\phi_t^v \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^d)$.

Injection continue : $V \hookrightarrow W$, $\|v\|_W \leq C\|v\|_V$.

Modèle de Lotka-Volterra



Flot associé à un champs de vecteurs

Champs de vecteurs dépendant du temps. On note

- Soit $v : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto v_t(x) \in \mathbb{R}^d$
- Soit $v : t \in \mathbb{R} \mapsto v_t \in V$ où V e.v. normé $\subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d\}$.
- Pour $x \in \mathbb{R}^d$, le flot $\phi_t(x)$ est solution du problème de Cauchy :

$$\phi_t(x) = x + \int_{\mathbb{R}} v_t \circ \phi_t(x) dt$$

Existence et unicité du flot : [W. Walter, 1998]

- si v continue en t lipschitz en x (Cauchy-Lipschitz).
 - si v est $L^1(\mathbb{R})$ en t et lipschitz en x p.s. en t (Carathéodory).
- **Hypothèse supplémentaire** presque surement en t , $v_t \in V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$ et α tel que

$$\int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt < \infty \quad (v \in L_V^2)$$

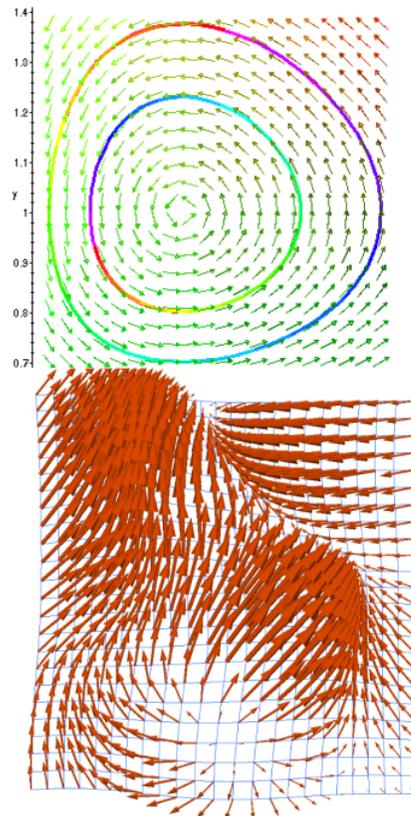
- **Résultat fondamental** [J. A. Glaunes, 2005] Si $v \in L_V^2$, $V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\forall t \geq 0, \quad \phi_t^v = \text{Id} + \int_0^t v_s \circ \phi_s^v ds$$

est un difféomorphisme de \mathbb{R}^d de classe \mathcal{C}^k , i.e $\phi_t^v \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^d)$.

Injection continue : $V \hookrightarrow W$, $\|v\|_W \leq C\|v\|_V$.

Modèle de Lotka-Volterra



Flot associé à un champs de vecteurs

Champs de vecteurs dépendant du temps. On note

- Soit $v : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto v_t(x) \in \mathbb{R}^d$
- Soit $v : t \in \mathbb{R} \mapsto v_t \in V$ où V e.v. normé $\subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d\}$.
- Pour $x \in \mathbb{R}^d$, le flot $\phi_t(x)$ est solution du problème de Cauchy :

$$\phi_t(x) = x + \int_{\mathbb{R}} v_t \circ \phi_t(x) dt$$

Existence et unicité du flot : [W. Walter, 1998]

- si v continue en t lipschitz en x (Cauchy-Lipschitz).
 - si v est $L^1(\mathbb{R})$ en t et lipschitz en x p.s. en t (Carathéodory).
- **Hypothèse supplémentaire** presque surement en t , $v_t \in V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$ et α tel que

$$\int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt < \infty \quad (v \in L_V^2)$$

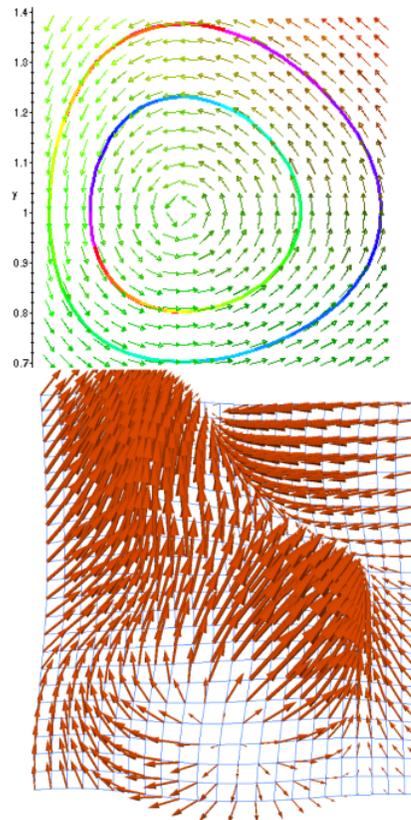
- **Résultat fondamental** [J. A. Glaunes, 2005] Si $v \in L_V^2$, $V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\forall t \geq 0, \quad \phi_t^v = \text{Id} + \int_0^t v_s \circ \phi_s^v ds$$

est un difféomorphisme de \mathbb{R}^d de classe \mathcal{C}^k , i.e $\phi_t^v \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^d)$.

Injection continue : $V \hookrightarrow W$, $\|v\|_W \leq C\|v\|_V$.

Modèle de Lotka-Volterra



Flot associé à un champs de vecteurs

Champs de vecteurs dépendant du temps. On note

- Soit $v : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto v_t(x) \in \mathbb{R}^d$
- Soit $v : t \in \mathbb{R} \mapsto v_t \in V$ où V e.v. normé $\subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d\}$.
- Pour $x \in \mathbb{R}^d$, le flot $\phi_t(x)$ est solution du problème de Cauchy :

$$\phi_t(x) = x + \int_{\mathbb{R}} v_t \circ \phi_t(x) dt$$

Existence et unicité du flot : [W. Walter, 1998]

- si v continue en t lipschitz en x (Cauchy-Lipschitz).
 - si v est $L^1(\mathbb{R})$ en t et lipschitz en x p.s. en t (Carathéodory).
- **Hypothèse supplémentaire** presque sûrement en t , $v_t \in V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$ et α tel que

$$\int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt < \infty \quad (v \in L_V^2)$$

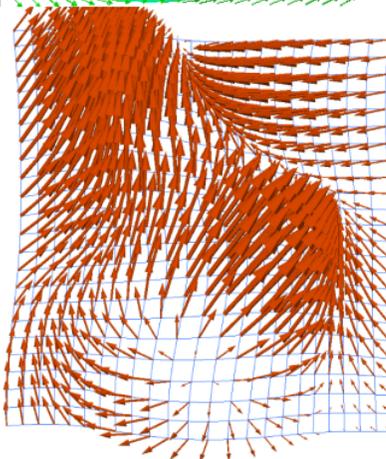
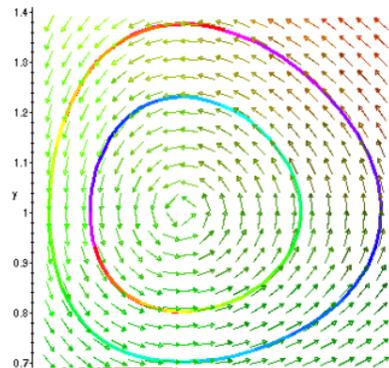
- **Résultat fondamental** [J. A. Glaunes, 2005] Si $v \in L_V^2$, $V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\forall t \geq 0, \quad \phi_t^v = \text{Id} + \int_0^t v_s \circ \phi_s^v ds$$

est un difféomorphisme de \mathbb{R}^d de classe \mathcal{C}^k , i.e $\phi_t^v \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^d)$.

Injection continue : $V \hookrightarrow W$, $\|v\|_W \leq C\|v\|_V$.

Modèle de Lotka-Volterra



Flot associé à un champs de vecteurs

Champs de vecteurs dépendant du temps. On note

- Soit $v : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto v_t(x) \in \mathbb{R}^d$
- Soit $v : t \in \mathbb{R} \mapsto v_t \in V$ où V e.v. normé $\subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d\}$.
- Pour $x \in \mathbb{R}^d$, le flot $\phi_t(x)$ est solution du problème de Cauchy :

$$\phi_t(x) = x + \int_{\mathbb{R}} v_t \circ \phi_t(x) dt$$

Existence et unicité du flot : [W. Walter, 1998]

- si v continue en t lipschitz en x (Cauchy-Lipschitz).
 - si v est $L^1(\mathbb{R})$ en t et lipschitz en x p.s. en t (Carathéodory).
- **Hypothèse supplémentaire** presque sûrement en t , $v_t \in V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$ et α tel que

$$\int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt < \infty \quad (v \in L_V^2)$$

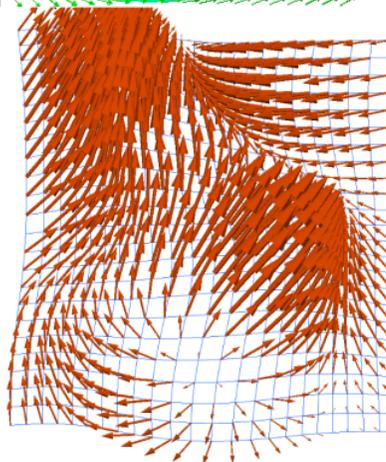
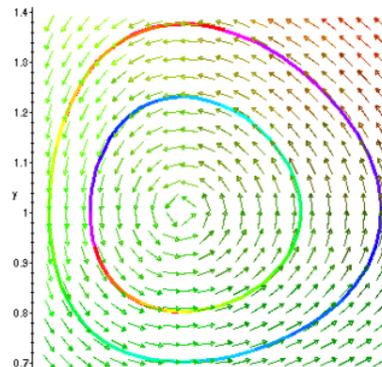
- **Résultat fondamental** [J. A. Glaunes, 2005] Si $v \in L_V^2$, $V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\forall t \geq 0, \quad \phi_t^v = \text{Id} + \int_0^t v_s \circ \phi_s^v ds$$

est un difféomorphisme de \mathbb{R}^d de classe \mathcal{C}^k , i.e $\phi_t^v \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^d)$.

Injection continue : $V \hookrightarrow W$, $\|v\|_W \leq C\|v\|_V$.

Modèle de Lotka-Volterra



Flot associé à un champs de vecteurs

Champs de vecteurs dépendant du temps. On note

- Soit $v : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto v_t(x) \in \mathbb{R}^d$
- Soit $v : t \in \mathbb{R} \mapsto v_t \in V$ où V e.v. normé $\subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d\}$.
- Pour $x \in \mathbb{R}^d$, le flot $\phi_t(x)$ est solution du problème de Cauchy :

$$\phi_t(x) = x + \int_{\mathbb{R}} v_t \circ \phi_t(x) dt$$

Existence et unicité du flot : [W. Walter, 1998]

- si v continue en t lipschitz en x (Cauchy-Lipschitz).
 - si v est $L^1(\mathbb{R})$ en t et lipschitz en x p.s. en t (Carathéodory).
- **Hypothèse supplémentaire** presque sûrement en t , $v_t \in V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$ et α tel que

$$\int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt < \infty \quad (v \in L_V^2)$$

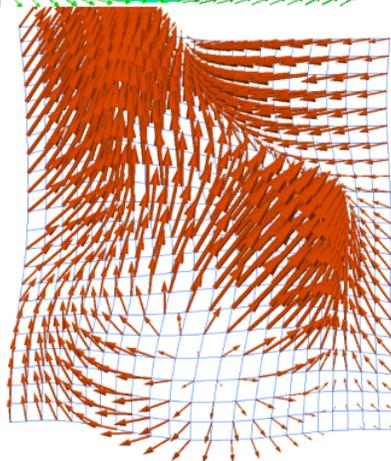
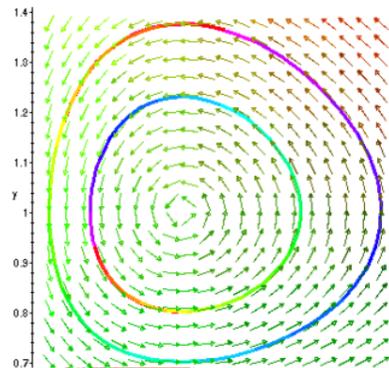
- **Résultat fondamental** [J. A. Glaunes, 2005] Si $v \in L_V^2$, $V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\forall t \geq 0, \quad \phi_t^v = \text{Id} + \int_0^t v_s \circ \phi_s^v ds$$

est un difféomorphisme de \mathbb{R}^d de classe \mathcal{C}^k , i.e $\phi_t^v \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^d)$.

Injection continue : $V \hookrightarrow W$, $\|v\|_W \leq C\|v\|_V$.

Modèle de Lotka-Volterra



Flot associé à un champs de vecteurs

Champs de vecteurs dépendant du temps. On note

- Soit $v : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto v_t(x) \in \mathbb{R}^d$
- Soit $v : t \in \mathbb{R} \mapsto v_t \in V$ où V e.v. normé $\subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d\}$.
- Pour $x \in \mathbb{R}^d$, le flot $\phi_t(x)$ est solution du problème de Cauchy :

$$\phi_t(x) = x + \int_{\mathbb{R}} v_t \circ \phi_t(x) dt$$

Existence et unicité du flot : [W. Walter, 1998]

- si v continue en t lipschitz en x (Cauchy-Lipschitz).
 - si v est $L^1(\mathbb{R})$ en t et lipschitz en x p.s. en t (Carathéodory).
- **Hypothèse supplémentaire** presque sûrement en t , $v_t \in V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$ et α tel que

$$\int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt < \infty \quad (v \in L_V^2)$$

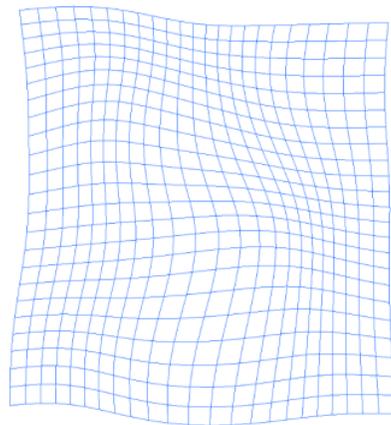
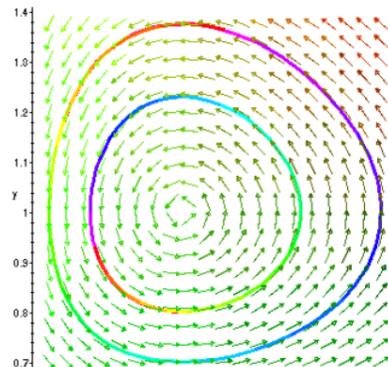
- **Résultat fondamental** [J. A. Glaunes, 2005] Si $v \in L_V^2$, $V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\forall t \geq 0, \quad \phi_t^v = \text{Id} + \int_0^t v_s \circ \phi_s^v ds$$

est un difféomorphisme de \mathbb{R}^d de classe \mathcal{C}^k , i.e $\phi_t^v \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^d)$.

Injection continue : $V \hookrightarrow W$, $\|v\|_W \leq C\|v\|_V$.

Modèle de Lotka-Volterra



Espace de champs de vecteur

On prend pour V un RKHS à valeur dans \mathbb{R}^d .



Espace de champs de vecteur

On prend pour V un RKHS à valeur dans \mathbb{R}^d .

Noyau vectoriel positif $k_V : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, k_V est symétrique et pour tout n , tout $x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}^d$ et tout $a^1, \dots, a^n \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\sum_{i,j} a^i \cdot k_V(x^i, x^j) a^j \geq 0.$$

Si de plus, on a égalité si et seulement si les a^i sont tous nuls, alors le noyau est dit défini positif.

Espace de champs de vecteur

On prend pour V un RKHS à valeur dans \mathbb{R}^d .

Noyau vectoriel positif $k_V : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, k_V est symétrique et pour tout n , tout $x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}^d$ et tout $a^1, \dots, a^n \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\sum_{i,j} a^i \cdot k_V(x^i, x^j) a^j \geq 0.$$

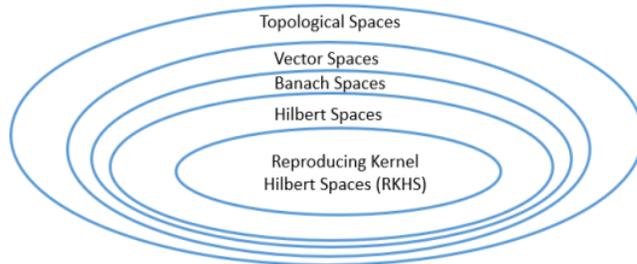
Si de plus, on a égalité si et seulement si les a^i sont tous nuls, alors le noyau est dit défini positif.

RKHS : V est le complété de

$$V_0 = \left\{ v = \sum_{i=1}^n k_V(\cdot, x^i) a^i \mid n \in \mathbb{N}, \forall i, a^i \in \mathbb{R}^d \text{ et } x^i \in \mathbb{R}^d \right\}$$

pour le produit scalaire

$$\left\langle \sum_{i=1}^m k_V(\cdot, x^i) a^i, \sum_{j=1}^n k_V(\cdot, y^j) b^j \right\rangle_V = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i \cdot k_V(x^i, y^j) b^j$$



Espace de champs de vecteur

On prend pour V un RKHS à valeur dans \mathbb{R}^d .

Noyau vectoriel positif $k_V : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, k_V est symétrique et pour tout n , tout $x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}^d$ et tout $a^1, \dots, a^n \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\sum_{i,j} a^i \cdot k_V(x^i, x^j) a^j \geq 0.$$

Si de plus, on a égalité si et seulement si les a^i sont tous nuls, alors le noyau est dit défini positif.

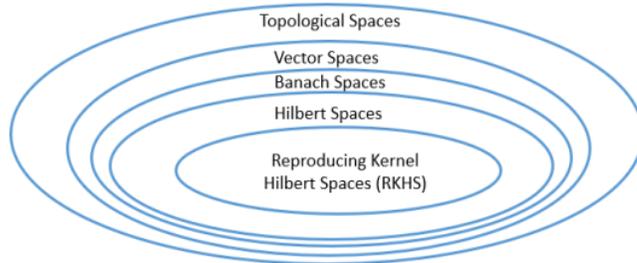
RKHS : V est le complété de

$$V_0 = \left\{ v = \sum_{i=1}^n k_V(\cdot, x^i) a^i \mid n \in \mathbb{N}, \forall i, a^i \in \mathbb{R}^d \text{ et } x^i \in \mathbb{R}^d \right\}$$

pour le produit scalaire

$$\left\langle \sum_{i=1}^m k_V(\cdot, x^i) a^i, \sum_{j=1}^n k_V(\cdot, y^j) b^j \right\rangle_V = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i \cdot k_V(x^i, y^j) b^j$$

Fonction d'évaluation : Pour tout $v \in V$, $x \in \mathbb{R}^d$ et $a \in \mathbb{R}^d$, on a $v(x) \cdot a = \langle k_V(x, \cdot) a, v \rangle_V$



Espace de champs de vecteur

On prend pour V un RKHS à valeur dans \mathbb{R}^d .

Noyau vectoriel positif $k_V : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, k_V est symétrique et pour tout n , tout $x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}^d$ et tout $a^1, \dots, a^n \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\sum_{i,j} a^i \cdot k_V(x^i, x^j) a^j \geq 0.$$

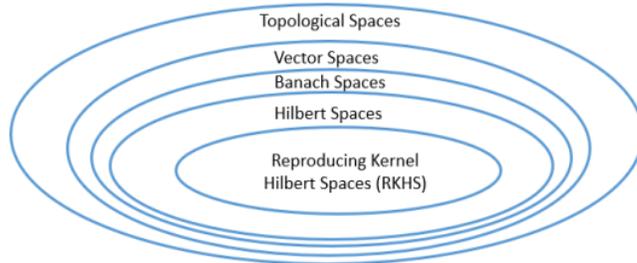
Si de plus, on a égalité si et seulement si les a^i sont tous nuls, alors le noyau est dit défini positif.

RKHS : V est le complété de

$$V_0 = \left\{ v = \sum_{i=1}^n k_V(\cdot, x^i) a^i \mid n \in \mathbb{N}, \forall i, a^i \in \mathbb{R}^d \text{ et } x^i \in \mathbb{R}^d \right\}$$

pour le produit scalaire

$$\left\langle \sum_{i=1}^m k_V(\cdot, x^i) a^i, \sum_{j=1}^n k_V(\cdot, y^j) b^j \right\rangle_V = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i \cdot k_V(x^i, y^j) b^j$$



Fonction d'évaluation : Pour tout $v \in V$, $x \in \mathbb{R}^d$ et $a \in \mathbb{R}^d$, on a $v(x) \cdot a = \langle k_V(x, \cdot) a, v \rangle_V$

Choix du noyau k_V de sorte que $V \hookrightarrow \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$?

Espace de champs de vecteur



RKHS induit par un produit scalaire : (cas à valeur réelle) [L. Younes, 2010]

- L opérateur pseudo-différentiel linéaire autoadjoint défini positif : $\langle f, g \rangle_V = \langle Lf, g \rangle$ produit scalaire.
- V est un RKHS de noyau k_V la fonction de green de L (i.e. $g(x) = \int k_V(x, y)f(y)dy$ solution de $Lg = f$).

Espace de champs de vecteur

RKHS induit par un produit scalaire : (cas à valeur réelle) [L. Younes, 2010]

- L opérateur pseudo-différentiel linéaire autoadjoint défini positif : $\langle f, g \rangle_V = \langle Lf, g \rangle$ produit scalaire.
- V est un RKHS de noyau k_V la fonction de Green de L (i.e. $g(x) = \int k_V(x, y)f(y)dy$ solution de $Lg = f$).

Noyau de Matérn est la fonction de Green de l'opérateur $L = (I - c\Delta)^\alpha$, où $c = l^2/(2\nu)$ et $\alpha = \nu + d/2$, opérateur elliptique d'ordre 2α . Le RKHS associé est l'espace de Sobolev fractionnaire

$$H^\alpha(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \mid \int_{\mathbb{R}^d} (1 + c|\xi|^2)^\alpha |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right\}$$

Régularité : $H^{\nu+d/2}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \hookrightarrow C^{[\nu]}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ [Brezis, 1983], en particulier si $\nu \geq 5/2$ alors $V \hookrightarrow C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

Espace de champs de vecteur

RKHS induit par un produit scalaire : (cas à valeur réelle) [L. Younes, 2010]

- L opérateur pseudo-différentiel linéaire autoadjoint défini positif : $\langle f, g \rangle_V = \langle Lf, g \rangle$ produit scalaire.
- V est un RKHS de noyau k_V la fonction de Green de L (i.e. $g(x) = \int k_V(x, y)f(y)dy$ solution de $Lg = f$).

Noyau de Matérn est la fonction de Green de l'opérateur $L = (I - c\Delta)^\alpha$, où $c = l^2/(2\nu)$ et $\alpha = \nu + d/2$, opérateur elliptique d'ordre 2α . Le RKHS associé est l'espace de Sobolev fractionnaire

$$H^\alpha(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \mid \int_{\mathbb{R}^d} (1 + c|\xi|^2)^\alpha |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right\}$$

Régularité : $H^{\nu+d/2}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \hookrightarrow C^{[\nu]}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ [Brezis, 1983], en particulier si $\nu \geq 5/2$ alors $V \hookrightarrow C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

Noyau Gaussien est la fonction de Green de l'opérateur $L = \exp(\sigma^2/2\Delta)$. Le RKHS associé est

$$H^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \mid \int_{\mathbb{R}^d} \exp(\sigma^2\|\xi\|^2/2) |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right\}$$

Régularité : fonction analytique à décroissance rapide

Espace de champs de vecteur

RKHS induit par un produit scalaire : (cas à valeur réelle) [L. Younes, 2010]

- L opérateur pseudo-différentiel linéaire autoadjoint défini positif : $\langle f, g \rangle_V = \langle Lf, g \rangle$ produit scalaire.
- V est un RKHS de noyau k_V la fonction de Green de L (i.e. $g(x) = \int k_V(x, y)f(y)dy$ solution de $Lg = f$).

Noyau de Matérn est la fonction de Green de l'opérateur $L = (I - c\Delta)^\alpha$, où $c = l^2/(2\nu)$ et $\alpha = \nu + d/2$, opérateur elliptique d'ordre 2α . Le RKHS associé est l'espace de Sobolev fractionnaire

$$H^\alpha(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \mid \int_{\mathbb{R}^d} (1 + c|\xi|^2)^\alpha |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right\}$$

Régularité : $H^{\nu+d/2}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \hookrightarrow C^{[\nu]}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ [Brezis, 1983], en particulier si $\nu \geq 5/2$ alors $V \hookrightarrow C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

Noyau Gaussien est la fonction de Green de l'opérateur $L = \exp(\sigma^2/2\Delta)$. Le RKHS associé est

$$H^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \mid \int_{\mathbb{R}^d} \exp(\sigma^2\|\xi\|^2/2) |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right\}$$

Régularité : fonction analytique à décroissance rapide

Applications : Régularité des champs de vecteur e.g. $k_V(x, y) = \exp(-\|x - y\|^2/\sigma_V^2) \text{Id}_{\mathbb{R}^d}$

- On pourra utiliser la notation $\langle Lu, v \rangle$ sans parler du noyau
- Généralisation à la sphère \mathbb{S}^d (harmonique sphérique) [J. A. Glaunes, 2005]

Déformations : Groupe de difféomorphismes

Groupe de difféomorphismes avec métrique invariante à droite [J. A. Glaunes, 2005]

- Le groupe de déformations $G_V = \left\{ \exp(v) \triangleq \phi_1^v \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^d) \mid v \in L_V^2 \right\}$ est un espace métrique complet muni de la distance

$$d_{G_V}(\text{Id}, \phi) \triangleq \inf \left\{ \|v\|_{L_V^2} \mid \phi = \phi_1^v \right\}$$

étendue par invariance à droite.



Déformations : Groupe de difféomorphismes

Groupe de difféomorphismes avec métrique invariante à droite [J. A. Glaunes, 2005]

• Le groupe de déformations $G_V = \left\{ \exp(v) \triangleq \phi_1^v \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^d) \mid v \in L_V^2 \right\}$ est un espace métrique complet muni de la distance

$$d_{G_V}(\text{Id}, \phi) \triangleq \inf \left\{ \|v\|_{L_V^2} \mid \phi = \phi_1^v \right\}$$

étendue par invariance à droite.

Appariement exact : minimiser $d_{G_V}(\text{Id}, \phi) \mid \phi \cdot S = S_{\text{cible}}$ est une recherche de géodésique

Déformations : Groupe de difféomorphismes

Groupe de difféomorphismes avec métrique invariante à droite [J. A. Glaunes, 2005]

• Le groupe de déformations $G_V = \left\{ \exp(v) \triangleq \phi_1^v \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^d) \mid v \in L_V^2 \right\}$ est un espace métrique complet muni de la distance

$$d_{G_V}(\text{Id}, \phi) \triangleq \inf \left\{ \|v\|_{L_V^2} \mid \phi = \phi_1^v \right\}$$

étendue par invariance à droite.

Appariement exact : minimiser $d_{G_V}(\text{Id}, \phi) \mid \phi \cdot S = S_{\text{cible}}$ est une recherche de géodésique

• **Existence de géodésique** : Si $V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^d)$, alors pour tous ϕ, ψ dans G_V ,

il existe $v \in L_V^2$ tel que $\phi_1^v = \phi \circ \psi^{-1}$ et $d(\phi, \psi) = \|v\|_{L_V^2} = \|\psi\|_{L_V^1}$. En particulier $t \mapsto \|v_t\|_V$ est constante.

Déformations : Groupe de difféomorphismes

Groupe de difféomorphismes avec métrique invariante à droite [J. A. Glaunes, 2005]

• Le groupe de déformations $G_V = \left\{ \exp(v) \triangleq \phi_1^v \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^d) \mid v \in L_V^2 \right\}$ est un espace métrique complet muni de la distance

$$d_{G_V}(\text{Id}, \phi) \triangleq \inf \left\{ \|v\|_{L_V^2} \mid \phi = \phi_1^v \right\}$$

étendue par invariance à droite.

Appariement exact : minimiser $d_{G_V}(\text{Id}, \phi) \mid \phi \cdot S = S_{\text{cible}}$ est une recherche de géodésique

- **Existence de géodésique** : Si $V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^d)$, alors pour tous ϕ, ψ dans G_V , il existe $v \in L_V^2$ tel que $\phi_1^v = \phi \circ \psi^{-1}$ et $d(\phi, \psi) = \|v\|_{L_V^2} = \|\dot{v}\|_{L_V^1}$. En particulier $t \mapsto \|v_t\|_V$ est constante.
- **Équation d'Euler** [M. Beg et al, 2005, M. Miller, 2006] On suppose $\|v\|_V^2 = \langle Lv, v \rangle$. Une condition nécessaire d'optimalité pour $\|v\|_{L_V^2} = \int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt$ sachant que $\phi_1^v = \phi$ s'écrit :

$$\frac{d}{dt} Lv_t + \text{ad}_{v_t}^* v_t = 0 \tag{1}$$

où ad est l'application adjointe $\text{ad}_u(v) \triangleq [u, v] \stackrel{E=\mathbb{R}^d}{=} \nabla v u - \nabla u v$. Moment généralisé $p = Lv \rightrightarrows$ Équations de Hamilton.

Déformations : Groupe de difféomorphismes

Groupe de difféomorphismes avec métrique invariante à droite [J. A. Glaunes, 2005]

• Le groupe de déformations $G_V = \left\{ \exp(v) \triangleq \phi_1^v \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^d) \mid v \in L_V^2 \right\}$ est un espace métrique complet muni de la distance

$$d_{G_V}(\text{Id}, \phi) \triangleq \inf \left\{ \|v\|_{L_V^2} \mid \phi = \phi_1^v \right\}$$

étendue par invariance à droite.

Appariement exact : minimiser $d_{G_V}(\text{Id}, \phi) \mid \phi \cdot S = S_{\text{cible}}$ est une recherche de géodésique

- **Existence de géodésique** : Si $V \hookrightarrow \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^d)$, alors pour tous ϕ, ψ dans G_V , il existe $v \in L_V^2$ tel que $\phi_1^v = \phi \circ \psi^{-1}$ et $d(\phi, \psi) = \|v\|_{L_V^2} = \|\dot{v}\|_{L_V^1}$. En particulier $t \mapsto \|v_t\|_V$ est constante.
- **Équation d'Euler** [M. Beg et al, 2005, M. Miller, 2006] On suppose $\|v\|_V^2 = \langle Lv, v \rangle$. Une condition nécessaire d'optimalité pour $\|v\|_{L_V^2} = \int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt$ sachant que $\phi_1^v = \phi$ s'écrit :

$$\frac{d}{dt} Lv_t + \text{ad}_{v_t}^* v_t = 0 \tag{1}$$

où ad est l'application adjointe $\text{ad}_u(v) \triangleq [u, v] \stackrel{E=\mathbb{R}^d}{=} \nabla vu - \nabla uv$. Moment généralisé $p = Lv \rightrightarrows$ Équations de Hamilton.

- **Application** : Méthode de tir (*shooting method*) pour l'appariement exact :
 - La connaissance de v_0 suffit à déterminer la géodésique.
 - On cherche v_0 , tel que $\phi^v \cdot S = S_{\text{cible}}$, où v est solution de (1).



4.

DÉFORMATION DES MESURES

- Définition du problème d'appariement
- Condition d'optimalité
- Algorithme de résolution

Appariement de mesures

⇒ Les données sont vues comme l'échantillon d'une mesure μ



Appariement de mesures

⇒ Les données sont vues comme l'échantillon d'une mesure μ

$\mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d)$ mesures signées, dual de l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Soit dx mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d .



Appariement de mesures

⇒ Les données sont vues comme l'échantillon d'une mesure μ

$\mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d)$ mesures signées, dual de l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Soit dx mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d .

Déformation des mesures Soit G_V le groupe agissant sur \mathbb{R}^d .

- Deformation : Soit $\phi \in G_V$, $\phi \cdot \mu = \phi_{\#}\mu$ mesure image : $\langle \phi_{\#}\mu, f \rangle = \langle \mu, f \circ \phi \rangle$ ou $\phi_{\#}\mu(A) = \mu(\phi^{-1}(A))$
- Si $\mu = \sum_i a_i \delta_{x_i}$ alors $\phi \cdot \mu = \sum_i a_i \delta_{\phi(x_i)}$: correspond aux déplacements des points
- Cas de mesure à densité : $\mu(x) = f(x)dx$ alors $\phi_{\#}\mu(x) = f \circ \psi(x) \det(\nabla\psi(x))dx$ où $\psi = \phi^{-1}$

Théorème du changement de variable :
$$\int_{\psi(A)} f(x)dx = \int_A f \circ \psi(x) \det(\nabla\psi(x))dx$$

Appariement de mesures

⇒ Les données sont vues comme l'échantillon d'une mesure μ

$\mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d)$ mesures signées, dual de l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Soit dx mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d .

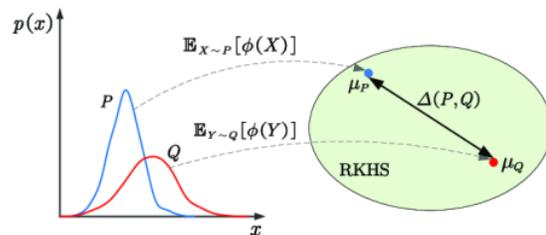
Déformation des mesures Soit G_V le groupe agissant sur \mathbb{R}^d .

- Deformation : Soit $\phi \in G_V$, $\phi \cdot \mu = \phi_{\#}\mu$ mesure image : $\langle \phi_{\#}\mu, f \rangle = \langle \mu, f \circ \phi \rangle$ ou $\phi_{\#}\mu(A) = \mu(\phi^{-1}(A))$
- Si $\mu = \sum_i a_i \delta_{x_i}$ alors $\phi \cdot \mu = \sum_i a_i \delta_{\phi(x_i)}$: correspond aux déplacements des points
- Cas de mesure à densité : $\mu(x) = f(x)dx$ alors $\phi_{\#}\mu(x) = f \circ \psi(x) \det(\nabla\psi(x))dx$ où $\psi = \phi^{-1}$

Théorème du changement de variable :
$$\int_{\psi(A)} f(x)dx = \int_A f \circ \psi(x) \det(\nabla\psi(x))dx$$

Terme d'appariement pour les mesures

- Soit $W \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ un RKHS de noyau $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ (caractéristique).
- $\mu \in W^*$ s'identifie à $\mu^K = \int_{\mathbb{R}^d} K(\cdot, x)d\mu(x) \in W$
- $\|\mu\|_{W^*} = \|\mu^K\|_W = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} K(x, y)d\mu(x)d\mu(y)$



Appariement de mesures

⇒ Les données sont vues comme l'échantillon d'une mesure μ

$\mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d)$ mesures signées, dual de l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Soit dx mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d .

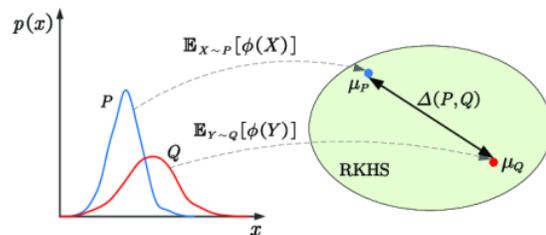
Déformation des mesures Soit G_V le groupe agissant sur \mathbb{R}^d .

- Deformation : Soit $\phi \in G_V$, $\phi \cdot \mu = \phi_{\#}\mu$ mesure image : $\langle \phi_{\#}\mu, f \rangle = \langle \mu, f \circ \phi \rangle$ ou $\phi_{\#}\mu(A) = \mu(\phi^{-1}(A))$
- Si $\mu = \sum_i a_i \delta_{x_i}$ alors $\phi \cdot \mu = \sum_i a_i \delta_{\phi(x_i)}$: correspond aux déplacements des points
- Cas de mesure à densité : $\mu(x) = f(x)dx$ alors $\phi_{\#}\mu(x) = f \circ \psi(x) \det(\nabla \psi(x))dx$ où $\psi = \phi^{-1}$

Théorème du changement de variable : $\int_{\psi(A)} f(x)dx = \int_A f \circ \psi(x) \det(\nabla \psi(x))dx$

Terme d'appariement pour les mesures

- Soit $W \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ un RKHS de noyau $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ (caractéristique).
- $\mu \in W^*$ s'identifie à $\mu^K = \int_{\mathbb{R}^d} K(\cdot, x)d\mu(x) \in W$
- $\|\mu\|_{W^*} = \|\mu^K\|_W = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} K(x, y)d\mu(x)d\mu(y)$



Problème d'appariement de mesures $J(v) = \int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt + \lambda \mathcal{A}(v)$ où $\mathcal{A}(v) = \|(\phi_1^v \cdot \mu)^K - \mu_{\text{cible}}^K\|_W^2$

$$\text{où } (\phi_1^v \cdot \mu)^K = \int_{\mathbb{R}^k} K(\cdot, \phi_1^v(y))d\mu(y)$$

Appariement de mesures : conditions d'optimalité



Appariement de mesures : conditions d'optimalité

Point Critique (théorème du représentant)

$$v_s = \int_{\mathbb{R}^k} k_V(\cdot, \phi_s^v(y)) p_s^v(y) d\mu(y)$$

où ϕ_s^v est le flot sur tout l'espace et p_s^v est le moment généralisé associé.

Ces quantités sont définies μ presque sûrement : il n'y a pas de contraintes en dehors du support de μ

Appariement de mesures : conditions d'optimalité

Point Critique (théorème du représentant)

$$v_s = \int_{\mathbb{R}^k} k_V(\cdot, \phi_s^v(y)) p_s^v(y) d\mu(y)$$

où ϕ_s^v est le flot sur tout l'espace et p_s^v est le moment généralisé associé.

Ces quantités sont définies μ presque sûrement : il n'y a pas de contraintes en dehors du support de μ

Dynamique Hamiltonienne ϕ_t^v et p_t^v satisfont aux équations de Hamilton μ presque sûrement

$$(\mathcal{H}) \quad \begin{cases} \dot{\phi}_t &= +\nabla_p H(\phi_t, p_t) \\ \dot{p}_t &= -\nabla_\phi H(\phi_t, p_t) \end{cases}$$

où $H(\phi, p) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle p(x), k_V(\phi(x), \phi(y)) p(y) \rangle d\mu(x) d\mu(y)$

Propriété : $\|v_t\|_V = H(\phi_t, p_t) = H(\phi_0, p_0) = \|v_0\|_V$ et ainsi $J(v) = H(\phi_0, p_0) + \lambda \mathcal{A}(\phi_1)$

Appariement de mesures : conditions d'optimalité

Point Critique (théorème du représentant)

$$v_s = \int_{\mathbb{R}^k} k_V(\cdot, \phi_s^v(y)) p_s^v(y) d\mu(y)$$

où ϕ_s^v est le flot sur tout l'espace et p_s^v est le moment généralisé associé.

Ces quantités sont définies μ presque sûrement : il n'y a pas de contraintes en dehors du support de μ

Dynamique Hamiltonienne ϕ_t^v et p_t^v satisfont aux équations de Hamilton μ presque sûrement

$$(\mathcal{H}) \quad \begin{cases} \dot{\phi}_t &= +\nabla_p H(\phi_t, p_t) \\ \dot{p}_t &= -\nabla_\phi H(\phi_t, p_t) \end{cases}$$

où $H(\phi, p) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle p(x), k_V(\phi(x), \phi(y)) p(y) \rangle d\mu(x) d\mu(y)$

Propriété : $\|v_t\|_V = H(\phi_t, p_t) = H(\phi_0, p_0) = \|v_0\|_V$ et ainsi $J(v) = H(\phi_0, p_0) + \lambda \mathcal{A}(\phi_1)$

Applications : Méthode de tir pour l'appariement approché

- La déformation solution est entièrement déterminée par les impulsions initiales p_0
- On cherche p_0 qui minimise le terme d'appariement $\mathcal{A}(\phi_1)$, où ϕ_t, v_t sont solutions de \mathcal{H}
- La distance est donnée par $H(\phi_0, p_0) = \|v_0\|_V$.

Appariement de mesures : conditions d'optimalité

Point Critique (théorème du représentant)

$$v_s = \int_{\mathbb{R}^k} k_V(\cdot, \phi_s^v(y)) p_s^v(y) d\mu(y)$$

où ϕ_s^v est le flot sur tout l'espace et p_s^v est le moment généralisé associé.

Ces quantités sont définies μ presque sûrement : il n'y a pas de contraintes en dehors du support de μ

Dynamique Hamiltonienne ϕ_t^v et p_t^v satisfont aux équations de Hamilton μ presque sûrement

$$(\mathcal{H}) \quad \begin{cases} \dot{\phi}_t &= +\nabla_p H(\phi_t, p_t) \\ \dot{p}_t &= -\nabla_\phi H(\phi_t, p_t) \end{cases}$$

où $H(\phi, p) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle p(x), k_V(\phi(x), \phi(y)) p(y) \rangle d\mu(x) d\mu(y)$

Propriété : $\|v_t\|_V = H(\phi_t, p_t) = H(\phi_0, p_0) = \|v_0\|_V$ et ainsi $J(v) = H(\phi_0, p_0) + \lambda \mathcal{A}(\phi_1)$

Applications : Méthode de tir pour l'appariement approché

- La déformation solution est entièrement déterminée par les impulsions initiales p_0
- On cherche p_0 qui minimise le terme d'appariement $\mathcal{A}(\phi_1)$, où ϕ_t, v_t sont solutions de \mathcal{H}
- La distance est donnée par $H(\phi_0, p_0) = \|v_0\|_V$.

Remarque : (Condition de transversalité) $p_s(y) + T^* p_1(y) = 0$ où $p_1(y) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_y K(x, \phi_1^v(y)) d\nu(x)$, $\nu = \phi_1 \cdot \mu - \mu_{\text{cible}}$

Appariement de mesures : méthode de tir

Mesures discrètes Soient $\mu = \sum_{i=1}^m a^i \delta_{x_i}$ et $\mu_{\text{cible}} = \sum_{j=1}^n b^j \delta_{y_j}$:



$$\mu = \sum_{i=1}^m \delta_{x_i}$$

Appariement de mesures : méthode de tir

Mesures discrètes Soient $\mu = \sum_{i=1}^m a^i \delta_{x_i}$ et $\mu_{\text{cible}} = \sum_{j=1}^n b^j \delta_{y_j}$:

- Attache aux données $A(v) = \sum_{j,j'=1}^n b^j b^{j'} K(y^j, y^{j'}) + \sum_{i,i'=1}^m a^i a^{i'} K(x_t^i, x_t^{i'}) - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a^i b^j K(x_t^i, y^j)$
- Point critique : $v_t = \sum_{i=1}^m a^i k_v(\cdot, q_t^i) p_t^i$
- Dynamique Hamiltonienne : $H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{i,i'=1}^m a^i a^{i'} \langle p^i, k_v(q^i, q^{i'}) p^{i'} \rangle$

$$\dot{q}_t^i = +\nabla_{p^i} H(q, p)$$

$$\dot{p}_t^i = -\nabla_{q^i} H(q, p)$$



$$\downarrow$$
$$\mu = \sum_{i=1}^m \delta_{x_i}$$

Appariement de mesures : méthode de tir

Mesures discrètes Soient $\mu = \sum_{i=1}^m a^i \delta_{x_i}$ et $\mu_{\text{cible}} = \sum_{j=1}^n b^j \delta_{y_j}$:

- Attache aux données $A(v) = \sum_{j,j'=1}^n b^j b^{j'} K(y^j, y^{j'}) + \sum_{i,i'=1}^m a^i a^{i'} K(x_t^i, x_t^{i'}) - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a^i b^j K(x_t^i, y^j)$

- Point critique : $v_t = \sum_{i=1}^m a^i k_v(\cdot, q_t^i) p_t^i$

- Dynamique Hamiltonienne : $H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{i,i'=1}^m a^i a^{i'} \langle p^i, k_V(q^i, q^{i'}) p^{i'} \rangle$

$$\dot{q}_t^i = +\nabla_{p^i} H(q, p)$$

$$\dot{p}_t^i = -\nabla_{q^i} H(q, p)$$

Méthode de tir

- Initialisation de p_0
- Intégration des équations de Hamilton (Algo. sympléctique)
- Calcul du terme d'attachement et de son gradient
- Mettre à jour p_0 (descente de gradient, quasi-Newton *etc.*)



$$\downarrow^m$$
$$\mu = \sum_{i=1}^m \delta_{x_i}$$

Appariement de mesures : méthode de tir

Mesures discrètes Soient $\mu = \sum_{i=1}^m a^i \delta_{x_i}$ et $\mu_{\text{cible}} = \sum_{j=1}^n b^j \delta_{y_j}$:

- Attache aux données $A(v) = \sum_{j,j'=1}^n b^j b^{j'} K(y^j, y^{j'}) + \sum_{i,i'=1}^m a^i a^{i'} K(x_t^i, x_t^{i'}) - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a^i b^j K(x_t^i, y^j)$

- Point critique : $v_t = \sum_{i=1}^m a^i k_v(\cdot, q_t^i) p_t^i$

- Dynamique Hamiltonienne : $H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{i,i'=1}^m a^i a^{i'} \langle p^i, k_V(q^i, q^{i'}) p^{i'} \rangle$

$$\dot{q}_t^i = +\nabla_{p^i} H(q, p)$$

$$\dot{p}_t^i = -\nabla_{q^i} H(q, p)$$

Méthode de tir

- Initialisation de p_0
- Intégration des équations de Hamilton (Algo. sympléctique)
- Calcul du terme d'attachement et de son gradient
- Mettre à jour p_0 (descente de gradient, quasi-Newton *etc.*)

Applications :

- p_0 représente le difféomorphisme.
- Carte locale de $\mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d)$ autour d'une référence $\mu_{\text{référence}}$

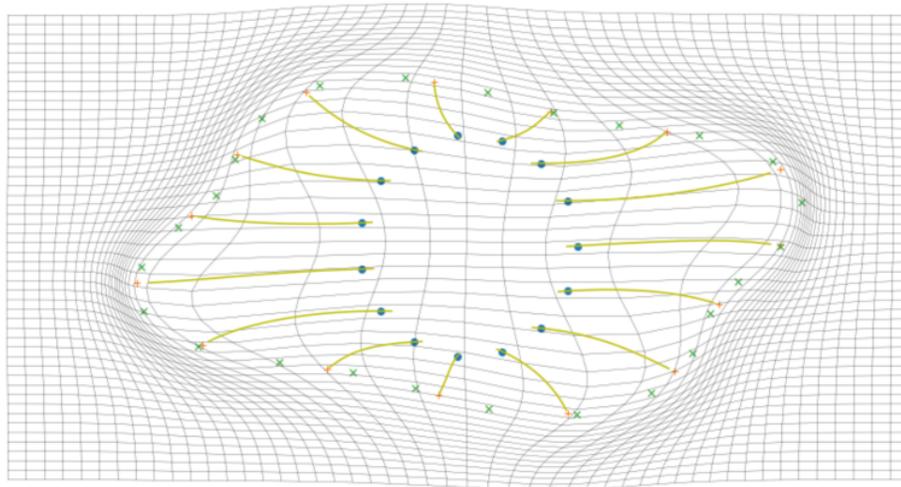


$$\downarrow^m$$
$$\mu = \sum_{i=1}^m \delta_{x_i}$$

Appariement de mesures

Applications :

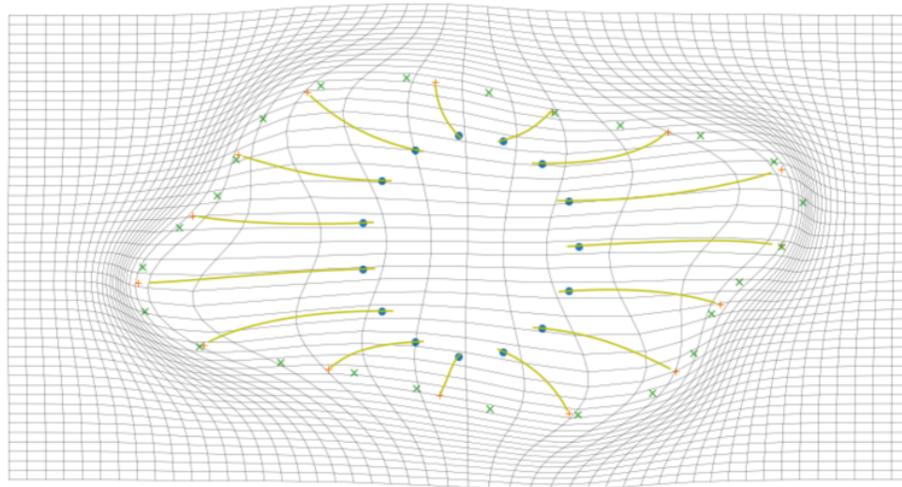
- **Appariement de points** : Ne présuppose pas un ordre et ne nécessite pas d'avoir le même nombre de points.



Appariement de mesures

Applications :

- **Appariement de points** : Ne présuppose pas un ordre et ne nécessite pas d'avoir le même nombre de points.



- **Appariement de courbes** : S variété de dimension 1 plongée dans \mathbb{R}^d :
 - μ_S mesure portée par S n'est pas à densité par rapport à la mesure de Lebesgue !
 - L'appariement de mesure n'encode pas la courbe .
 - On voudrait encoder le fait que la mesure est portée par S : courant et varifold

Transport Optimal : formulation dynamique

Soit μ et μ_{cible} de densités ρ et ρ_{cible} .

Soit v_t champs de vecteur et ϕ_t le flot associé. La densité $\rho_t = \phi_t \cdot \rho$ de $\phi_t \cdot \mu$ satisfait à

$$\partial_t \rho_t + \nabla_x \cdot (\rho_t v_t) = 0. \quad (\mathcal{C})$$



Transport Optimal : formulation dynamique

Soit μ et μ_{cible} de densités ρ et ρ_{cible} .

Soit v_t champs de vecteur et ϕ_t le flot associé. La densité $\rho_t = \phi_t \cdot \rho$ de $\phi_t \cdot \mu$ satisfait à

$$\partial_t \rho_t + \nabla_x \cdot (\rho_t v_t) = 0. \quad (\mathcal{C})$$

Transport Optimal : Trouver ϕ bijective t.q. $\phi \cdot \rho = \rho_{\text{cible}}$ et qui minimise $J(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \|\phi(x) - x\|^2 \rho(x) dx$

$$W_2(\rho, \rho_{\text{cible}}) = \inf_{\phi} J(\phi)$$

Transport Optimal : formulation dynamique

Soit μ et μ_{cible} de densités ρ et ρ_{cible} .

Soit v_t champs de vecteur et ϕ_t le flot associé. La densité $\rho_t = \phi_t \cdot \rho$ de $\phi_t \cdot \mu$ satisfait à

$$\partial_t \rho_t + \nabla_x \cdot (\rho_t v_t) = 0. \quad (\mathcal{C})$$

Transport Optimal : Trouver ϕ bijective t.q. $\phi \cdot \rho = \rho_{\text{cible}}$ et qui minimise $J(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \|\phi(x) - x\|^2 \rho(x) dx$

$$W_2(\rho, \rho_{\text{cible}}) = \inf_{\phi} J(\phi)$$

Proposition : [Benamou, Brenier, 2000]

$$W_2(\rho, \rho_{\text{cible}}) = \inf_{\phi, v} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \rho_t \|v_t(x)\|^2 dx dt$$

où (ρ, v) satisfait (\mathcal{C}) et $\rho_0 = \rho, \rho_1 = \rho_{\text{cible}}$.

Pas de régularité a priori sur la fonction ϕ .

Transport Optimal : formulation dynamique

Soit μ et μ_{cible} de densités ρ et ρ_{cible} .

Soit v_t champs de vecteur et ϕ_t le flot associé. La densité $\rho_t = \phi_t \cdot \rho$ de $\phi_t \cdot \mu$ satisfait à

$$\partial_t \rho_t + \nabla_x \cdot (\rho_t v_t) = 0. \quad (\mathcal{C})$$

Transport Optimal : Trouver ϕ bijective t.q. $\phi \cdot \rho = \rho_{\text{cible}}$ et qui minimise $J(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \|\phi(x) - x\|^2 \rho(x) dx$

$$W_2(\rho, \rho_{\text{cible}}) = \inf_{\phi} J(\phi)$$

Proposition : [Benamou, Brenier, 2000]

$$W_2(\rho, \rho_{\text{cible}}) = \inf_{\phi, v} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \rho_t \|v_t(x)\|^2 dx dt$$

où (ρ, v) satisfait (\mathcal{C}) et $\rho_0 = \rho, \rho_1 = \rho_{\text{cible}}$.

Pas de régularité a priori sur la fonction ϕ .

Transport par difféomorphisme : (appariement exact) Trouver v (ou ϕ) qui minimise

$$J(v) = \int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt$$

avec les mêmes conditions aux bords.

Régularité sur ϕ qui dépend de V .

Transport Optimal : formulation dynamique

Soit μ et μ_{cible} de densités ρ et ρ_{cible} .

Soit v_t champs de vecteur et ϕ_t le flot associé. La densité $\rho_t = \phi_t \cdot \rho$ de $\phi_t \cdot \mu$ satisfait à

$$\partial_t \rho_t + \nabla_x \cdot (\rho_t v_t) = 0. \quad (\mathcal{C})$$

Transport Optimal : Trouver ϕ bijective t.q. $\phi \cdot \rho = \rho_{\text{cible}}$ et qui minimise $J(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \|\phi(x) - x\|^2 \rho(x) dx$

$$W_2(\rho, \rho_{\text{cible}}) = \inf_{\phi} J(\phi)$$

Proposition : [Benamou, Brenier, 2000]

$$W_2(\rho, \rho_{\text{cible}}) = \inf_{\phi, v} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \rho_t \|v_t(x)\|^2 dx dt$$

où (ρ, v) satisfait (\mathcal{C}) et $\rho_0 = \rho, \rho_1 = \rho_{\text{cible}}$.

Pas de régularité a priori sur la fonction ϕ .

Transport par difféomorphisme : (appariement exact) Trouver v (ou ϕ) qui minimise

$$J(v) = \int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt$$

avec les mêmes conditions aux bords.

Régularité sur ϕ qui dépend de V .

Méthode(s) hybride(s) :

- Distance de Wasserstein comme terme d'appariement

Pour aller plus loin *Diffeomorphism, Optimal Transport and Applications to Imaging* [F.-X. Vialard, 2017]



5.

AUTRES OBJETS

- Courants et varifolds
- Images

Appariement de courants et varifolds

↪ Généraliser la notion de mesure à des volumes de dimension inférieure à la dimension ambiante :

- Surfaces dans \mathbb{R}^3
- Courbes dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3

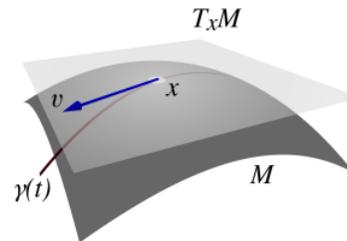


Appariement de courants et varifolds

↪ Généraliser la notion de mesure à des volumes de dimension inférieure à la dimension ambiante :

- Surfaces dans \mathbb{R}^3
- Courbes dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3

On s'intéresse au plan tangent [F. Paulin, 2006]

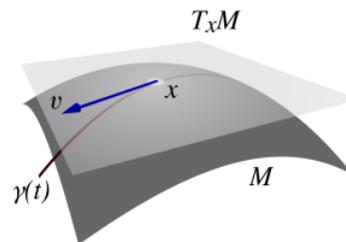


Appariement de courants et varifolds

↳ Généraliser la notion de mesure à des volumes de dimension inférieure à la dimension ambiante :

- Surfaces dans \mathbb{R}^3
- Courbes dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3

On s'intéresse au plan tangent [F. Paulin, 2006]



Courant Soit $S = \text{Im}\gamma$, $\gamma : I \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$, variété de dimension k et ϕ un difféomorphisme

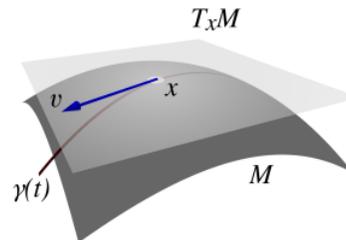
- Soit $\mathcal{M}^k(\mathbb{R}^d)$ l'espace des courants dual de l'espace $\Omega^k(\mathbb{R}^d) = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d, \wedge^k \mathbb{R}^d)$ (forme différentielle)
 - **Courant associé à S** : $\mu_S(\omega) = \int_S \omega \triangleq \int_I \gamma^* \omega$, $\mu_S \in \mathcal{M}^k(\mathbb{R}^d)$
 - **Déformation** : Si $\mu \in \mathcal{M}^k(\mathbb{R}^d)$, $\phi \cdot \mu \triangleq \phi_{\#} \mu$, où $\phi_{\#} \mu(\omega) \triangleq \mu(\phi^* \omega)$
 - **Chgt variables** $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^d)$, $\phi^* \omega(x)(x_1, \dots, x_k) = \omega \circ \phi(x)(\nabla \phi x_1, \dots, \nabla \phi x_k)$, où $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$

Appariement de courants et varifolds

↪ Généraliser la notion de mesure à des volumes de dimension inférieure à la dimension ambiante :

- Surfaces dans \mathbb{R}^3
- Courbes dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3

On s'intéresse au plan tangent [F. Paulin, 2006]



Courant Soit $S = \text{Im}\gamma$, $\gamma : I \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$, variété de dimension k et ϕ un difféomorphisme

- Soit $\mathcal{M}^k(\mathbb{R}^d)$ l'espace des courants dual de l'espace $\Omega^k(\mathbb{R}^d) = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d, \wedge^k \mathbb{R}^d)$ (forme différentielle)
 - **Courant associé à S** : $\mu_S(\omega) = \int_S \omega \triangleq \int_I \gamma^* \omega$, $\mu_S \in \mathcal{M}^k(\mathbb{R}^d)$
 - **Déformation** : Si $\mu \in \mathcal{M}^k(\mathbb{R}^d)$, $\phi \cdot \mu \triangleq \phi_{\#} \mu$, où $\phi_{\#} \mu(\omega) \triangleq \mu(\phi^* \omega)$
 - **Chgt variables** $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^d)$, $\phi^* \omega(x)(x_1, \dots, x_k) = \omega \circ \phi(x)(\nabla \phi x_1, \dots, \nabla \phi x_k)$, où $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$

Théorème fondamental :

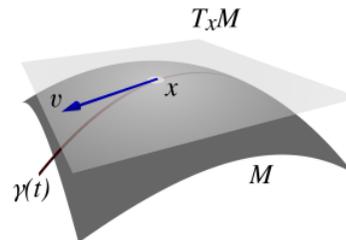
$$\phi_{\#} \mu_S = \mu_{\phi(S)}$$

Appariement de courants et varifolds

↳ Généraliser la notion de mesure à des volumes de dimension inférieure à la dimension ambiante :

- Surfaces dans \mathbb{R}^3
- Courbes dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3

On s'intéresse au plan tangent [F. Paulin, 2006]



Courant Soit $S = \text{Im}\gamma$, $\gamma : I \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$, variété de dimension k et ϕ un difféomorphisme

- Soit $\mathcal{M}^k(\mathbb{R}^d)$ l'espace des courants dual de l'espace $\Omega^k(\mathbb{R}^d) = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d, \wedge^k \mathbb{R}^d)$ (forme différentielle)
 - **Courant associé à S** : $\mu_S(\omega) = \int_S \omega \triangleq \int_I \gamma^* \omega$, $\mu_S \in \mathcal{M}^k(\mathbb{R}^d)$
 - **Déformation** : Si $\mu \in \mathcal{M}^k(\mathbb{R}^d)$, $\phi \cdot \mu \triangleq \phi_{\#} \mu$, où $\phi_{\#} \mu(\omega) \triangleq \mu(\phi^* \omega)$
 - **Chgt variables** $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^d)$, $\phi^* \omega(x)(x_1, \dots, x_k) = \omega \circ \phi(x)(\nabla \phi x_1, \dots, \nabla \phi x_k)$, où $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$
 - **Proposition** : $\mu_S(\omega) = \int_S \omega(x)(\xi(x)) d\mathcal{H}^k(x)$ où $\xi(x) \in T_x S$ normé

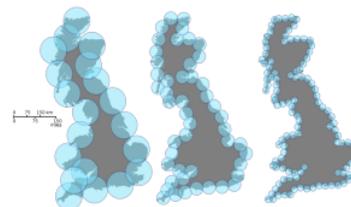
Théorème fondamental :

$$\phi_{\#} \mu_S = \mu_{\phi(S)}$$

Mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^d)$: [H. Federer, 1969, J.-F. Badaud, 2000]

k -dimensionnelle sur \mathbb{R}^d :

- \mathcal{H}^0 mesure de comptage, \mathcal{H}^d mesure de Lebesgue, invariance par isométrie
- Formule de l'aire $\mathcal{H}^d(\phi(A)) = \int_A \sqrt{\det(d\phi(x) \cdot d\phi(x))} dx$



Appariement de courants et varifolds

Soit $\mu_S(\omega) = \int_S \omega(x, T(x)) d\mathcal{H}^k(x)$, où $\omega : \mathbb{R}^d \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$. On pose $E = \mathbb{R}^d \times \mathcal{T}$



Appariement de courants et varifolds

Soit $\mu_S(\omega) = \int_S \omega(x, T(x)) d\mathcal{H}^k(x)$, où $\omega : \mathbb{R}^d \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$. On pose $E = \mathbb{R}^d \times \mathcal{T}$

Distance sur les courants et varifolds :

- Soit $W \subset C^0(E, \mathbb{R})$ un RKHS de noyau $K : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, où $K((x, S), (y, T)) = k_d(x, y)k_{\mathcal{T}}(S, T)$
- $\mu_S \in W^*$ s'identifie à $\mu_S^K = \int_S k_d(\cdot, x)k_{\mathcal{T}}(\cdot, T_x) d\mathcal{H}^k(x) \in W$
- $\langle \mu_S, \mu_{S'} \rangle_{W^*} = \langle \mu_S^K, \mu_{S'}^K \rangle_W = \int_{S \times S'} k_d(x, y)k_{\mathcal{T}}(T_x, T_y) d\mathcal{H}^k(x) d\mathcal{H}^k(y)$

Appariement de courants et varifolds

Soit $\mu_S(\omega) = \int_S \omega(x, T(x)) d\mathcal{H}^k(x)$, où $\omega : \mathbb{R}^d \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$. On pose $E = \mathbb{R}^d \times \mathcal{T}$

Distance sur les courants et varifolds :

- Soit $W \subset C^0(E, \mathbb{R})$ un RKHS de noyau $K : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, où $K((x, S), (y, T)) = k_d(x, y)k_{\mathcal{T}}(S, T)$
- $\mu_S \in W^*$ s'identifie à $\mu_S^K = \int_S k_d(\cdot, x)k_{\mathcal{T}}(\cdot, T_x) d\mathcal{H}^k(x) \in W$
- $\langle \mu_S, \mu_{S'} \rangle_{W^*} = \langle \mu_S^K, \mu_{S'}^K \rangle_W = \int_{S \times S'} k_d(x, y)k_{\mathcal{T}}(T_x, T_y) d\mathcal{H}^k(x) d\mathcal{H}^k(y)$

Noyaux : [I. Kaltenmark, B. Charlier et N. Charon 2017] Courbes dans \mathbb{R}^2 ou surface dans \mathbb{R}^3

- $k_d(x, y) \equiv k_d(|x - y|)$ Caractéristique et $k_{\mathcal{T}}(T, T) > 0$
- À propos de $k_{\mathcal{T}}(t_1, t_2) = \gamma(t_1 \cdot t_2)$ (dès que $\dim(S) = 1$ ou $\text{codim}(S) = 1$) :
 - Distributions $\gamma(u) = 1$
 - Courants : $\gamma(u) = u$
 - varifolds non orientées : $\gamma(u) = u^2$
 - varifolds orientées : $\gamma(u) = \exp(-u^2/\sigma^2)$

Appariement de courants et varifolds

Soit $\mu_S(\omega) = \int_S \omega(x, T(x)) d\mathcal{H}^k(x)$, où $\omega : \mathbb{R}^d \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$.



Appariement de courants et varifolds

Soit $\mu_S(\omega) = \int_S \omega(x, T(x)) d\mathcal{H}^k(x)$, où $\omega : \mathbb{R}^d \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$.

Discretisation :

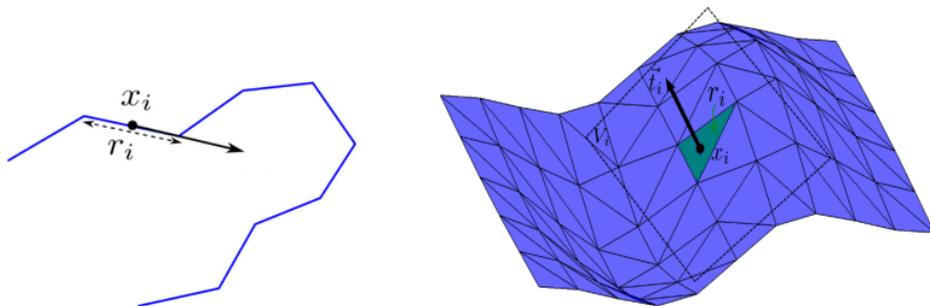
- Soit $\mu_S \approx \sum_{i=1}^n r_i \delta_{x_i}^{T(x_i)}$ où r_i et $T(x_i)$ sont respectivement le k -volume et l'espace tangent en x_i
- Si $\mu_X \approx \sum_{i=1}^m r_i^X \delta_{x_i}^{T(x_i)}$ et $\mu_Y \approx \sum_{j=1}^n r_j^Y \delta_{y_j}^{T(y_j)}$ alors $\langle \mu_X, \mu_Y \rangle = \sum_{i,j} r_i^X r_j^Y k_d(x_i, y_j) k_{\mathcal{T}}(T(x_i), T(y_j))$

Appariement de courants et varifolds

Soit $\mu_S(\omega) = \int_S \omega(x, T(x)) d\mathcal{H}^k(x)$, où $\omega : \mathbb{R}^d \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$.

Discretisation :

- Soit $\mu_S \approx \sum_{i=1}^n r_i \delta_{x_i}^{T(x_i)}$ où r_i et $T(x_i)$ sont respectivement le k -volume et l'espace tangent en x_i
- Si $\mu_X \approx \sum_{i=1}^m r_i^X \delta_{x_i}^{T(x_i)}$ et $\mu_Y \approx \sum_{j=1}^n r_j^Y \delta_{y_j}^{T(y_j)}$ alors $\langle \mu_X, \mu_Y \rangle = \sum_{i,j} r_i^X r_j^Y k_d(x_i, y_j) k_{\mathcal{T}}(T(x_i), T(y_j))$



Issue de [N. Charon, 2025]

Transport d'images

Deformation d'une image I vue comme fonction $I : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$



Transport d'images

Deformation d'une image I vue comme fonction $I : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

Action de groupe de Lie G_V Soit $\phi \in G_V(\Omega)$ et $v \in \mathfrak{g} = L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ le champ de vecteur associé.

- Action : $\phi \cdot I = I \circ \phi^{-1}$
- Action infinitésimale : $v \cdot I \triangleq \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\phi_t \cdot I) = -v \cdot \nabla I$: **transport par advection**

L'image est transportée selon : $\frac{\partial I_t}{\partial t} + v_t \cdot \nabla I_t = 0$

Transport d'images

Deformation d'une image I vue comme fonction $I : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

Action de groupe de Lie G_V Soit $\phi \in G_V(\Omega)$ et $v \in \mathfrak{g} = L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ le champ de vecteur associé.

- Action : $\phi \cdot I = I \circ \phi^{-1}$

- Action infinitesimale : $v \cdot I \triangleq \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\phi_t \cdot I) = -v \cdot \nabla I$: transport par advection

L'image est transportée selon : $\frac{\partial I_t}{\partial t} + v_t \cdot \nabla I_t = 0$

Comment définir un terme d'appariement entre deux images ?

- Norme $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$: (e.g. [M. Beg et al, 2005])
 - Bonne première approximation, rapide ;
 - Quelques artéfacts.
- Transport optimal $W_\varepsilon(\phi \cdot I_0, I_{\text{cible}})$: [Peyré, Cuturi, 2019]
 - facile à calculer, interprétation géométrique ;
 - Nécessite un hyperparamètre de régularisation entropique ε .
- Distance MMD par plongement des images dans un RKHS :
 - problème de robustesse lié au choix de noyau.

Transport d'images

Deformation d'une image I vue comme fonction $I : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

Action de groupe de Lie G_V Soit $\phi \in G_V(\Omega)$ et $v \in \mathfrak{g} = L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ le champ de vecteur associé.

- Action : $\phi \cdot I = I \circ \phi^{-1}$
- Action infinitesimale : $v \cdot I \triangleq \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\phi_t \cdot I) = -v \cdot \nabla I$: transport par advection

L'image est transportée selon : $\frac{\partial I_t}{\partial t} + v_t \cdot \nabla I_t = 0$

Comment définir un terme d'appariement entre deux images ?

- Norme $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$: (e.g. [M. Beg et al, 2005])
 - Bonne première approximation, rapide ;
 - Quelques artefacts.
- Transport optimal $W_\varepsilon(\phi \cdot I_0, I_{\text{cible}})$: [Peyré, Cuturi, 2019]
 - facile à calculer, interprétation géométrique ;
 - Nécessite un hyperparamètre de régularisation entropique ε .
- Distance MMD par plongement des images dans un RKHS :
 - problème de robustesse lié au choix de noyau.

Application des algèbres de Lie à ce problème

- The Momentum maps representation of images [M. Bruveris et. al]

Transport d'images



Apprendre un difféomorphisme entre deux images en pratique ? Soient $\mathbf{q} = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la position des pixels et $\mathbf{p} = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ leurs impulsions.

Transport d'images



Apprendre un difféomorphisme entre deux images en pratique ? Soient $\mathbf{q} = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la position des pixels et $\mathbf{p} = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ leurs impulsions.

- Conditions initiales $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, I_0)$ avec \mathbf{q}_0 les coordonnées initiales des pixels, \mathbf{p}_0 arbitraire et I_0 l'image initiale.



Apprendre un difféomorphisme entre deux images en pratique ? Soient $\mathbf{q} = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la position des pixels et $\mathbf{p} = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ leurs impulsions.

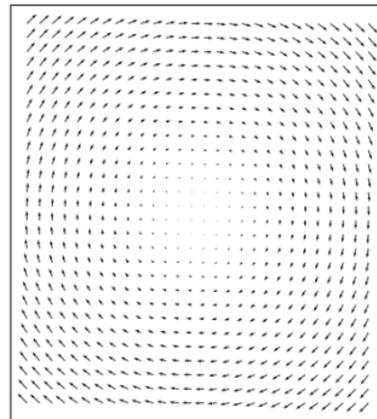
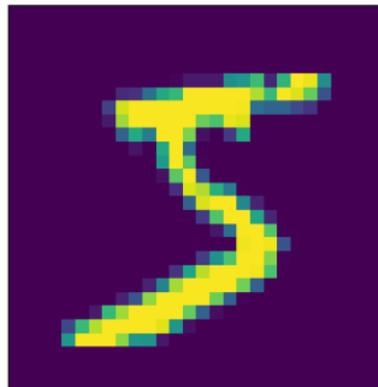
- Conditions initiales $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, I_0)$ avec \mathbf{q}_0 les coordonnées initiales des pixels, \mathbf{p}_0 arbitraire et I_0 l'image initiale.
- Optimisation du coût $L(\mathbf{p}_0) = H(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) + \lambda \|\phi_1 \cdot I_0 - I_{\text{cible}}\|^2$.
 - Partant de $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, I_0)$ on résout le système hamiltonien (schéma symplectique Euler-Maruyama).
 - Transport par advection : $I_{t+\Delta t} = I_t + \Delta t (v_t \cdot \nabla I_t)$ avec $\mathbf{v} = K(\mathbf{q}_t, \mathbf{q}_t) \mathbf{p}_t$.
On peut aussi interpoler I_t sur la grille déformée.

Transport d'images

Apprendre un difféomorphisme entre deux images en pratique ? Soient $\mathbf{q} = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la position des pixels et $\mathbf{p} = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ leurs impulsions.

- Conditions initiales $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, I_0)$ avec \mathbf{q}_0 les coordonnées initiales des pixels, \mathbf{p}_0 arbitraire et I_0 l'image initiale.
- Optimisation du coût $L(\mathbf{p}_0) = H(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) + \lambda \|\phi_1 \cdot I_0 - I_{\text{cible}}\|^2$.
 - Partant de $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, I_0)$ on résout le système hamiltonien (schéma symplectique Euler-Maruyama).
 - Transport par advection : $I_{t+\Delta t} = I_t + \Delta t (v_t \cdot \nabla I_t)$ avec $\mathbf{v} = K(\mathbf{q}_t, \mathbf{q}_t) \mathbf{p}_t$.
On peut aussi interpoler I_t sur la grille déformée.

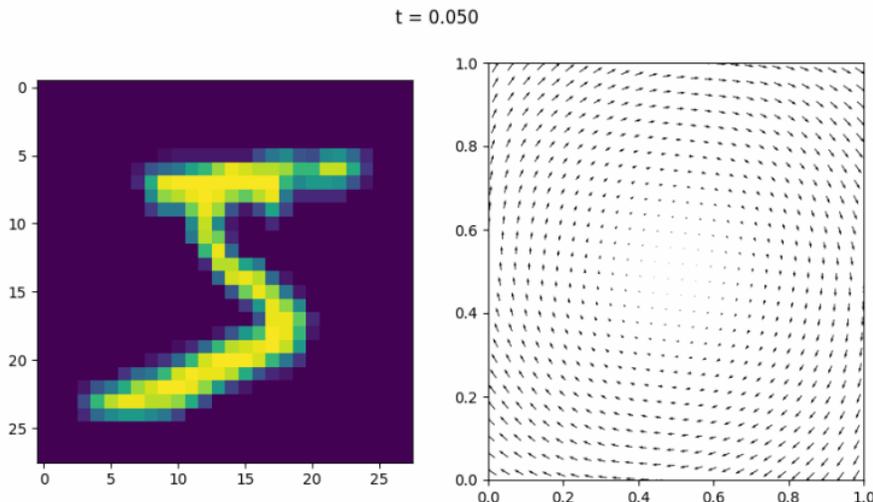
t = 0.000



Transport d'images

Apprendre un difféomorphisme entre deux images en pratique ? Soient $\mathbf{q} = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la position des pixels et $\mathbf{p} = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ leurs impulsions.

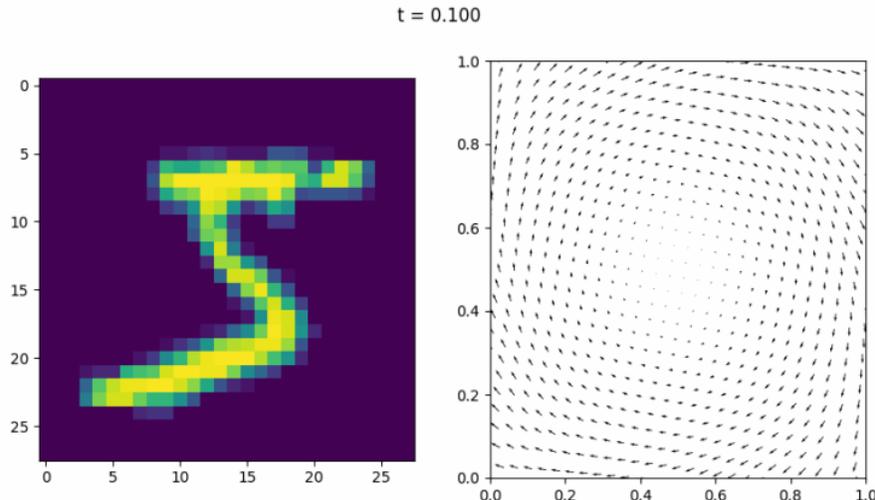
- Conditions initiales $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, I_0)$ avec \mathbf{q}_0 les coordonnées initiales des pixels, \mathbf{p}_0 arbitraire et I_0 l'image initiale.
- Optimisation du coût $L(\mathbf{p}_0) = H(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) + \lambda \|\phi_1 \cdot I_0 - I_{\text{cible}}\|^2$.
 - Partant de $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, I_0)$ on résout le système hamiltonien (schéma symplectique Euler-Maruyama).
 - Transport par advection : $I_{t+\Delta t} = I_t + \Delta t (v_t \cdot \nabla I_t)$ avec $\mathbf{v} = K(\mathbf{q}_t, \mathbf{q}_t) \mathbf{p}_t$.
On peut aussi interpoler I_t sur la grille déformée.



Transport d'images

Apprendre un difféomorphisme entre deux images en pratique ? Soient $\mathbf{q} = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la position des pixels et $\mathbf{p} = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ leurs impulsions.

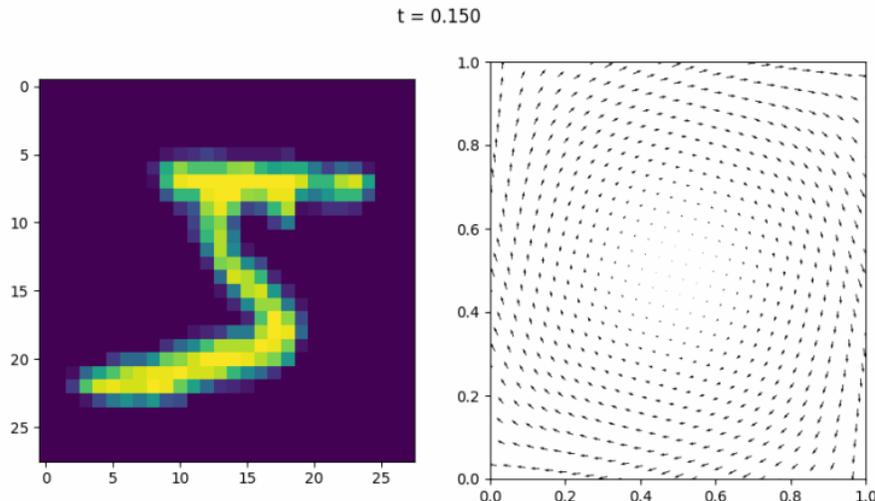
- Conditions initiales $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, I_0)$ avec \mathbf{q}_0 les coordonnées initiales des pixels, \mathbf{p}_0 arbitraire et I_0 l'image initiale.
- Optimisation du coût $L(\mathbf{p}_0) = H(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) + \lambda \|\phi_1 \cdot I_0 - I_{\text{cible}}\|^2$.
 - Partant de $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, I_0)$ on résout le système hamiltonien (schéma symplectique Euler-Maruyama).
 - Transport par advection : $I_{t+\Delta t} = I_t + \Delta t (v_t \cdot \nabla I_t)$ avec $\mathbf{v} = K(\mathbf{q}_t, \mathbf{q}_t) \mathbf{p}_t$.
On peut aussi interpoler I_t sur la grille déformée.



Transport d'images

Apprendre un difféomorphisme entre deux images en pratique ? Soient $\mathbf{q} = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la position des pixels et $\mathbf{p} = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ leurs impulsions.

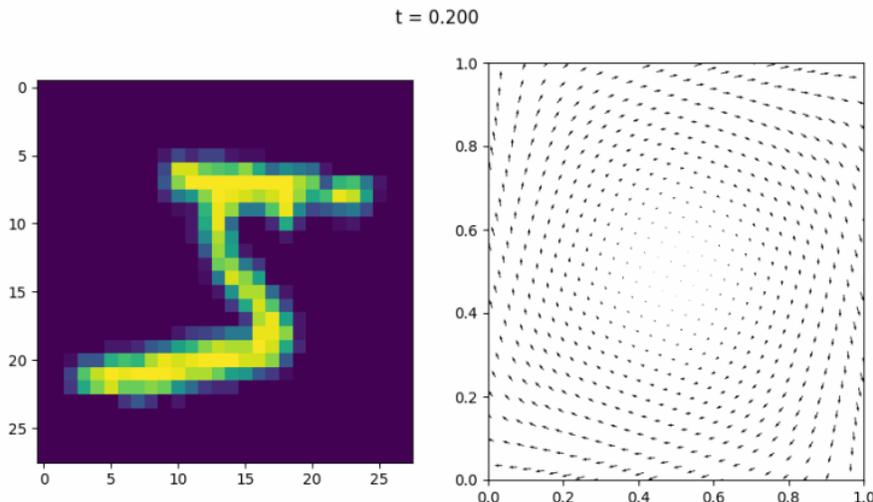
- Conditions initiales $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, I_0)$ avec \mathbf{q}_0 les coordonnées initiales des pixels, \mathbf{p}_0 arbitraire et I_0 l'image initiale.
- Optimisation du coût $L(\mathbf{p}_0) = H(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) + \lambda \|\phi_1 \cdot I_0 - I_{\text{cible}}\|^2$.
 - Partant de $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, I_0)$ on résout le système hamiltonien (schéma symplectique Euler-Maruyama).
 - Transport par advection : $I_{t+\Delta t} = I_t + \Delta t (v_t \cdot \nabla I_t)$ avec $\mathbf{v} = K(\mathbf{q}_t, \mathbf{q}_t) \mathbf{p}_t$.
On peut aussi interpoler I_t sur la grille déformée.



Transport d'images

Apprendre un difféomorphisme entre deux images en pratique ? Soient $\mathbf{q} = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la position des pixels et $\mathbf{p} = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ leurs impulsions.

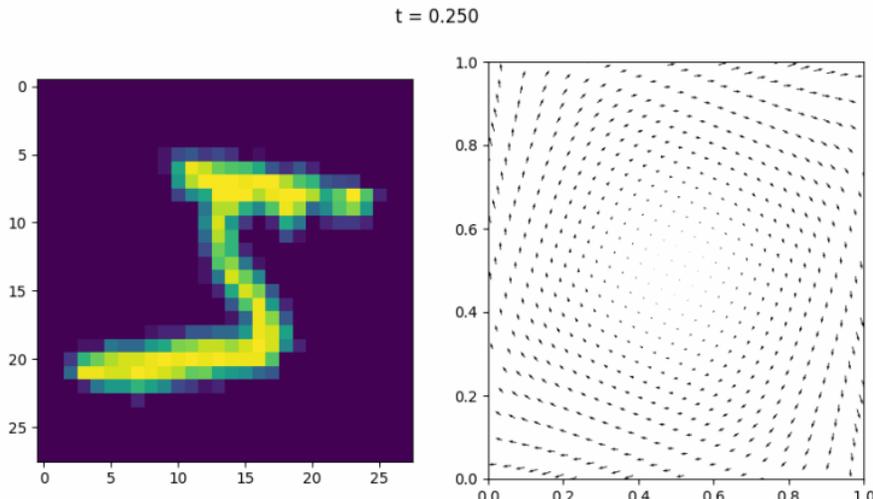
- Conditions initiales $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, I_0)$ avec \mathbf{q}_0 les coordonnées initiales des pixels, \mathbf{p}_0 arbitraire et I_0 l'image initiale.
- Optimisation du coût $L(\mathbf{p}_0) = H(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) + \lambda \|\phi_1 \cdot I_0 - I_{\text{cible}}\|^2$.
 - Partant de $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, I_0)$ on résout le système hamiltonien (schéma symplectique Euler-Maruyama).
 - Transport par advection : $I_{t+\Delta t} = I_t + \Delta t (v_t \cdot \nabla I_t)$ avec $\mathbf{v} = K(\mathbf{q}_t, \mathbf{q}_t) \mathbf{p}_t$.
On peut aussi interpoler I_t sur la grille déformée.



Transport d'images

Apprendre un difféomorphisme entre deux images en pratique ? Soient $\mathbf{q} = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la position des pixels et $\mathbf{p} = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ leurs impulsions.

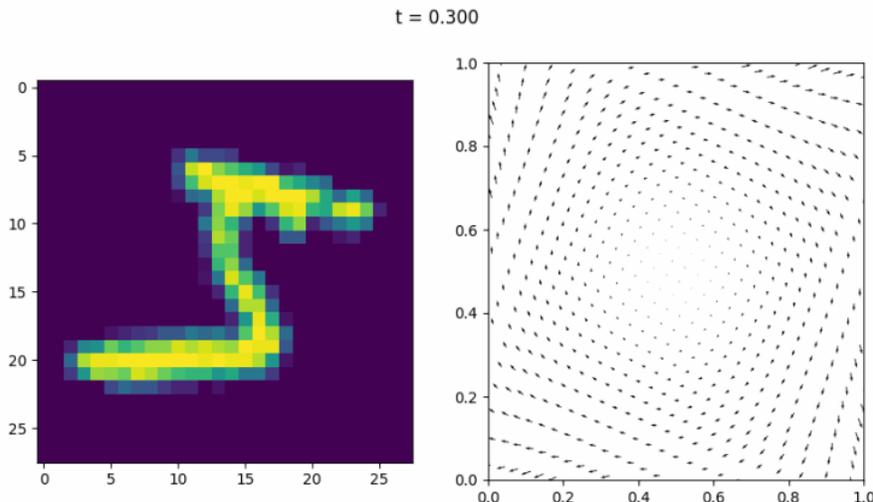
- Conditions initiales $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, I_0)$ avec \mathbf{q}_0 les coordonnées initiales des pixels, \mathbf{p}_0 arbitraire et I_0 l'image initiale.
- Optimisation du coût $L(\mathbf{p}_0) = H(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) + \lambda \|\phi_1 \cdot I_0 - I_{\text{cible}}\|^2$.
 - Partant de $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, I_0)$ on résout le système hamiltonien (schéma symplectique Euler-Maruyama).
 - Transport par advection : $I_{t+\Delta t} = I_t + \Delta t (v_t \cdot \nabla I_t)$ avec $\mathbf{v} = K(\mathbf{q}_t, \mathbf{q}_t) \mathbf{p}_t$.
On peut aussi interpoler I_t sur la grille déformée.



Transport d'images

Apprendre un difféomorphisme entre deux images en pratique ? Soient $\mathbf{q} = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la position des pixels et $\mathbf{p} = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ leurs impulsions.

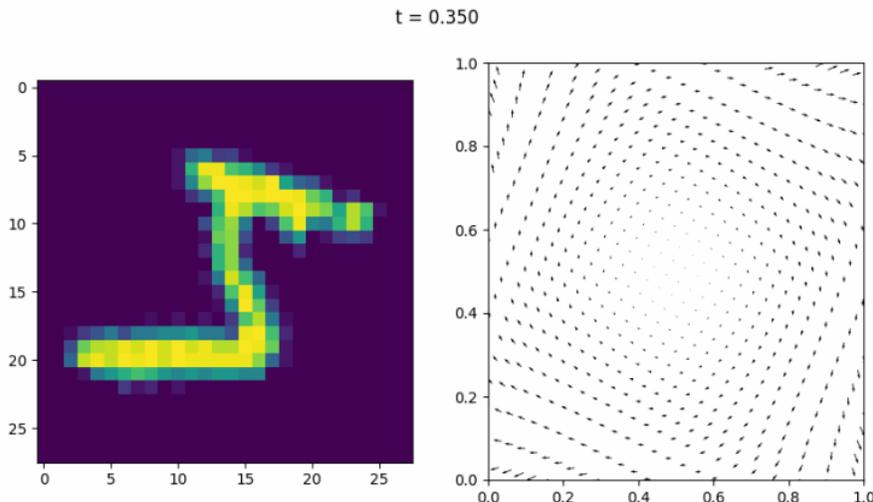
- Conditions initiales $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, I_0)$ avec \mathbf{q}_0 les coordonnées initiales des pixels, \mathbf{p}_0 arbitraire et I_0 l'image initiale.
- Optimisation du coût $L(\mathbf{p}_0) = H(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) + \lambda \|\phi_1 \cdot I_0 - I_{\text{cible}}\|^2$.
 - Partant de $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, I_0)$ on résout le système hamiltonien (schéma symplectique Euler-Maruyama).
 - Transport par advection : $I_{t+\Delta t} = I_t + \Delta t (v_t \cdot \nabla I_t)$ avec $\mathbf{v} = K(\mathbf{q}_t, \mathbf{q}_t) \mathbf{p}_t$.
On peut aussi interpoler I_t sur la grille déformée.



Transport d'images

Apprendre un difféomorphisme entre deux images en pratique ? Soient $\mathbf{q} = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la position des pixels et $\mathbf{p} = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ leurs impulsions.

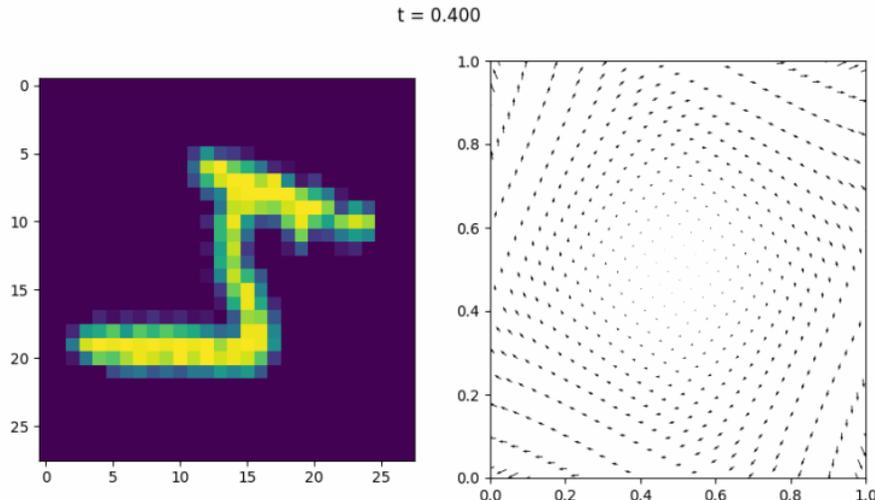
- Conditions initiales $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, I_0)$ avec \mathbf{q}_0 les coordonnées initiales des pixels, \mathbf{p}_0 arbitraire et I_0 l'image initiale.
- Optimisation du coût $L(\mathbf{p}_0) = H(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) + \lambda \|\phi_1 \cdot I_0 - I_{\text{cible}}\|^2$.
 - Partant de $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, I_0)$ on résout le système hamiltonien (schéma symplectique Euler-Maruyama).
 - Transport par advection : $I_{t+\Delta t} = I_t + \Delta t (v_t \cdot \nabla I_t)$ avec $\mathbf{v} = K(\mathbf{q}_t, \mathbf{q}_t) \mathbf{p}_t$.
On peut aussi interpoler I_t sur la grille déformée.



Transport d'images

Apprendre un difféomorphisme entre deux images en pratique ? Soient $\mathbf{q} = (q_{i,j})_{1, \leq i, j \leq n}$ la position des pixels et $\mathbf{p} = (p_{i,j})_{1, \leq i, j \leq n}$ leurs impulsions.

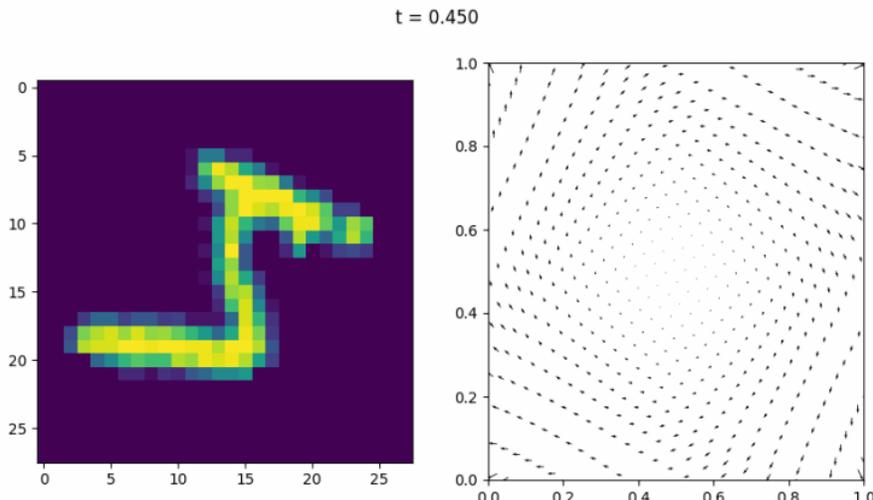
- Conditions initiales $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, I_0)$ avec \mathbf{q}_0 les coordonnées initiales des pixels, \mathbf{p}_0 arbitraire et I_0 l'image initiale.
- Optimisation du coût $L(\mathbf{p}_0) = H(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) + \lambda \|\phi_1 \cdot I_0 - I_{\text{cible}}\|^2$.
 - Partant de $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, I_0)$ on résout le système hamiltonien (schéma symplectique Euler-Maruyama).
 - Transport par advection : $I_{t+\Delta t} = I_t + \Delta t (v_t \cdot \nabla I_t)$ avec $\mathbf{v} = K(\mathbf{q}_t, \mathbf{q}_t) \mathbf{p}_t$.
On peut aussi interpoler I_t sur la grille déformée.



Transport d'images

Apprendre un difféomorphisme entre deux images en pratique ? Soient $\mathbf{q} = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la position des pixels et $\mathbf{p} = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ leurs impulsions.

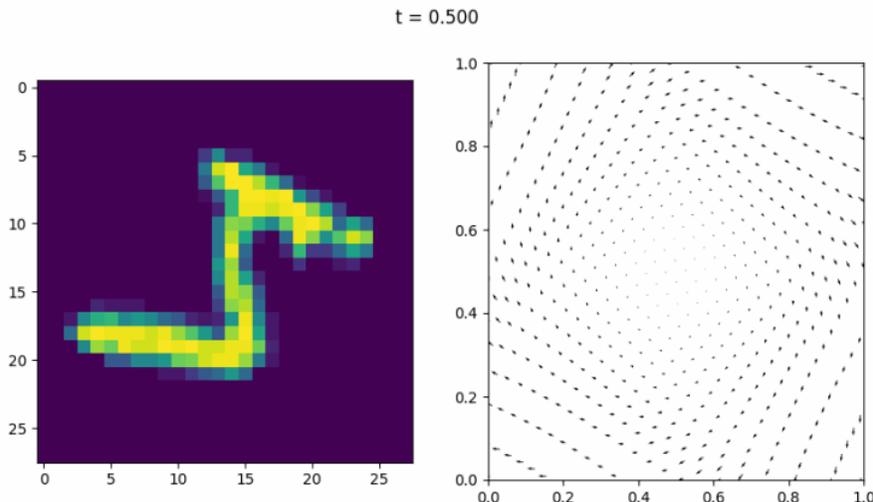
- Conditions initiales $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, I_0)$ avec \mathbf{q}_0 les coordonnées initiales des pixels, \mathbf{p}_0 arbitraire et I_0 l'image initiale.
- Optimisation du coût $L(\mathbf{p}_0) = H(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) + \lambda \|\phi_1 \cdot I_0 - I_{\text{cible}}\|^2$.
 - Partant de $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, I_0)$ on résout le système hamiltonien (schéma symplectique Euler-Maruyama).
 - Transport par advection : $I_{t+\Delta t} = I_t + \Delta t (v_t \cdot \nabla I_t)$ avec $\mathbf{v} = K(\mathbf{q}_t, \mathbf{q}_t) \mathbf{p}_t$.
On peut aussi interpoler I_t sur la grille déformée.



Transport d'images

Apprendre un difféomorphisme entre deux images en pratique ? Soient $\mathbf{q} = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la position des pixels et $\mathbf{p} = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ leurs impulsions.

- Conditions initiales $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, I_0)$ avec \mathbf{q}_0 les coordonnées initiales des pixels, \mathbf{p}_0 arbitraire et I_0 l'image initiale.
- Optimisation du coût $L(\mathbf{p}_0) = H(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) + \lambda \|\phi_1 \cdot I_0 - I_{\text{cible}}\|^2$.
 - Partant de $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, I_0)$ on résout le système hamiltonien (schéma symplectique Euler-Maruyama).
 - Transport par advection : $I_{t+\Delta t} = I_t + \Delta t (v_t \cdot \nabla I_t)$ avec $\mathbf{v} = K(\mathbf{q}_t, \mathbf{q}_t) \mathbf{p}_t$.
On peut aussi interpoler I_t sur la grille déformée.



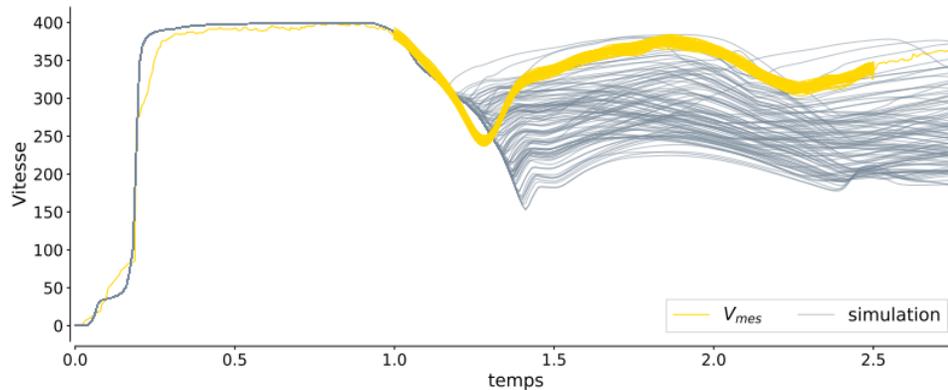
6.

EXEMPLES

- Courbes de vitesse lors d'endommagement
- Images de turbulence
- Chiffres Mnist : Ajout d'un terme source

Courbes de vitesse d'endommagement

Calibration de code : [Perrin, Pillon, 2018] $V_{mes}(x)$ et $V_{sim}(x, \beta)$ profils de vitesse expérimental et simulés, x conditions expérimentales.



Problème inverse :

- On cherche le paramètre β qui permet de trouver au mieux la courbe expérimentale : minimiser

$$d(V_{mes}(x), V_{sim}(x, \beta))$$

- On se donne un plan d'expérience $V_i = V_{sim}(\beta^i)$ profils de vitesse simulés

Courbes de vitesse d'endommagement

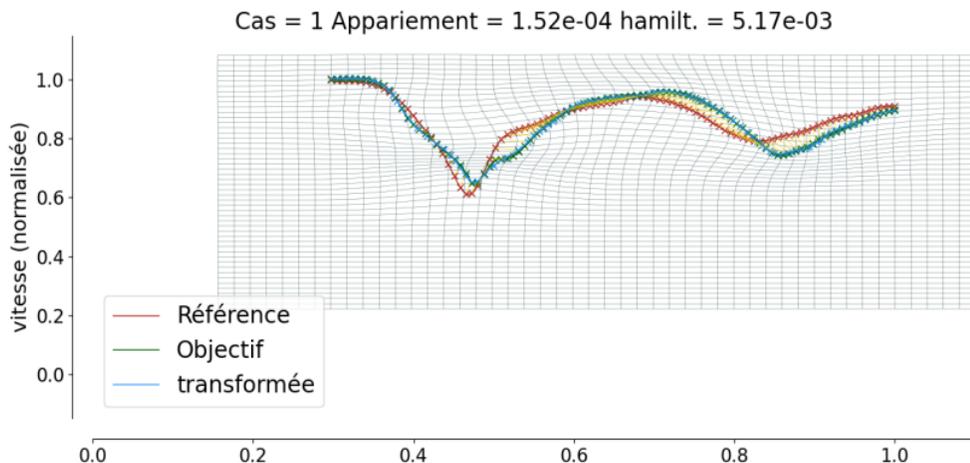
Stratégie Iddmm déterministe : Les courbes de vitesses $V_i = V_{\text{sim}}(\beta^i)$ sont modélisés par des courants

- Calcul de $d(V_{\text{mes}}, V^i) = H(V_{\text{mes}}, p_0^i) : \phi_i$ tel que $\phi^i \cdot V_{\text{mes}} \approx V^i$ caractérisé par p_0^i (éq. géodésique).

Courbes de vitesse d'endommagement

Stratégie Iddmm déterministe : Les courbes de vitesses $V_i = V_{\text{sim}}(\beta^i)$ sont modélisés par des courants

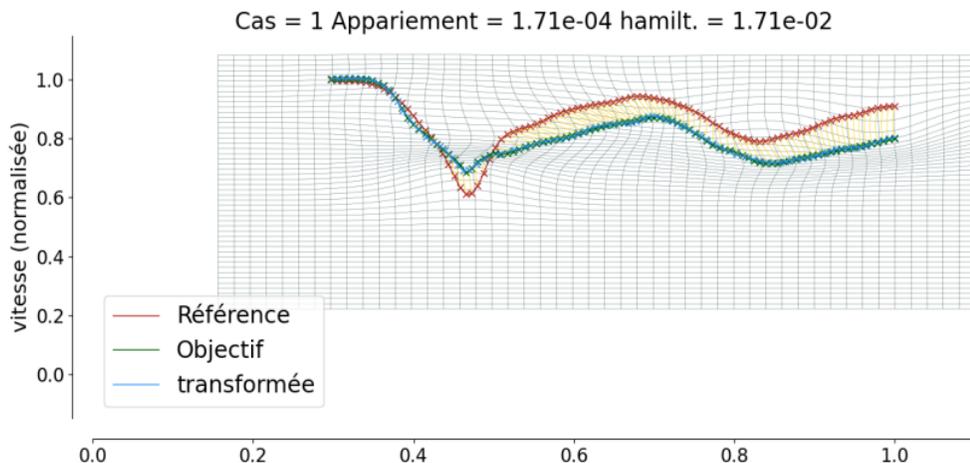
- Calcul de $d(V_{\text{mes}}, V^i) = H(V_{\text{mes}}, p_0^i) : \phi_i$ tel que $\phi^i \cdot V_{\text{mes}} \approx V^i$ caractérisé par p_0^i (éq. géodésique).



Courbes de vitesse d'endommagement

Stratégie Iddmm déterministe : Les courbes de vitesses $V_i = V_{\text{sim}}(\beta^i)$ sont modélisés par des courants

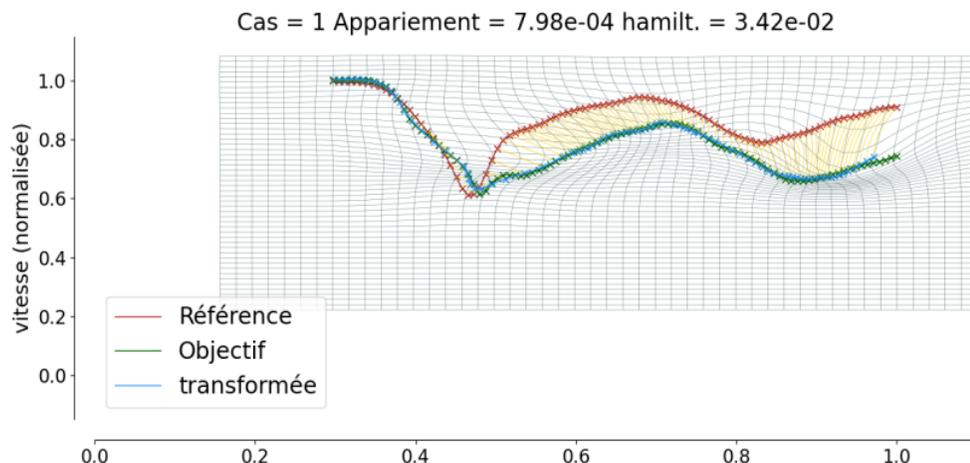
- Calcul de $d(V_{\text{mes}}, V^i) = H(V_{\text{mes}}, p_0^i) : \phi_i$ tel que $\phi^i \cdot V_{\text{mes}} \approx V^i$ caractérisé par p_0^i (éq. géodésique).



Courbes de vitesse d'endommagement

Stratégie Iddmm déterministe : Les courbes de vitesses $V_i = V_{\text{sim}}(\beta^i)$ sont modélisés par des courants

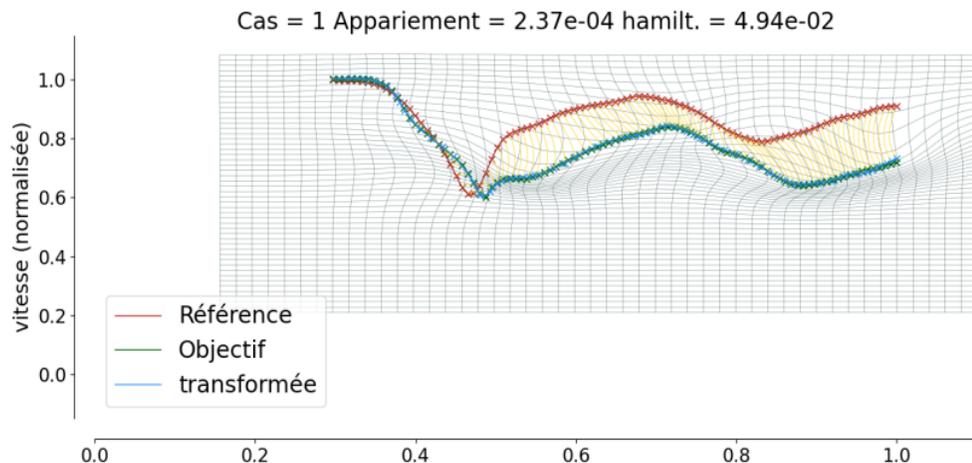
- Calcul de $d(V_{\text{mes}}, V^i) = H(V_{\text{mes}}, p_0^i) : \phi_i$ tel que $\phi^i \cdot V_{\text{mes}} \approx V^i$ caractérisé par p_0^i (éq. géodésique).



Courbes de vitesse d'endommagement

Stratégie Iddmm déterministe : Les courbes de vitesses $V_i = V_{\text{sim}}(\beta^i)$ sont modélisés par des courants

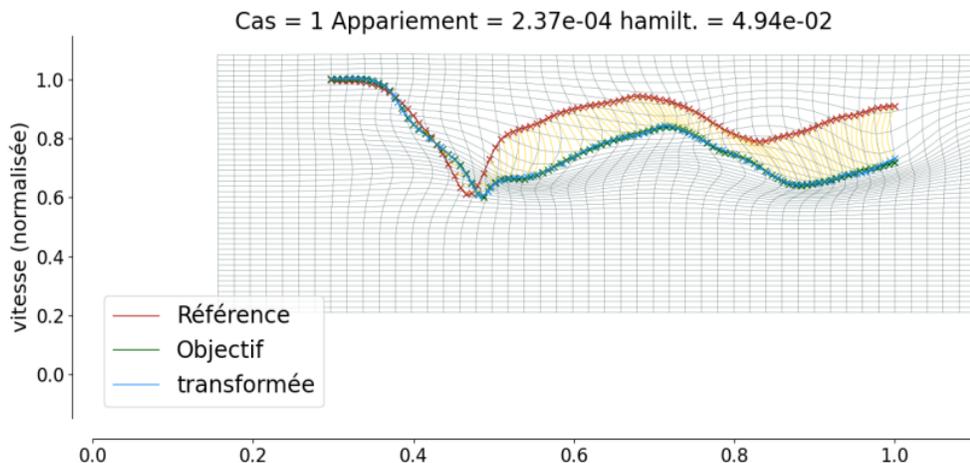
- Calcul de $d(V_{\text{mes}}, V^i) = H(V_{\text{mes}}, p_0^i) : \phi_i$ tel que $\phi^i \cdot V_{\text{mes}} \approx V^i$ caractérisé par p_0^i (éq. géodésique).



Courbes de vitesse d'endommagement

Stratégie Iddmm déterministe : Les courbes de vitesses $V_i = V_{\text{sim}}(\beta^i)$ sont modélisés par des courants

- Calcul de $d(V_{\text{mes}}, V^i) = H(V_{\text{mes}}, p_0^i) : \phi_i$ tel que $\phi_i \cdot V_{\text{mes}} \approx V^i$ caractérisé par p_0^i (éq. géodésique).



- Métamodélisation de $\beta \mapsto p_0(\beta) \in \mathbb{R}^{N_t} \times \mathbb{R}^d$: e.g. Réduction de dimension et processus gaussien
- Minimisation de $\beta \mapsto H(V_{\text{mes}}, \hat{p}_0(\beta)) = \|\hat{v}_0(\beta)\|^2$

Courbes de vitesse d'endommagement



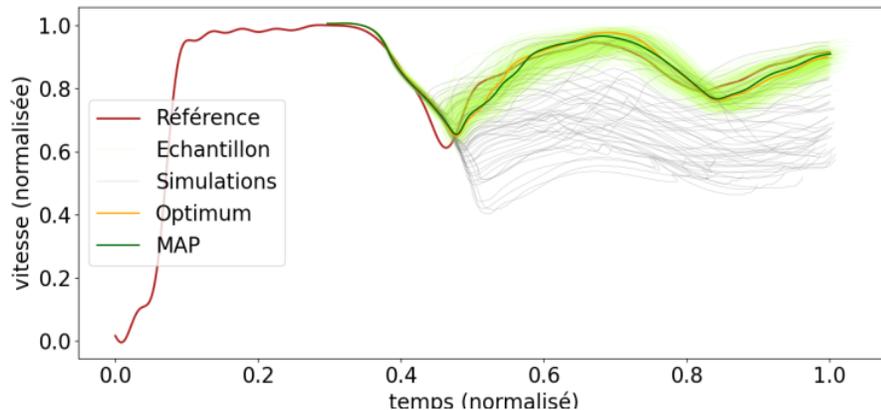
Stratégie Iddmm bayésienne :

- $\phi_i \cdot V_{\text{mes}} = V^i + \varepsilon_W^i$ dans W^* où ε_W^i i.i.d. de loi $f_W(\varepsilon) \propto \exp(-\|\varepsilon\|_{W^*}^2/(2\sigma_W^2))$
- v_0^i dans V i.i.d. de loi $f_V(v_0) \propto \exp(-\|v_0\|_V^2/(2\sigma_V^2))$

Courbes de vitesse d'endommagement

Stratégie Iddmm bayésienne :

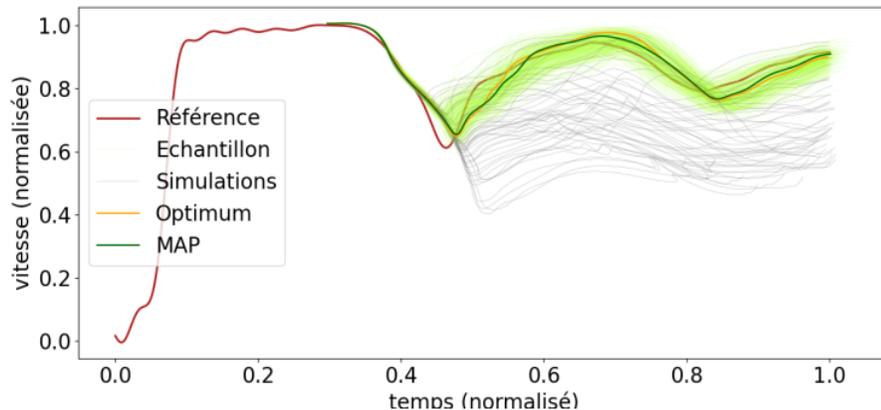
- $\phi_i \cdot V_{\text{mes}} = V^i + \varepsilon_W^i$ dans W^* où ε_W^i i.i.d. de loi $f_W(\varepsilon) \propto \exp(-\|\varepsilon\|_{W^*}^2 / (2\sigma_W^2))$
- v_0^i dans V i.i.d. de loi $f_V(v_0) \propto \exp(-\|v_0\|_V^2 / (2\sigma_V^2))$



Courbes de vitesse d'endommagement

Stratégie Iddmm bayésienne :

- $\phi_i \cdot V_{\text{mes}} = V^i + \varepsilon_W^i$ dans W^* où ε_W^i i.i.d. de loi $f_W(\varepsilon) \propto \exp(-\|\varepsilon\|_{W^*}^2 / (2\sigma_W^2))$
- v_0^i dans V i.i.d. de loi $f_V(v_0) \propto \exp(-\|v_0\|_V^2 / (2\sigma_V^2))$



Exemple de transport d'images



Turbulence : Instabilité de Richtmyer-Meshkov

Voir l'animation

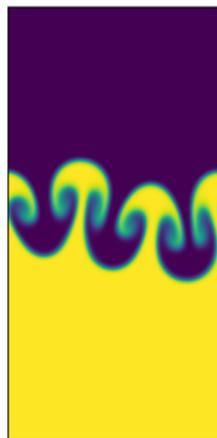


Image source

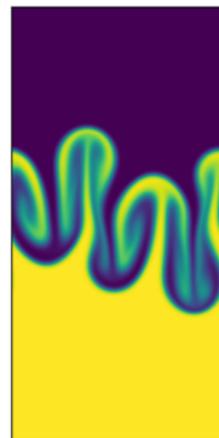


Image cible

Exemple de métamorphose



Ajout terme source photométrie ou metamorphosis [A. Trouvé, L. Younes, 2005]

- Action $w = (v, z) \in L^2([0, 1], V \times L^2)$, $I_t = I \circ \phi_{t,0} + \sigma^2 \int_0^t z_s \circ \phi_{t,s} ds$, avec $\phi_{t,s} = \phi_s \circ (\phi_t)^{-1}$

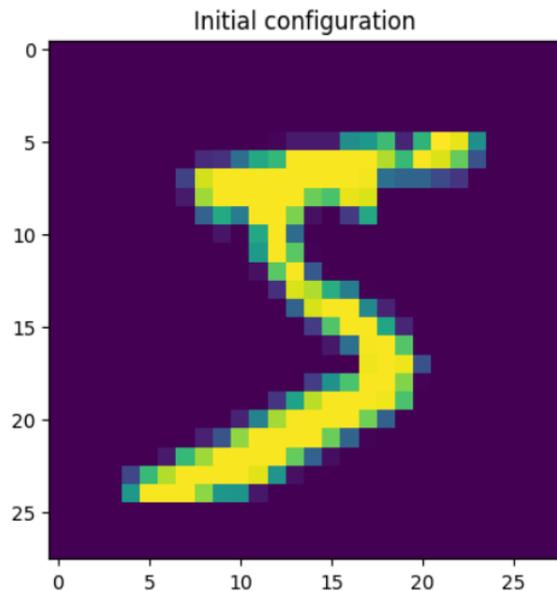


Image source

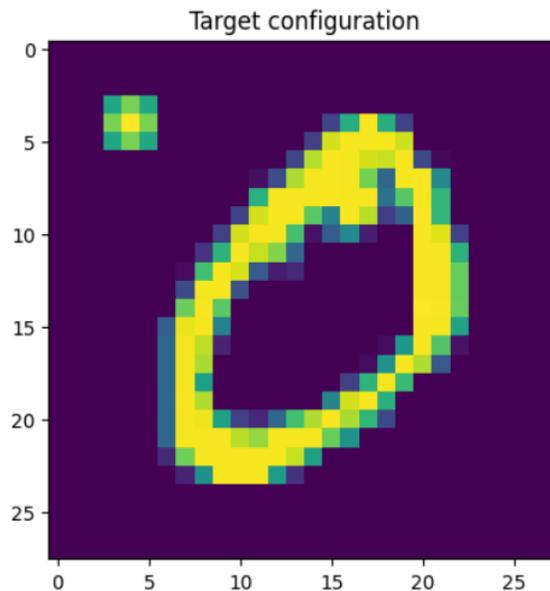


Image cible



7.

EXTENSIONS ET PERSPECTIVES

Extensions et perspectives

Lien avec le contrôle optimal : [S. Arguillère *et al.*, 2015] Principe du maximum de Pontriaguine.

- Algorithme avec conditions de transversalité [S. Allasonnière *et al.*, 2005]
- Ajout de contrainte de déformations

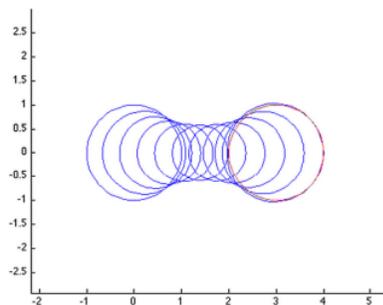
Extensions et perspectives

Lien avec le contrôle optimal : [S. Arguillère *et al.*, 2015] Principe du maximum de Pontriaguine.

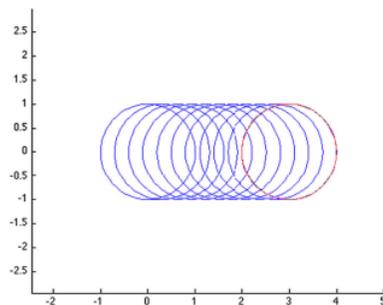
- Algorithme avec conditions de transversalité [S. Allasonnière *et al.*, 2005]
- Ajout de contrainte de déformations

S. Arguillère et al. / J. Math. Pures Appl. 104 (2015) 139–178

173



(a) Matching trajectories without constraints.



(b) Matching trajectories with constant volume.

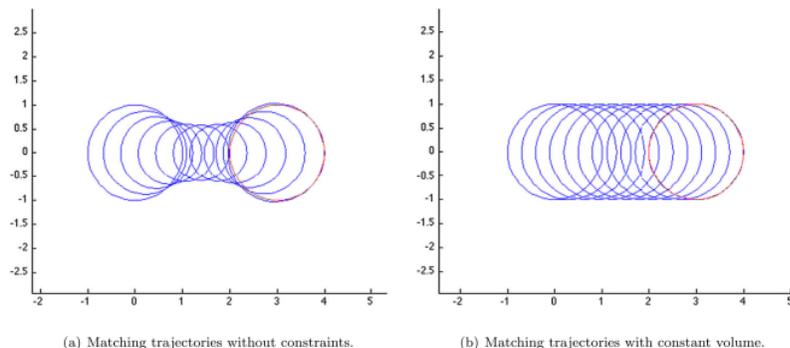
Extensions et perspectives

Lien avec le controle optimal : [S. Arguillère *et al.*, 2015] Principe du maximum de Pontriaguine.

- Algorithme avec conditions de transversalité [S. Allasonnière *et al.*, 2005]
- Ajout de contrainte de déformations

S. Arguillère *et al.* / J. Math. Pures Appl. 104 (2015) 139–178

173



Robustesse aux hyperparamètres Traitement multi-échelles [Risser *et al.*]

- $v_t = (v_t^1, \dots, v_t^n)$ où $v_t^i \in \mathcal{H}_{k_i}$ de différentes échelles σ_i
- $\phi_t = \phi_t^1 \circ \dots \circ \phi_t^n$ où (ϕ_i) satisfait au système $\partial_t \phi_t^i = \sum_{j=i}^n v_t^j \circ \phi_t^i - \text{Ad}_{\phi_t^i} \sum_{j=i+1}^n v_t^j \circ \phi_t^i$

où $\text{Ad}_{\phi} v = \phi_* v$ (image de v par ϕ)

Extensions et perspectives

Intégration variabilité objet/image : [Arnaudon, Holm, Sommer, 2019]

- Flot stochastique : $\phi_t = \text{Id} + \int_0^t v_s \circ \phi_s ds + \int_0^t \sigma \circ \phi_s \circ dB_s$ (intégrale de stratonovich)
- Géodésique stochastique : $\frac{d}{dt}Lv_t + \text{ad}_{v_t}^* v_t + \text{ad}_{\sigma}^* v_t \circ dB_s = 0$

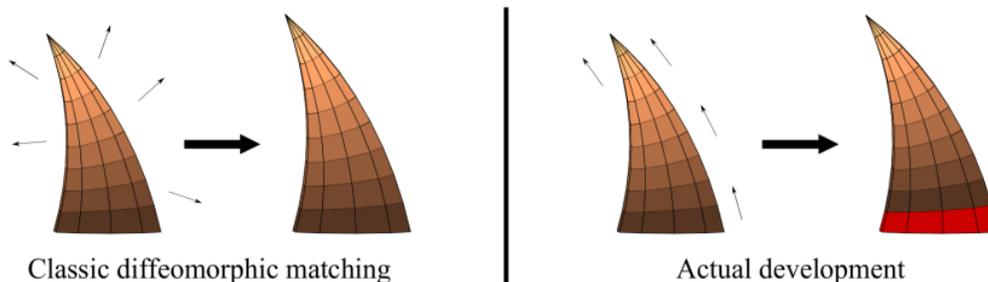
Extensions et perspectives

Intégration variabilité objet/image : [Arnaudon, Holm, Sommer, 2019]

- Flot stochastique : $\phi_t = \text{Id} + \int_0^t v_s \circ \phi_s ds + \int_0^t \sigma \circ \phi_s \circ dB_s$ (intégrale de stratonovich)
- Géodésique stochastique : $\frac{d}{dt}Lv_t + \text{ad}_{v_t}^* v_t + \text{ad}_{\sigma}^* v_t \circ dB_s = 0$

Modélisation de la dynamique

- Évolution de forme : *diffeomorphic geodesic spline* [A. Trouvé, F.-X. Vialard, 2012].
- Modèle de croissance : *Geometrical growth models for computational anatomy* [I. Kaltenmark, 2016]



Extensions et perspectives

Utilisation d'une distance : \mathcal{F} un espace de forme muni d'une distance d et $(f^i)_{i=1}^N$ dans \mathcal{F}

- **Moyennes de Fréchet** :
$$f^* \in \arg \min_{f \in \mathcal{F}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d^p(f, f^i)$$
- **Barycentres** : Soit $\sum_i \lambda_i = 1$,
$$f^* \in \arg \min_{f \in \mathcal{F}} \sum_{i=1}^N \lambda_i d^p(f, f^i) \quad \rightrightarrows \text{Interpolation}$$

Extensions et perspectives

Utilisation d'une distance : \mathcal{F} un espace de forme muni d'une distance d et $(f^i)_{i=1}^N$ dans \mathcal{F}

- **Moyennes de Fréchet :**
$$f^* \in \arg \min_{f \in \mathcal{F}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d^p(f, f^i)$$
- **Barycentres :** Soit $\sum_i \lambda_i = 1$,
$$f^* \in \arg \min_{f \in \mathcal{F}} \sum_{i=1}^N \lambda_i d^p(f, f^i) \quad \Rightarrow \text{Interpolation}$$

Stratégie Iddmm bayésienne : pour problème inverse probabiliste :

- $\phi_i \cdot S_{\text{mes}} = S^i + \varepsilon_W^i$ dans W^* où ε_W^i i.i.d. de loi $f_W(\varepsilon) \propto \exp(-\|\varepsilon\|_{W^*}^2 / (2\sigma_W^2))$
- v_0^i dans V i.i.d. de loi $f_V(v_0) \propto \exp(-\|v_0\|_V^2 / (2\sigma_V^2))$
- **Vraisemblance avant discrétisation :** Quel sens donner à ces mesures ? [H.-H. Kuo, 1975, A.M. Stuart, 2010]

Extensions et perspectives

Utilisation d'une distance : \mathcal{F} un espace de forme muni d'une distance d et $(f^i)_{i=1}^N$ dans \mathcal{F}

- **Moyennes de Fréchet :**
$$f^* \in \arg \min_{f \in \mathcal{F}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d^p(f, f^i)$$
- **Barycentres :** Soit $\sum_i \lambda_i = 1$,
$$f^* \in \arg \min_{f \in \mathcal{F}} \sum_{i=1}^N \lambda_i d^p(f, f^i) \quad \Rightarrow \text{Interpolation}$$

Stratégie Iddmm bayésienne : pour problème inverse probabiliste :

- $\phi_i \cdot S_{\text{mes}} = S^i + \varepsilon_W^i$ dans W^* où ε_W^i i.i.d. de loi $f_W(\varepsilon) \propto \exp(-\|\varepsilon\|_{W^*}^2 / (2\sigma_W^2))$
- v_0^i dans V i.i.d. de loi $f_V(v_0) \propto \exp(-\|v_0\|_V^2 / (2\sigma_V^2))$
- **Vraisemblance avant discrétisation :** Quel sens donner à ces mesures ? [H.-H. Kuo, 1975, A.M. Stuart, 2010]

Merci pour votre attention

Références



-  [Guillaume Perrin et Laurianne Pillon](#), *Calibration of Johnson's damage model by a Bayesian approach* EPJ Web of Conferences, 183, 01037 (2018).
-  [Haïm Brezis](#), *Analyse fonctionnelle : théorie et application*, Masson, 1983.
-  [Bharath K. Sriperumbudur et al.](#) , *Hilbert Space embeddings and Metrics on probability Measures*, Journal of Machine Learning Research, 11 , 1517-1561 (2010).
-  [Arthur Gretton et al.](#) *A kernel Two-Sample test*, Journal of Machine Learning Research, 13, 723-773 (2012).
-  [Jean Feydy](#), *Geometric data analysis, beyond convolutions, 2020.*
-  [Wolfgang Walter](#), *Ordinary Différential equations*, Springer, 1998.
-  [Joan Alexis Glaunes](#) *Transport par difféomorphismes de points, de mesures et de courants pour la comparaison de formes et l'anatomie numérique.* Thèse de doctorat, Paris 13 (2005).
-  [M. Beg, M. Miller, A. Trouvé, L. Younes](#), *Computing Large Deformation Metric Mappings via geodesic flows of diffeomorphisms*, Int. J. of Comp. Vision 61(2), 139-157 (2005).
-  [François-Xavier Vialard](#), *Diffeomorphism, Optimal Transport and Applications to Imaging*, HdR Paris Dauphine, 2017.
-  [Laurent Younes](#), *Shapes and diffeomorphism*, springer, 2010.

Références



-  **Michael I. Miller et al.**, *Geodesic shooting for computational anatomy*, J. Math. Imaging and Vision, 2006.
-  **Nicolas Charon** *Analysis of geometric and functional shapes with extensions of currents : applications to registration and atlas estimation*, Thèse de doctorat, ENS Cachan, 2013.
-  **Irène Kaltenmark, Benjamin Charlier, Nicolas Charon** *A general framework for curve and surface comparison and registration with oriented varifolds*, Cvpr 3346-3355, 2017.
-  **Nicolas Charon** *Machine learning and geometric data analysis*, High-dimensional data analysis group meeting, March 31, 2025.
-  **Aymeric Lompret**, *Sur l'élection de Donald T. La dernière*, 2025.
-  **Herbert Federer**, *Geometric measure theory*, Springer, 1969.
-  **J.-D. Benamou, Y. Brenier**, *A computational fluid mechanics solution to the Monge-Kantorovich mass transfer problem*, Numer. Math. 84 : 375-393 (2000)/
-  **M. Bruveris, F. Gay-Balmaz, D.D. Holm, T.S. Ratiu**, *The momentum map representation of images*, arXiv :0912.2990v2, 2010.
-  **Frederic Paulin**, *Géométrie différentielle élémentaire*, ENS, 2006-2007
-  **Alain Trouvé**, *Géométrie et espace des formes*, Master MVA, 2009-2010
-  **Jean-François Babadjian**, *Calcul des variations et théorie géométrique de la mesure*, Master Math Appli, Université paris saclay.

Références



-  **Alain Trouvé et Laurent Younes**, *Local geometry of deformable templates*, SIAM journal on mathematical analysis, **37**(1), pp 17-59 (2005).
-  **Alain Trouvé et François-Xavier Vialard**, *Shape splines and stochastic shape evolutions : A second order point of view*, Quarterly of Applied Mathematics, **70**(2), pp. 219-251 (2012).
-  **S. Arguillère, E. Trelat, A. Trouvé et L. Younes**, *Shape deformation analysis from the optimal control viewpoint*, J. Math. Pures Appl. **104**, pp139-178 (2015).
-  **S. Allasonnière, A. Trouvé et L. Younes**, *Geodesic shooting and diffeomorphic Matching via textured meshes*, LNCS 3757, pp. 365-381 (2005).
-  **Alexis Arnaudon, Darryl D. Holm et Stefan Sommer**, *A geometric framework for stochastic shape analysis*, Foundations of Computational Mathematics, **19**(2), pp 653-701 (2019).
-  **Laurent Risser, François-Xavier Vialard et Robin Wolz**, *Simultaneous multi-scale registration using large deformation diffeomorphic metric mapping*, IEEE transactions on medical imaging, **30**(10) pp. 1746-1759 (2011).
-  **Gabriel Peyré et Marco Cuturi**, *Computational optimal transport : With applications to data science*, Foundations and Trends® in Machine Learning **11**(5-6), pp. 355-607 (2019).
-  **Irène Kaltenmark**, *Geometrical growth models for computational anatomy*, thèse université paris saclay, soutenue publiquement le 10 octobre 2016.
-  **A.M. Stuart**, *Inverse problems : A bayesian perspective*, Acta Numerica, pp. 451-559 (2010).
-  **Hui-Hsiung Kuo**, *Gaussian Measures in Banach Spaces*, Lecture Notes in Mathematics 463, Springer, 1975.