

# Krigeage adaptatif de modèles numériques séquentiels pour l'étude de la fiabilité de systèmes sollicités en fatigue

**Doctorant : Thomas Constant**  
(fin de deuxième année de thèse)

**Encadrement KNDS France:**  
Laëtitia Fouché

**Encadrement universitaire :**  
Cécile Mattrand  
Nicolas Gayton



# **Contexte et problématique**

# Cas d'application industriel: étude de la durabilité en fatigue des soudures de la cabine du CAESAR

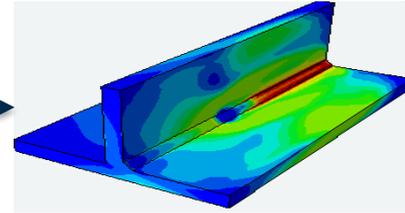
Sollicitations sur le modèle global



Transfert des sollicitations dans les sous-structures



Endommagement  $d$  dans les zones à risque identifiées sur la sous-structure étudiée



# Cas d'application industriel: étude de la durabilité en fatigue des soudures de la cabine du CAESAR

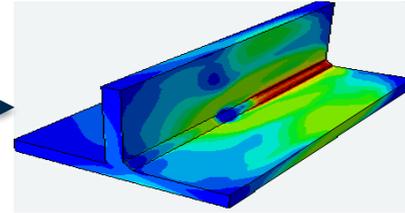
Sollicitations sur le modèle global



Transfert des sollicitations dans les sous-structures



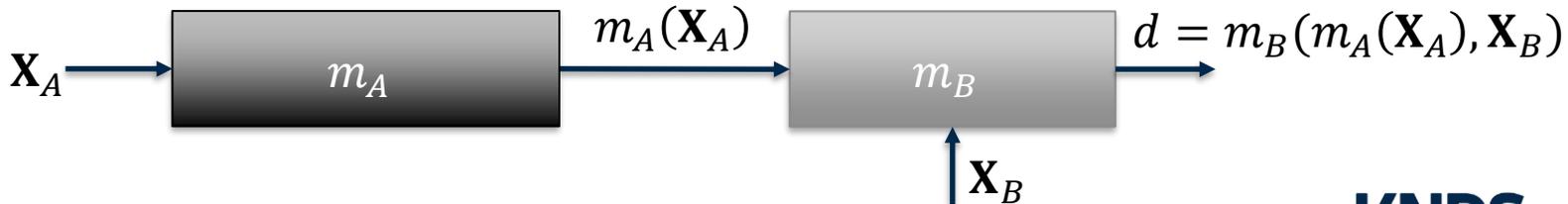
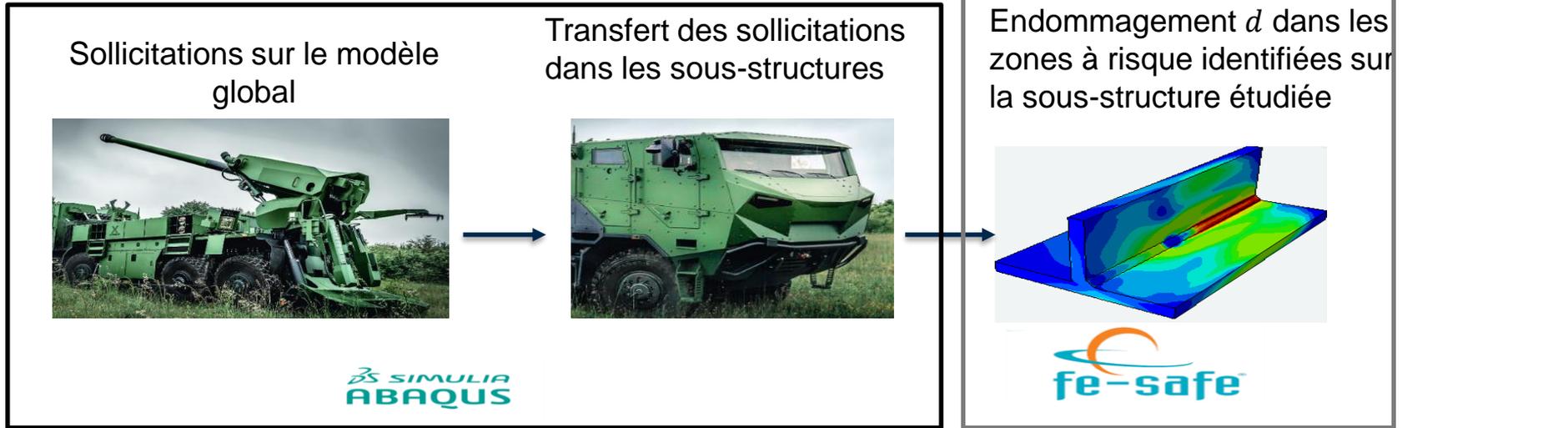
Endommagement  $d$  dans les zones à risque identifiées sur la sous-structure étudiée



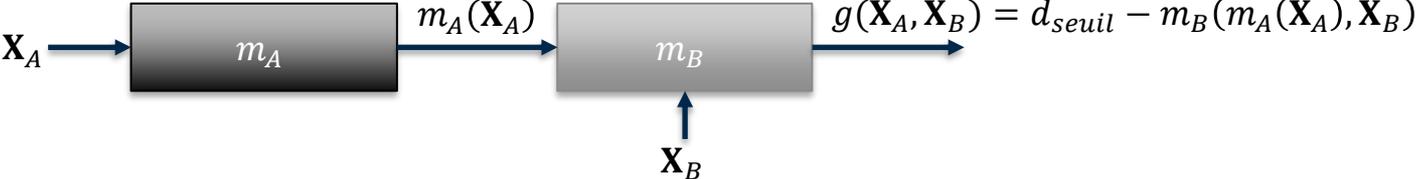




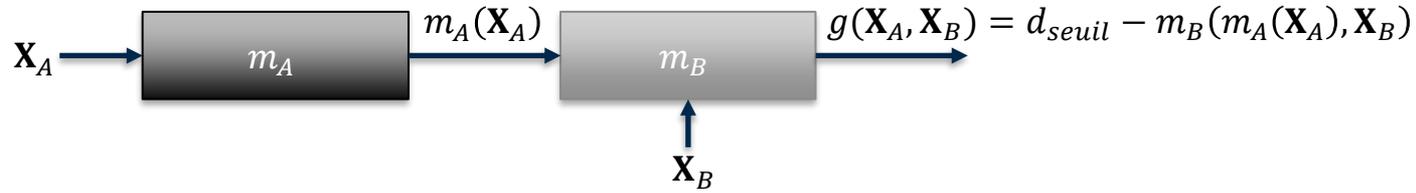
# Cas d'application industriel: étude de la durabilité en fatigue des soudures de la cabine du CAESAR



# Problématique : fiabilité pour une chaîne de modèles numériques séquentiels

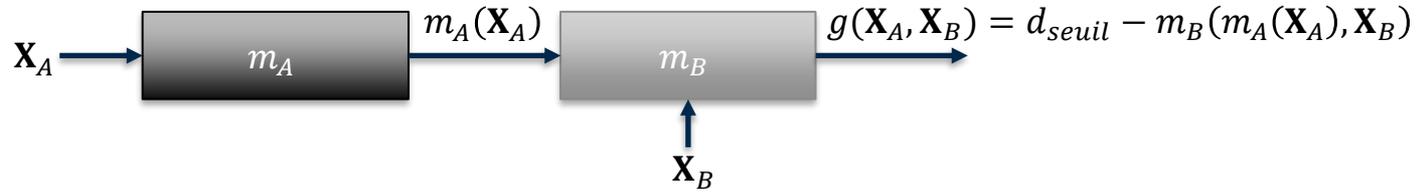


# Problématique : fiabilité pour une chaîne de modèles numériques séquentiels



**Problème :**  $p_f = Prob(g(\mathbf{X}_A, \mathbf{X}_B) \leq 0)$

# Problématique : fiabilité pour une chaîne de modèles numériques séquentiels

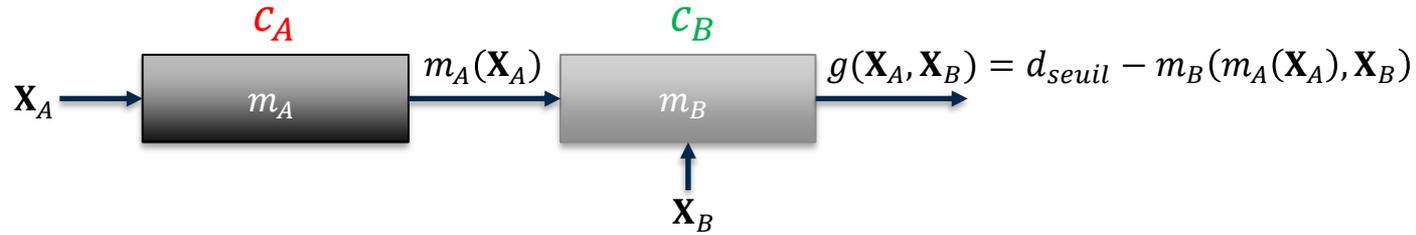


**Problème :**  $p_f = Prob(g(\mathbf{X}_A, \mathbf{X}_B) \leq 0)$

**Verrous :**

1. Contexte « boîte noire »
2. Chaîne très coûteuse ( $c \cong 30h$ )
3. Sortie intermédiaire  $m_A(\mathbf{X}_A)$  complexe

# Problématique : fiabilité pour une chaîne de modèles numériques séquentiels



**Problème :**  $p_f = Prob(g(\mathbf{X}_A, \mathbf{X}_B) \leq 0)$

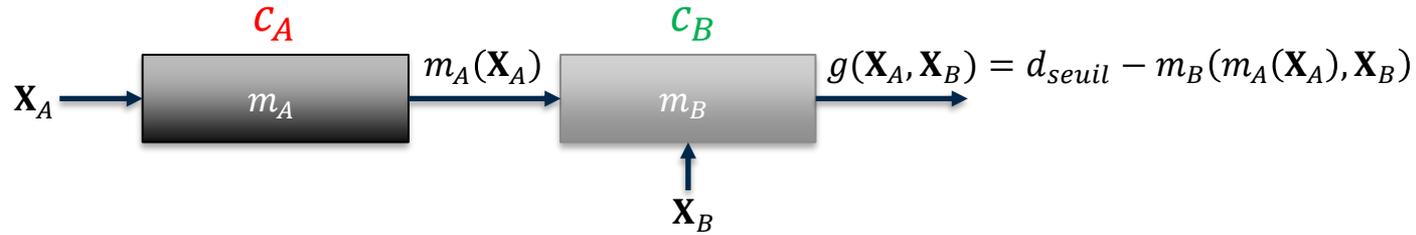
## Particularités du problème :

1.  $c_B \ll c_A$
2. Séparation des variables d'entrées
3. Composition  $m_B \circ m_A$

## Verrous :

1. Contexte « boîte noire »
2. Chaîne très coûteuse ( $c \cong 30h$ )
3. Sortie intermédiaire  $m_A(\mathbf{X}_A)$  complexe

# Problématique : fiabilité pour une chaîne de modèles numériques séquentiels



**Problème :**  $p_f = Prob(g(\mathbf{X}_A, \mathbf{X}_B) \leq 0)$

## Particularités du problème :

1.  $c_B \ll c_A$
2. Séparation des variables d'entrées
3. Composition  $m_B \circ m_A$

## Verrous :

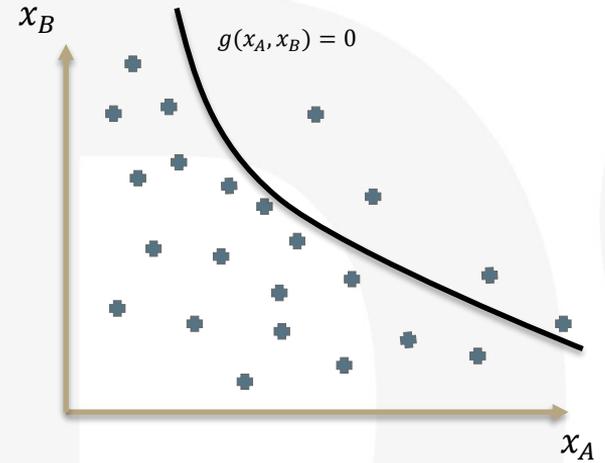
1. Contexte « boîte noire »
2. Chaîne très coûteuse ( $c \cong 30h$ )
3. Sortie intermédiaire  $m_A(\mathbf{X}_A)$  complexe

**Approche :** Métamodèle de Krigeage  $\hat{g}$  avec enrichissement adaptatif de  $g$  puis application d'une méthode de Monte-Carlo sur  $\hat{g}$  (AK-MCS)

# Méthode

# Rappel: Active Kriging Monte-Carlo Simulation (AK-MCS)

Génération d'une population de Monte-Carlo  $S$

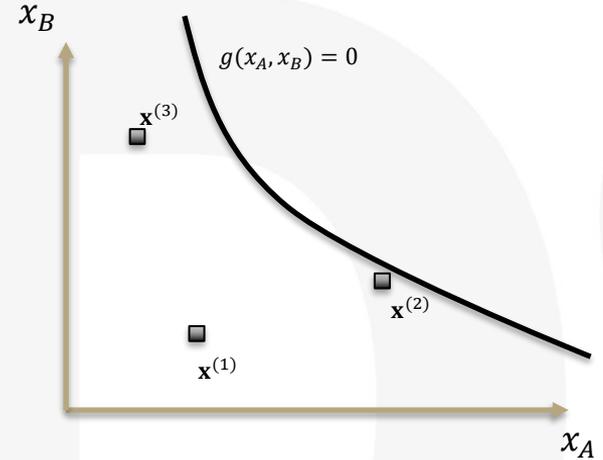


# Rappel: Active Kriging Monte-Carlo Simulation (AK-MCS)

Génération d'une population de Monte-Carlo  $S$

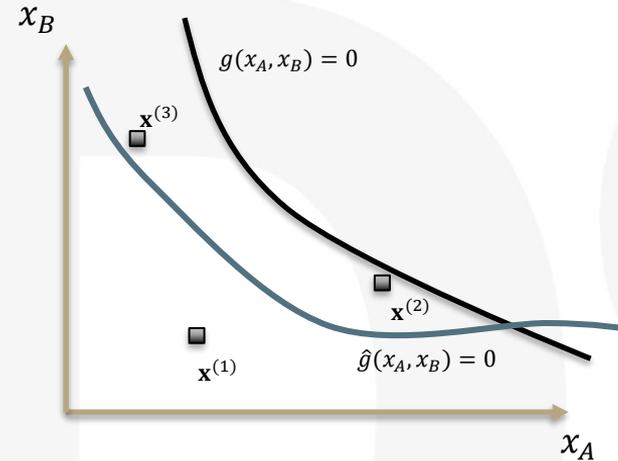
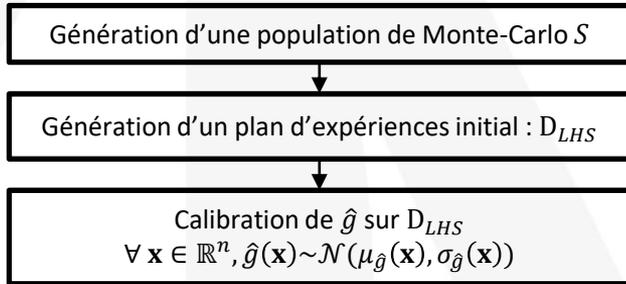


Génération d'un plan d'expériences initial :  $D_{LHS}$



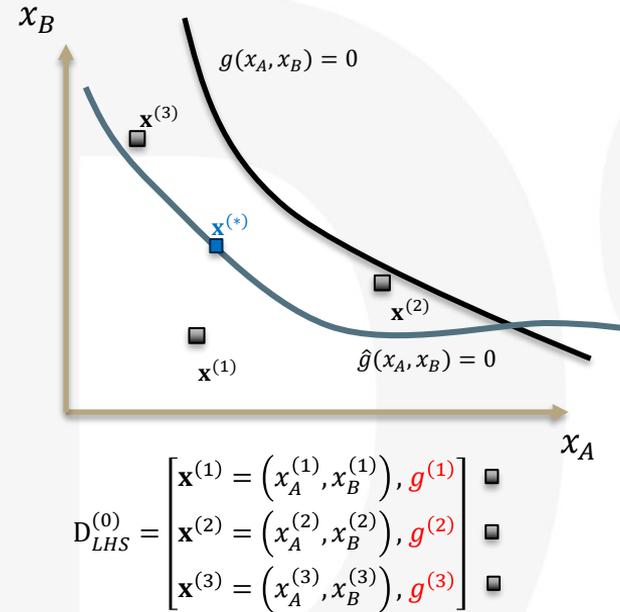
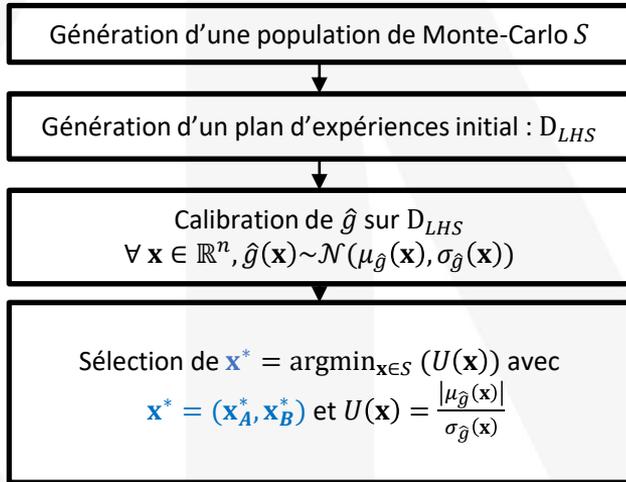
$$D_{LHS}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} = (x_A^{(1)}, x_B^{(1)}), g^{(1)} & \blacksquare \\ \mathbf{x}^{(2)} = (x_A^{(2)}, x_B^{(2)}), g^{(2)} & \blacksquare \\ \mathbf{x}^{(3)} = (x_A^{(3)}, x_B^{(3)}), g^{(3)} & \blacksquare \end{bmatrix}$$

# Rappel: Active Kriging Monte-Carlo Simulation (AK-MCS)

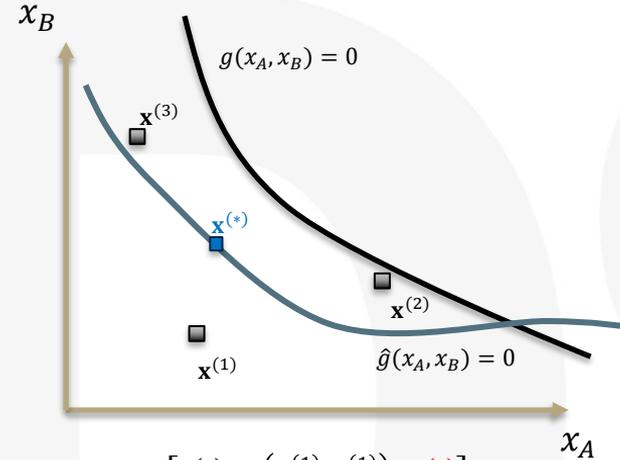
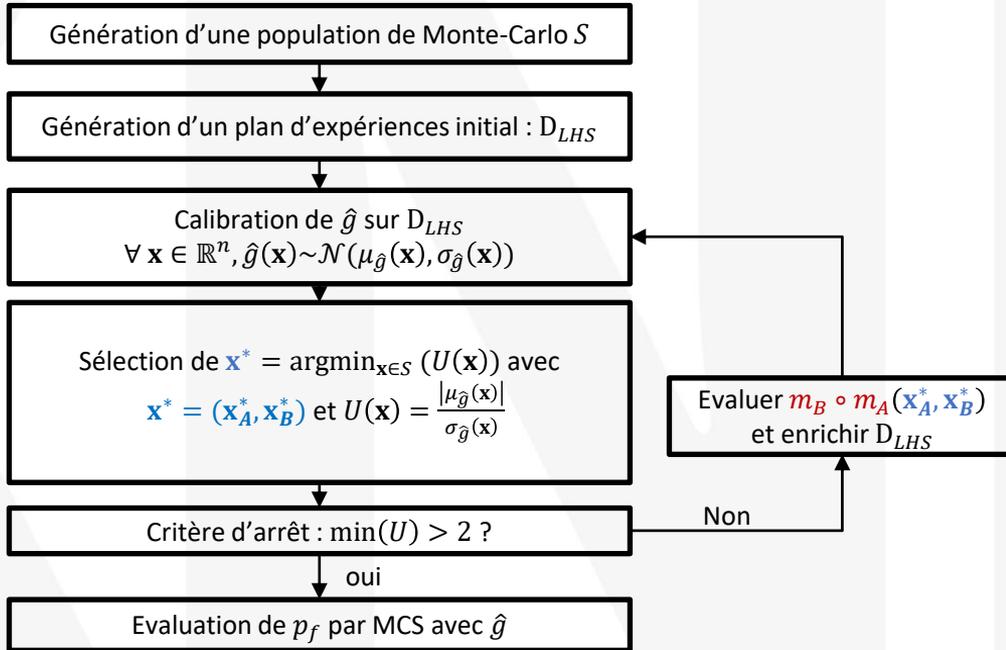


$$D_{LHS}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} = (x_A^{(1)}, x_B^{(1)}), g^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} = (x_A^{(2)}, x_B^{(2)}), g^{(2)} \\ \mathbf{x}^{(3)} = (x_A^{(3)}, x_B^{(3)}), g^{(3)} \end{bmatrix}$$

# Rappel: Active Kriging Monte-Carlo Simulation (AK-MCS)



# Rappel: Active Kriging Monte-Carlo Simulation (AK-MCS)



$$D_{LHS}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} = (x_A^{(1)}, x_B^{(1)}), g^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} = (x_A^{(2)}, x_B^{(2)}), g^{(2)} \\ \mathbf{x}^{(3)} = (x_A^{(3)}, x_B^{(3)}), g^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$D_{LHS}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} = (x_A^{(1)}, x_B^{(1)}), g^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} = (x_A^{(2)}, x_B^{(2)}), g^{(2)} \\ \mathbf{x}^{(3)} = (x_A^{(3)}, x_B^{(3)}), g^{(3)} \\ \mathbf{x}^{(*)} = (x_A^{(*)}, x_B^{(*)}), g^{(*)} \end{bmatrix}$$

# Décomposition fonctionnelle de $g$ : exploitation de la séparation des variables du problème

**Complète** :  $g(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) = g_0 + g_A(\mathbf{x}_A) + g_B(\mathbf{x}_B) + g_{AB}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B)$ ,  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) \in \mathbb{R}^{n_A+n_B}$

# Décomposition fonctionnelle de $g$ : exploitation de la séparation des variables du problème

**Complète** :  $g(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) = g_0 + g_A(\mathbf{x}_A) + g_B(\mathbf{x}_B) + g_{AB}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B)$ ,  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) \in \mathbb{R}^{n_A+n_B}$

**Troncature des effets croisés** :  $g(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) \cong g_0 + g_A(\mathbf{x}_A) + g_B(\mathbf{x}_B)$

# Décomposition fonctionnelle de $g$ : exploitation de la séparation des variables du problème

**Complète** :  $g(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) = g_0 + g_A(\mathbf{x}_A) + g_B(\mathbf{x}_B) + g_{AB}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B)$ ,  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) \in \mathbb{R}^{n_A+n_B}$

**Troncature des effets croisés** :  $g(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) \cong g_0 + g_A(\mathbf{x}_A) + g_B(\mathbf{x}_B)$

**Projection** sur deux hyperplans passant par un point d'ancrage  $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{x}}_A, \bar{\mathbf{x}}_B)$  :

# Décomposition fonctionnelle de $g$ : exploitation de la séparation des variables du problème

**Complète** :  $g(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) = g_0 + g_A(\mathbf{x}_A) + g_B(\mathbf{x}_B) + g_{AB}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B)$ ,  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) \in \mathbb{R}^{n_A+n_B}$

**Troncature des effets croisés** :  $g(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) \cong g_0 + g_A(\mathbf{x}_A) + g_B(\mathbf{x}_B)$

**Projection** sur deux hyperplans passant par **un point d'ancrage**  $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{x}}_A, \bar{\mathbf{x}}_B)$  :

$$g_0 = g(\bar{\mathbf{x}}_A, \bar{\mathbf{x}}_B) = d_{seuil} - m_B(m_A(\bar{\mathbf{x}}_A), \bar{\mathbf{x}}_B)$$

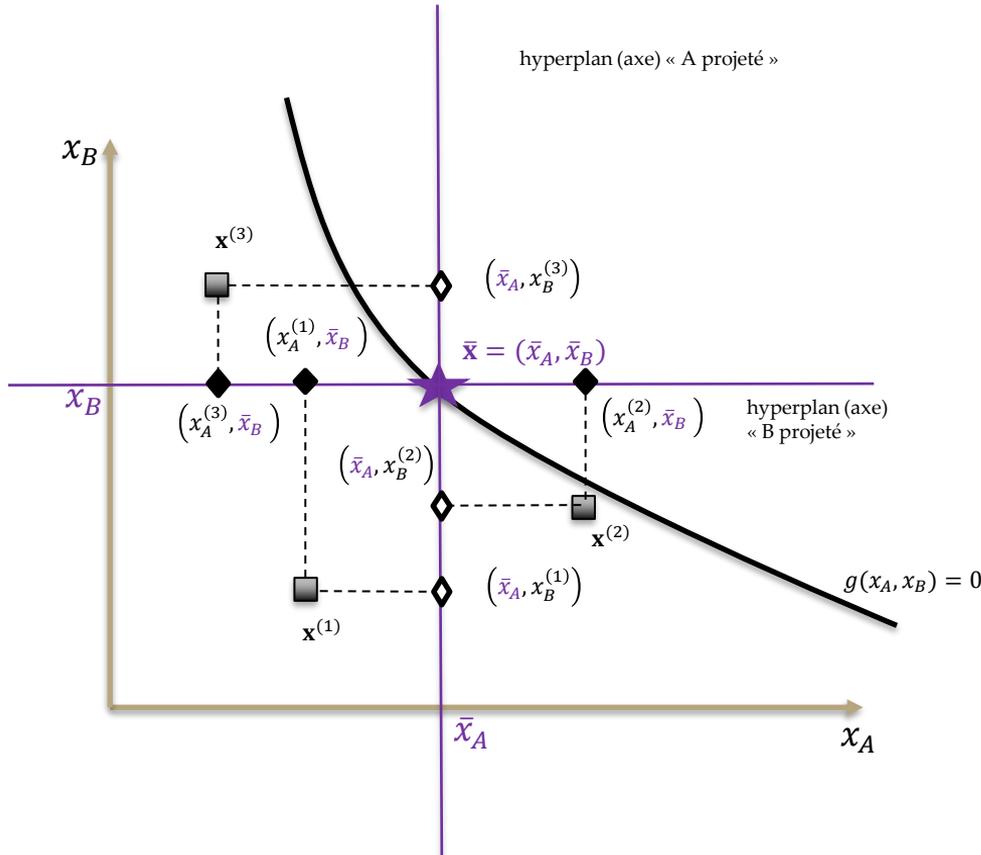
$$g_A(\mathbf{x}_A) = g(\mathbf{x}_A, \bar{\mathbf{x}}_B) - g_0 = d_{seuil} - m_B(m_A(\mathbf{x}_A), \bar{\mathbf{x}}_B) - g_0$$

$$g_B(\mathbf{x}_B) = g(\bar{\mathbf{x}}_A, \mathbf{x}_B) - g_0 = d_{seuil} - m_B(m_A(\bar{\mathbf{x}}_A), \mathbf{x}_B) - g_0$$

point « A-projeté »

point « B-projeté »

# Illustration en 2D de la projection de points de l'espace sur deux hyperplans (axes) passant par un point d'ancrage

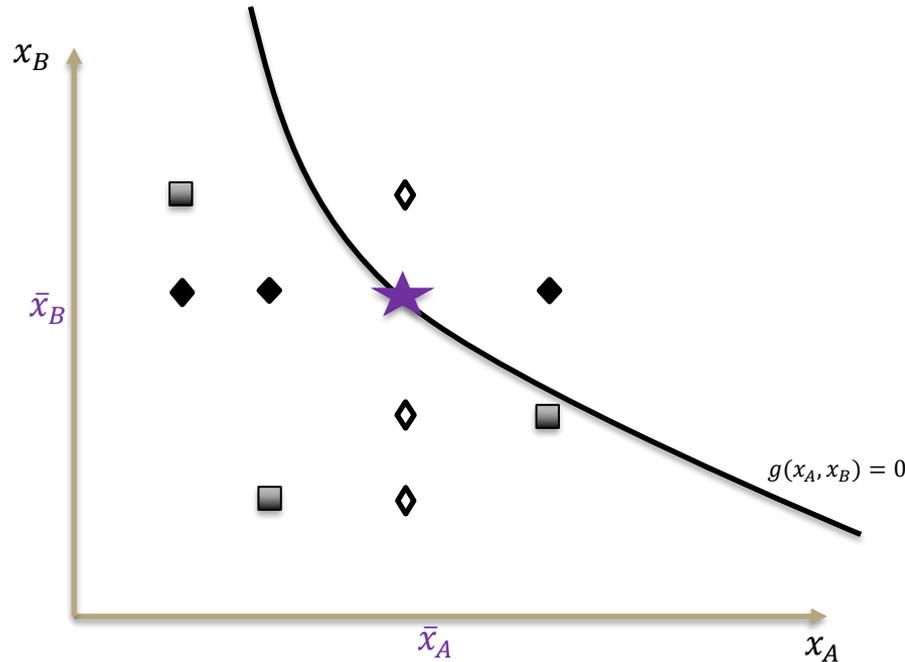


$$D_{LHS}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} = (x_A^{(1)}, x_B^{(1)}), g^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} = (x_A^{(2)}, x_B^{(2)}), g^{(2)} \\ \mathbf{x}^{(3)} = (x_A^{(3)}, x_B^{(3)}), g^{(3)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \end{matrix}$$

$$D_A^{(0)} = \begin{bmatrix} (x_A^{(1)}, \bar{x}_B), g_A^{(1)} \\ (x_A^{(2)}, \bar{x}_B), g_A^{(2)} \\ (x_A^{(3)}, \bar{x}_B), g_A^{(3)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \blacklozenge \\ \blacklozenge \\ \blacklozenge \end{matrix}$$

$$D_B^{(0)} = \begin{bmatrix} (\bar{x}_A, x_B^{(1)}), g_B^{(1)} \\ (\bar{x}_A, x_B^{(2)}), g_B^{(2)} \\ (\bar{x}_A, x_B^{(3)}), g_B^{(3)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \blacklozenge \\ \blacklozenge \\ \blacklozenge \end{matrix}$$

# Illustration en 2D de la projection de point de l'espace sur deux hyperplans (axes) passant par un point d'ancrage

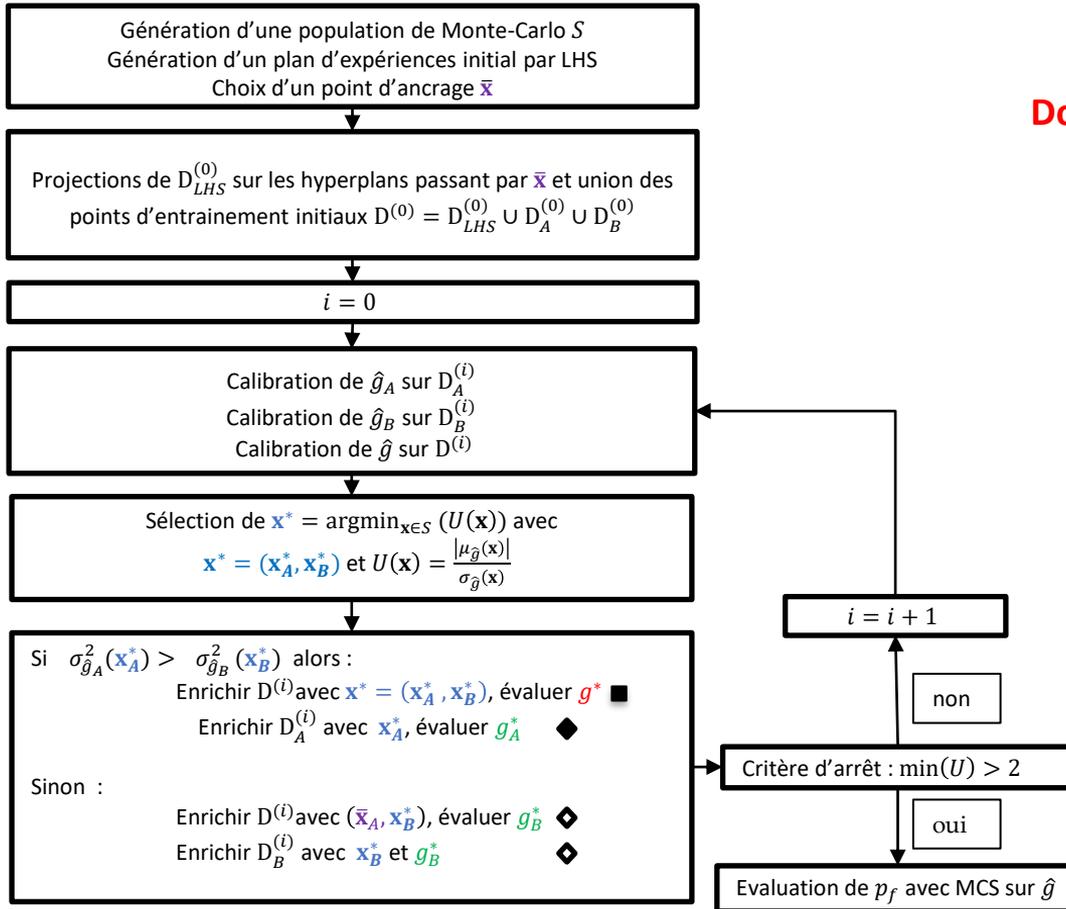


$$D^{(0)} = \begin{bmatrix} (x_A^{(1)}, x_B^{(1)}), g^{(1)} & \blacksquare \\ (x_A^{(2)}, x_B^{(2)}), g^{(2)} & \blacksquare \\ (x_A^{(3)}, x_B^{(3)}), g^{(3)} & \blacksquare \\ (\bar{x}_A, \bar{x}_B), g_0 & \star \\ (x_A^{(1)}, \bar{x}_B), g_A^{(1)} & \blacklozenge \\ (x_A^{(2)}, \bar{x}_B), g_A^{(2)} & \blacklozenge \\ (x_A^{(3)}, \bar{x}_B), g_A^{(3)} & \blacklozenge \\ (\bar{x}_A, x_B^{(1)}), g_B^{(1)} & \blacklozenge \\ (\bar{x}_A, x_B^{(2)}), g_B^{(2)} & \blacklozenge \\ (\bar{x}_A, x_B^{(3)}), g_B^{(3)} & \blacklozenge \end{bmatrix}$$

$$D_A^{(0)} = \begin{bmatrix} (x_A^{(1)}, \bar{x}_B), g_A^{(1)} & \blacklozenge \\ (x_A^{(2)}, \bar{x}_B), g_A^{(2)} & \blacklozenge \\ (x_A^{(3)}, \bar{x}_B), g_A^{(3)} & \blacklozenge \end{bmatrix}$$

$$D_B^{(0)} = \begin{bmatrix} (\bar{x}_A, x_B^{(1)}), g_B^{(1)} & \blacklozenge \\ (\bar{x}_A, x_B^{(2)}), g_B^{(2)} & \blacklozenge \\ (\bar{x}_A, x_B^{(3)}), g_B^{(3)} & \blacklozenge \end{bmatrix}$$

# Procédure Active Kriging for Sequential Model (AK-SM)



## Double objectifs pour AK-SM :

Conserver la même qualité d'estimation de  $p_f$  que AK-MCS

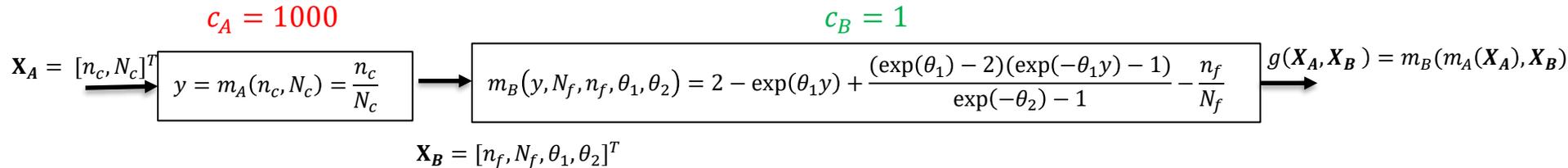
Diminuer le coût total  
(le nombre d'appels à  $m_A$ ) pour estimer  $p_f$

# Cas d'études et résultats

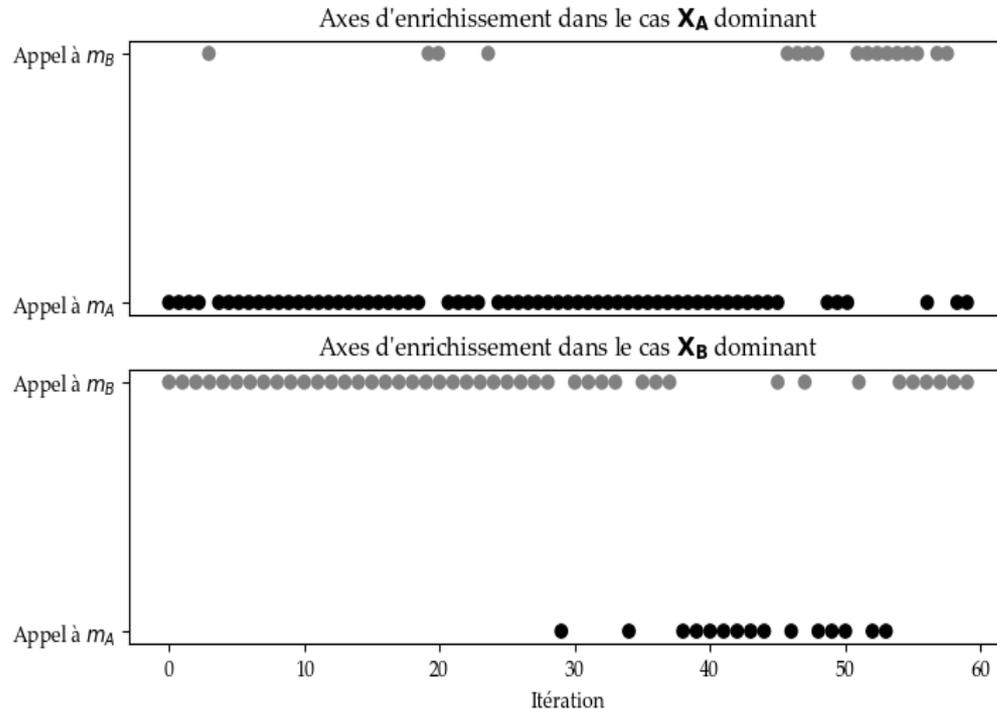
# Validation de AK-SM sur le cas analytique « Fatigue Fluage »

- Fonction de performance issue de l'article « Reliability analysis of creep-fatigue failure » (Mao & Mahadevan, *International Journal of Fatigue*, 2000 )

$$g(N_c, N_f, n_c, n_f, \theta_1, \theta_2) = 2 - \exp\left(\frac{\theta_1 n_c}{N_c}\right) + \frac{(\exp(\theta_1) - 2)(\exp\left(-\frac{\theta_1 n_c}{N_c}\right) - 1)}{\exp(-\theta_2) - 1} - \frac{n_f}{N_f}$$



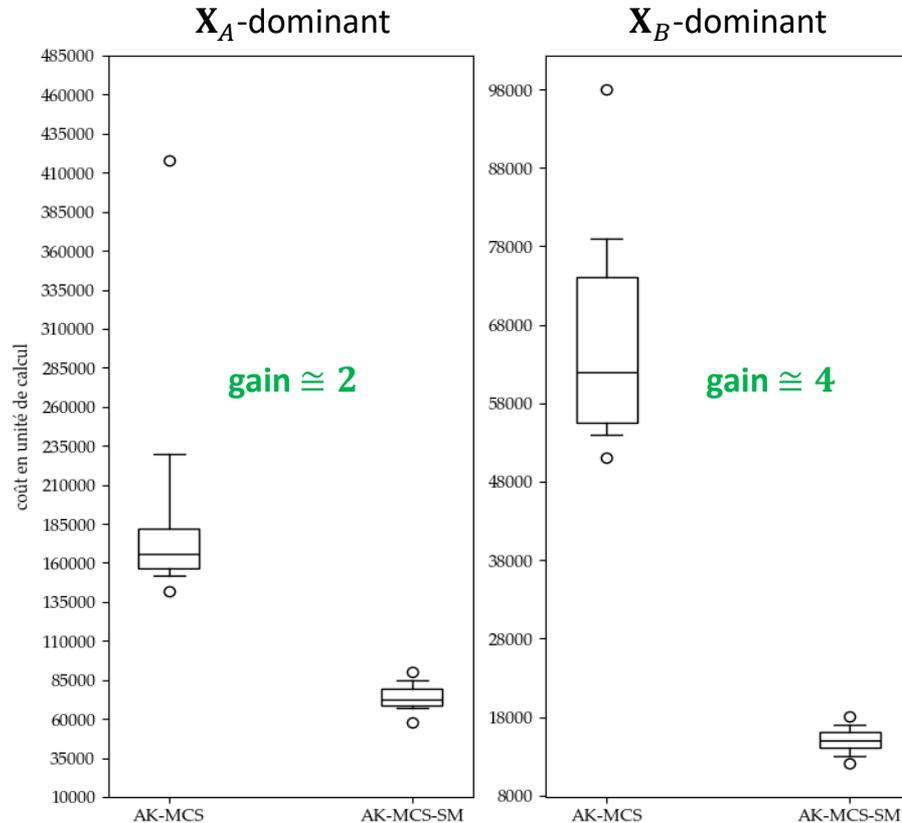
# Axes d'enrichissement de la méthode dans les cas dit « $X_A$ -dominant » et « $X_B$ -dominant »



$X_A$  dominant: Sensibilité de  $g$  aux variables aléatoires  $n_c, N_c$  (fluage) plus importante

$X_B$  dominant: Sensibilité de  $g$  aux variables aléatoires  $n_f, N_f$  (fatigue) plus importante

# Boxplots comparatifs des performances en coût des procédures AK-MCS et AK-SM dans le cas où $c_A = 1000c_B$



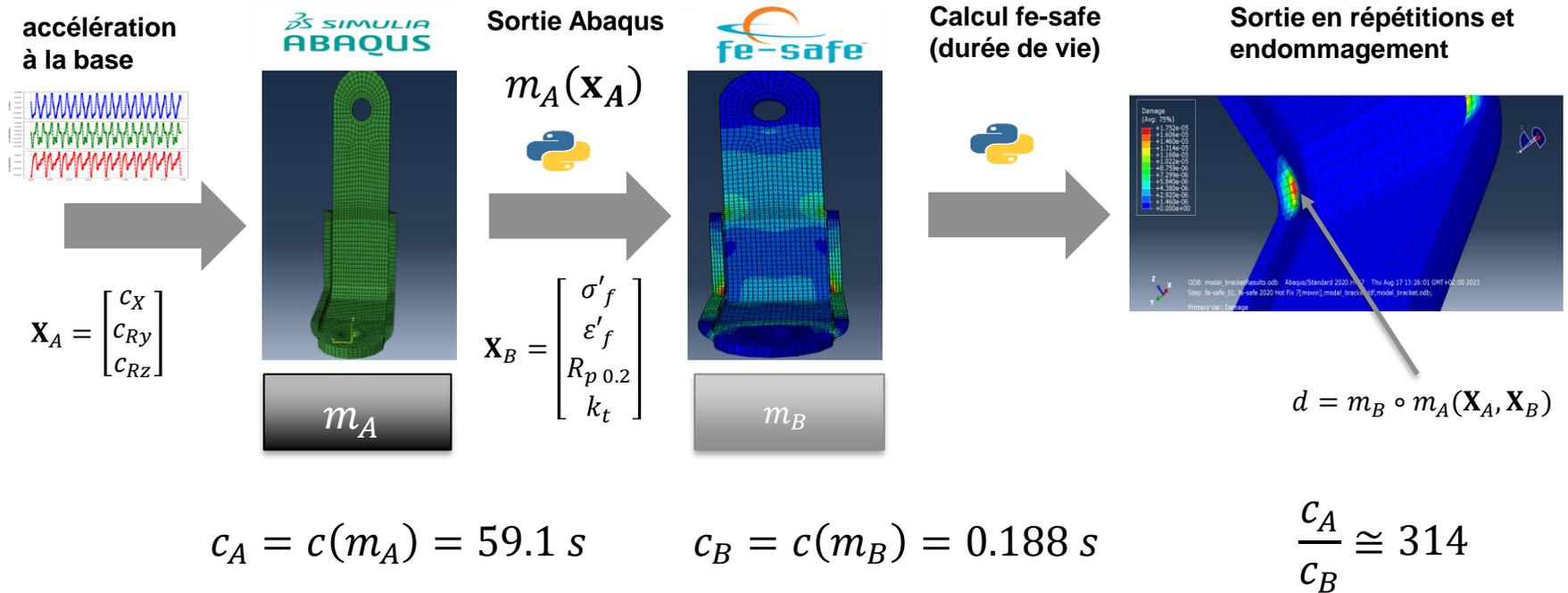
## 10 répétitions

- Même population de Monte-Carlo à classer
- 10 plans d'expériences initiaux générés par LHS

# Tableau comparatif des **résultats médians** sur « Fatigue Fluage » pour les méthodes MCS, AK-MCS et AK-SM

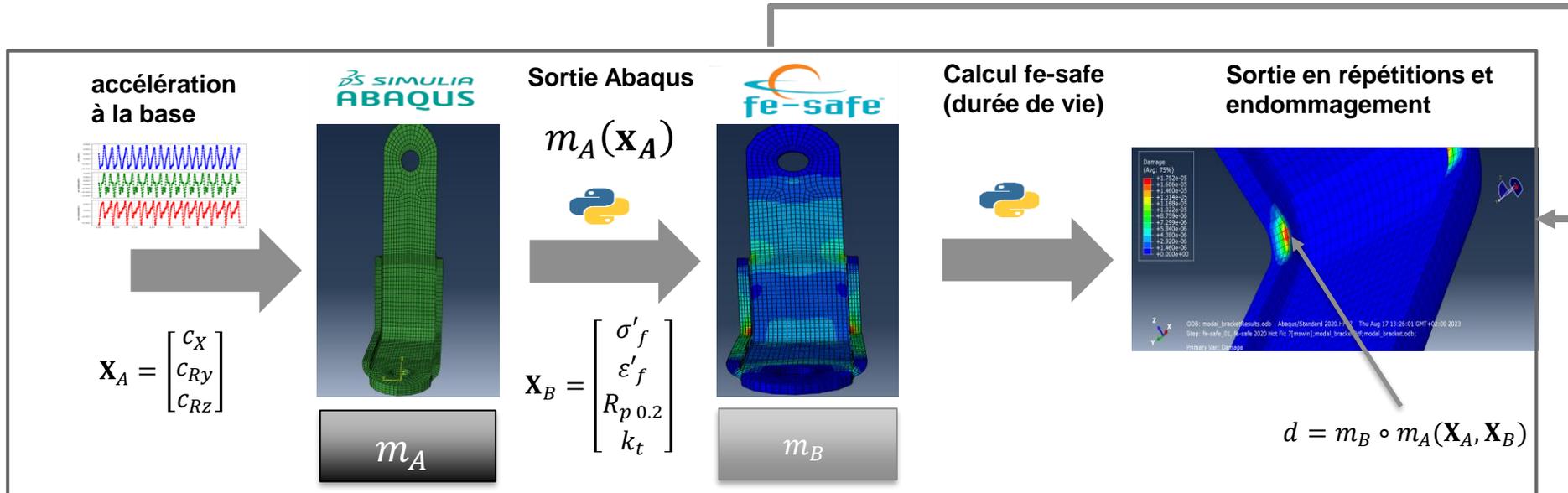
Configuration	méthodes	$p_f$	$\delta_{p_f}$ en %	Nombre de points mal classés sur $10^5$	Nombre d'appels à $m_A$	Nombre d'appels à la fonction performance
$X_A$ dominant	MCS	$2.97.10^{-3}$	5.79		$10^5$	$10^5$
	AK-MCS	$2.92.10^{-3}$	5.84	5	<b>125</b>	125
	AK-SM	$2.92.10^{-3}$	5.84	6	<b>76</b>	129
$X_B$ dominant	MCS	$2.8.10^{-3}$	5.96		$10^5$	$10^5$
	AK-MCS	$2.8.10^{-3}$	5.96	1	<b>72</b>	72
	AK-SM	$2.879.10^{-3}$	5.88	3	<b>27</b>	97

# Mise en œuvre de AK-SM sur un cas éléments-finis simplifié mais représentatif du cas industriel : cas intermédiaire « Modal Bracket »

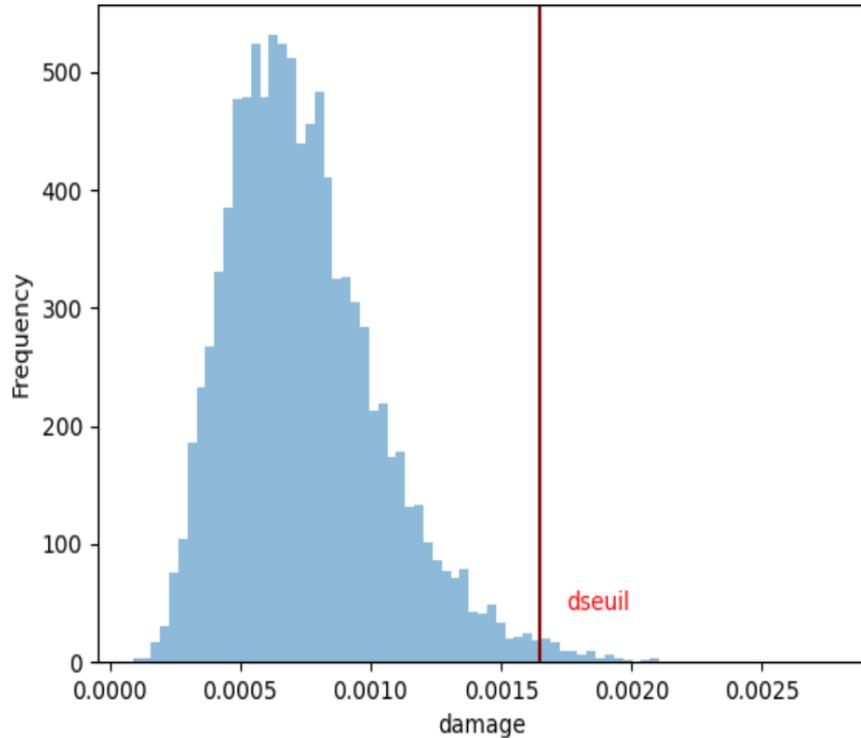


# Cas 1. Avec population de Monte-Carlo de référence

$N = 10^4$



# Cas 1. Avec population de Monte-Carlo de référence



	Random Variable	Distribution	Mean	Standard Deviation
<b>Case 1 (with reference)</b>	$c_{ampx}$	Normal	1	0.1
	$c_{ampry}$	Normal	1	0.1
	$c_{amprz}$	Normal	1	0.1
	$s_f$	Log-normal	1601	350
	$e_f$	Log-normal	0.976	0.126
	$Rp02$	Log-normal	253	5
	$k_t$	Normal	3	0.3

# Cas 1. Avec population de Monte-Carlo de référence

Method	$p_f$	$\delta_{p_f}$ (%)	Number of misclassified points	Number of $m_A$ calls	Number of performance calls	Computing time
MCS	$1,01 \cdot 10^{-2}$	9.99		$10^4$	$10^4$	$\approx 7d 3h$
AK-MCS-U	$1,01 \cdot 10^{-2}$	9.99	0	<b>50</b> + (10)	50 + (10)	1 h 03 min
AK-SM-U	$1,01 \cdot 10^{-2}$	9.99	0	<b>3</b> + (10)	64 + (10)	13 min 26s
AK-SM-ESC	$1,01 \cdot 10^{-2}$	9.99	0	<b>1</b> + (10)	23 + (10)	10 min 06s

Modal-Bracket  
first case

## Cas 2. Sans population de Monte-Carlo de référence

$N = 10^6$ : comparaison à AK-MCS seulement

	Random Variable	Distribution	Mean	Standard Deviation
<b>Case 2</b> <b>(without reference)</b>	$c_{ampx}$	Normal	1	0.1
	$c_{ampry}$	Normal	1	0.1
	$c_{amprz}$	Normal	1	0.1
	$s_f$	Log-normal	1601	350
	$e_f$	Log-normal	0.976	0.126
	$Rp02$	Log-normal	253	5
	$k_t$	Normal	3	0.09

## Cas 2. Sans population de Monte-Carlo de référence (comparaison à AK-MCS seulement)

Method	$p_f$	$\delta_{p_f}$ (%)	Number of $m_A$ calls	Number of performance calls	Computing time	
MCS					1 y 11 m (estimated)	
Modal Bracket second case	AK-MCS-U	$3,139 \cdot 10^{-3}$	1.78	<b>91</b> + (20)	91 + (20)	1 h 55 min
	AK-SM-U	$3,028 \cdot 10^{-3}$	1.81	<b>27</b> + (20)	137 + (20)	1 h 02 min
	AK-SM-ESC	$3,104 \cdot 10^{-3}$	1.79	<b>4</b> + (20)	20 + (20)	26 min

# CONCLUSION

Présentation de l'approche AK-SM pour **l'évaluation de la fiabilité** prenant activement en compte **les propriétés du code** (de la fonction de performance) en séparant les effets avec une **décomposition fonctionnelle**.

Possibilité d'appliquer cette démarche avec une autre **fonction d'apprentissage, méthode de simulation, ou critère d'arrêt**

Un **gain significatif** en termes de **coût** a été constaté, pour **une performance de classification quasiment équivalente** à AK-MCS.

## Perspective

Mise en œuvre de l'approche sur le cas industriel « **Etude fiabiliste de la durabilité du CAESAR®** ».