

Méthodes de réduction de variance pour l'estimation des indices de Sobol

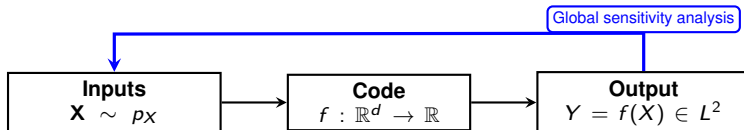
Haythem Boucharif^{1,2}

Directeur(s) : Jérôme Morio¹, Paul Rochet²

¹ ONERA/DTIS, ² ENAC/OPTIM

Analyse de sensibilité

On considère un modèle boîte noire $Y = f(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d) \sim p$,

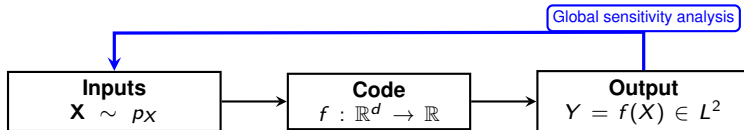


Outil pour quantifier en analyse de sensibilité :

$$\text{Indice de Sobol d'ordre 1} \Rightarrow S_i = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}[Y | \mathbf{X}_i])}{\text{Var}(Y)} = \frac{\mathbb{E}_{p_i} \left[(\mathbb{E}_{p_{-i}}[Y | \mathbf{X}_i])^2 \right] - (\mathbb{E}_p[Y])^2}{\text{Var}_p(Y)}.$$

Analyse de sensibilité

On considère un modèle boîte noire $Y = f(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d) \sim p$,



Outil pour quantifier en analyse de sensibilité :

$$\text{Indice de Sobol d'ordre 1} \Rightarrow S_i = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}[Y | \mathbf{X}_i])}{\text{Var}(Y)} = \frac{\mathbb{E}_{p_i} \left[(\mathbb{E}_{p_{-i}}[Y | \mathbf{X}_i])^2 \right] - (\mathbb{E}_p[Y])^2}{\text{Var}_p(Y)}.$$

Objectifs $\Rightarrow$ Amélioration des méthodes d'estimation de $\eta_i = \mathbb{E}_{p_i} \left[(\mathbb{E}_{p_{-i}}[Y | \mathbf{X}_i])^2 \right]$.

Analyse de sensibilité : Estimation des indices de Sobol

Méthodes classiques d'estimation :

- Pick-Freeze [1]
- Méthode des plus proches voisins [4]
- Méthode a noyaux [2] [3]
- Méthode des rangs [5]

Analyse de sensibilité : Estimation des indices de Sobol

Méthodes classiques d'estimation :

- Pick-Freeze [1]
- Méthode des plus proches voisins [4]
- Méthode a noyaux [2] [3]
- Méthode des rangs [5]

Méthode des rangs :

- On dispose d'un n -échantillon $(\mathbf{X}^k, Y^k)_{k=1, \dots, n}$.
- Les X_i sont triés dans l'ordre croissant : $X_i^{(1)} < X_i^{(2)} < \dots < X_i^{(n)}$.
- Les Y sont réordonnés en conséquence : $Y^{(k)}$ est la sortie associée à $X_i^{(k)}$.
- L'estimateur proposé est :

$$\hat{\eta}_i = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} Y^{(k)} Y^{(k+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \eta_i, \quad \text{avec } \mathbf{X}^k \sim p.$$

Échantillonnage préférentiel — Importance Sampling

Soit $\mathbf{X} \sim p$, et une fonction $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$. On souhaite estimer :

$$\mathbb{E}_p[f(\mathbf{X})] = \int_{\mathcal{X}} f(\mathbf{x})p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Estimateur Monte-Carlo :

$$\hat{I}_{\text{MC}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\mathbf{X}^k), \quad \mathbf{X}^k \sim p.$$

Limites :

- Difficulté d'échantillonnage selon $p(\mathbf{x})$,
- Variance de l'estimateur $\hat{I}_{\text{MC}}$ élevée.

Échantillonnage préférentiel — Importance Sampling

Soit $\mathbf{X} \sim p$, et une fonction $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$. On souhaite estimer :

$$\mathbb{E}_p[f(\mathbf{X})] = \int_{\mathcal{X}} f(\mathbf{x})p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Estimateur Monte-Carlo :

$$\hat{I}_{\text{MC}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\mathbf{X}^k), \quad \mathbf{X}^k \sim p.$$

Limites :

- Difficulté d'échantillonnage selon $p(\mathbf{x})$,
- Variance de l'estimateur $\hat{I}_{\text{MC}}$ élevée.

Importance Sampling [6] :

On introduit une densité auxiliaire $q(\mathbf{x})$ telle que $q(\mathbf{x}) > 0$ sur le support de $p \times f$.

$$\mathbb{E}_p[f(\mathbf{X})] = \int_{\mathcal{X}} f(\mathbf{x}) \frac{p(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})} q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbb{E}_q[f(\mathbf{X})w(\mathbf{X})],$$

où $w(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})}$ est le poids d'importance.

Estimateur IS :

$$\hat{I}_{\text{IS}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\mathbf{X}^k)w(\mathbf{X}^k), \quad \mathbf{X}^k \sim q.$$

Contribution — Estimation de η_i via importance sampling

Approche proposée : introduire une loi auxiliaire $q(\mathbf{x})$ pour réécrire η_i comme une espérance sous q :

$$\eta_i = \mathbb{E}_{p_i} \left[\mathbb{E}_{p_{-i}} [Y \mid X_i]^2 \right] = \mathbb{E}_{q_i} \left[\left(\mathbb{E}_{q_{-i}} [Z_i \mid X_i] \right)^2 \right],$$

où Z_i est une transformation pondérée de Y , le rapport p/q compensant le changement de loi :

$$Z_i := \sqrt{\frac{p_i(X_i)}{q_i(X_i)}} \cdot \frac{p_{-i}(\mathbf{X}_{-i})}{q_{-i}(\mathbf{X}_{-i} \mid X_i)} \cdot f(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \sim q.$$

Contribution — Estimation de η_i via importance sampling

Approche proposée : introduire une loi auxiliaire $q(\mathbf{x})$ pour réécrire η_i comme une espérance sous q :

$$\eta_i = \mathbb{E}_{p_i} \left[\mathbb{E}_{p_{-i}} [Y \mid X_i]^2 \right] = \mathbb{E}_{q_i} \left[\left(\mathbb{E}_{q_{-i}} [Z_i \mid X_i] \right)^2 \right],$$

où Z_i est une transformation pondérée de Y , le rapport p/q compensant le changement de loi :

$$Z_i := \sqrt{\frac{p_i(X_i)}{q_i(X_i)}} \cdot \frac{p_{-i}(\mathbf{X}_{-i})}{q_{-i}(\mathbf{X}_{-i} \mid X_i)} \cdot f(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \sim q.$$

En particulier :

$$\hat{\eta}_i = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} Z_i^{(k)} Z_i^{(k+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{q_i} \left[\left(\mathbb{E}_{q_{-i}} [Z_i \mid X_i] \right)^2 \right] = \eta_i, \quad \mathbf{X}^{(k)} \sim q.$$

Remarque : cette approche s'étend naturellement aux indices de Sobol d'ordre supérieur.

Réduction de variance et lois optimales

On note $m(x_i) = \mathbb{E}_{p_{-i}}[Y \mid X_i = x_i]$. Les estimateurs *efficients* atteignent la borne de variance asymptotique [2] :

$$\sigma_{\text{opt},i}^2(p) = 4 \mathbb{E} \left[m^2(X_i) Y^2 \right] - 3 \mathbb{E} \left[m^4(X_i) \right] - \eta_i^2. \quad (1)$$

Réduction de variance et lois optimales

On note $m(x_i) = \mathbb{E}_{p_{-i}}[Y \mid X_i = x_i]$. Les estimateurs *efficients* atteignent la borne de variance asymptotique [2] :

$$\sigma_{\text{opt},i}^2(p) = 4 \mathbb{E} \left[m^2(X_i) Y^2 \right] - 3 \mathbb{E} \left[m^4(X_i) \right] - \eta_i^2. \quad (1)$$

En utilisant la proposition précédente :

$$\sigma_{\text{opt},i}^2(q) = 4 \mathbb{E}_{q_i} \left[\mathbb{E}_{q_{-i}}[Z_i \mid X_i]^2 \mathbb{E}_{q_{-i}}[Z_i^2 \mid X_i] \right] - 3 \mathbb{E}_{q_i} \left[\mathbb{E}_{q_{-i}}[Z_i \mid X_i]^4 \right] - \eta_i^2.$$

Réduction de variance et lois optimales

On note $m(x_i) = \mathbb{E}_{p_{-i}}[Y \mid X_i = x_i]$. Les estimateurs *efficients* atteignent la borne de variance asymptotique [2] :

$$\sigma_{\text{opt},i}^2(p) = 4 \mathbb{E} \left[m^2(X_i) Y^2 \right] - 3 \mathbb{E} \left[m^4(X_i) \right] - \eta_i^2. \quad (1)$$

En utilisant la proposition précédente :

$$\sigma_{\text{opt},i}^2(q) = 4 \mathbb{E}_{q_i} \left[\mathbb{E}_{q_{-i}}[Z_i \mid X_i]^2 \mathbb{E}_{q_{-i}}[Z_i^2 \mid X_i] \right] - 3 \mathbb{E}_{q_i} \left[\mathbb{E}_{q_{-i}}[Z_i \mid X_i]^4 \right] - \eta_i^2.$$

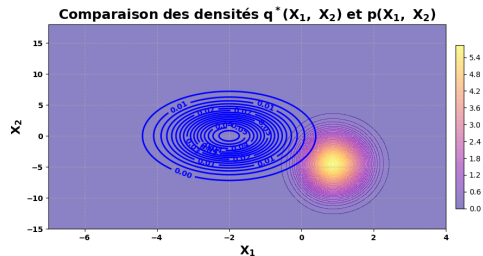
Résultat : Si $f(x) \geq 0$, il existe une densité optimale q^* qui annule la variance asymptotique :

$$q^*(\mathbf{x}) = q_i(x_i) q_{-i}(\mathbf{x}_{-i} \mid x_i) = \frac{p(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) m(x_i)}{\eta_i}, \quad \sigma_{\text{opt},i}^2(q^*) = 0.$$

Conséquence : en pratique, q^* est inconnu (car dépend de η_i) mais peut être approché par des méthodes d'échantillonnage préférentiel adaptatif ou de type MCMC.

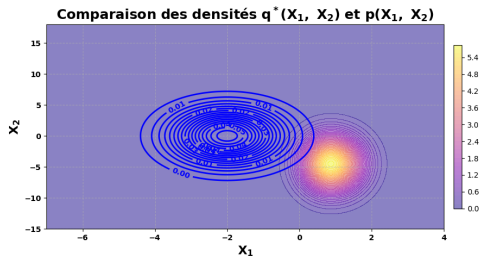
Exemple : Réduction de variance et lois optimales

- $X_1 \sim \mathcal{N}(-2, 1)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(0, 9)$
- Fonction : $f(x_1, x_2) = \exp\left(-\frac{(x_1-2)^2 + (x_2-4)^2}{2}\right)$
- Objectif : estimer $\eta_1 = \mathbb{E}[m_1^2(X_1)]$

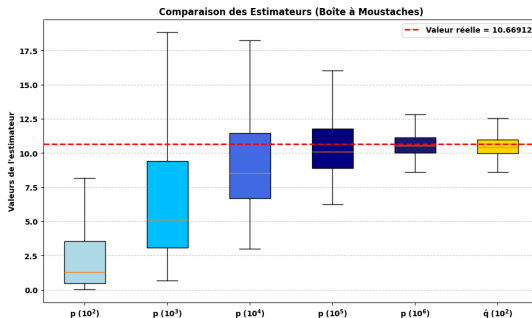


Exemple : Réduction de variance et lois optimales

- $X_1 \sim \mathcal{N}(-2, 1)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(0, 9)$
- Fonction : $f(x_1, x_2) = \exp\left(-\frac{(x_1-2)^2 + (x_2-4)^2}{2}\right)$
- Objectif : estimer $\eta_1 = \mathbb{E}[m_1^2(X_1)]$



- Plusieurs estimateurs sont générés selon la loi p ainsi qu'à partir de la loi optimale estimée $\hat{q}^*$, apprise à partir de 1000 points



Sensibilité de $\eta_i(\theta)$ aux lois d'entrée - Reverse Importance Sampling [7] (ETICS 2020)

Application : On veut explorer la sensibilité de $\eta_i(\theta) = \mathbb{E}_{p_\theta} \left[\left(\mathbb{E}_{p_{\theta,-i}} [Z_{\theta,i} \mid \mathbf{X}_i] \right)^2 \right]$ pour toute une famille de lois cibles p_θ , à partir d'un seul jeu de données simulé sous une loi initiale p_{θ_0} .

Méthode :

- Pour chaque loi cible p_θ , on applique des poids d'importance :

$$Z_{\theta,i} = \sqrt{\frac{p_{\theta,i}(\mathbf{X}_i)}{p_{\theta_0,i}(\mathbf{X}_i)}} \cdot \frac{p_{\theta,-i}(\mathbf{X}_{-i})}{p_{\theta_0,-i}(\mathbf{X}_{-i})} \cdot f(\mathbf{X})$$

Sensibilité de $\eta_i(\theta)$ aux lois d'entrée - Reverse Importance Sampling [7] (ETICS 2020)

Application : On veut explorer la sensibilité de $\eta_i(\theta) = \mathbb{E}_{p_\theta} \left[\left(\mathbb{E}_{p_{\theta,-i}} [Z_{\theta,i} \mid X_i] \right)^2 \right]$ pour toute une famille de lois cibles p_θ , à partir d'un seul jeu de données simulé sous une loi initiale p_{θ_0} .

Méthode :

- Pour chaque loi cible p_θ , on applique des poids d'importance :

$$Z_{\theta,i} = \sqrt{\frac{p_{\theta,i}(X_i)}{p_{\theta_0,i}(X_i)}} \cdot \frac{p_{\theta,-i}(\mathbf{X}_{-i})}{p_{\theta_0,-i}(\mathbf{X}_{-i})} \cdot f(\mathbf{X})$$

- Puis on utilise :

$$\hat{\eta}_i^{\text{rank}}(\theta) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} Z_{\theta,i}^{(k)} \cdot Z_{\theta,i}^{(k+1)}$$

- On estime alors $\eta_i(\theta)$ pour toutes les lois cibles p_θ , à partir du même jeu de données suivant p_{θ_0} .

Illustration numérique : Reverse Importance Sampling

On étudie un code boîte noire [8] retournant l'épaisseur de glace le long d'un profil d'aile sur 128 positions. Les entrées $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ sont indépendantes et uniformes sur

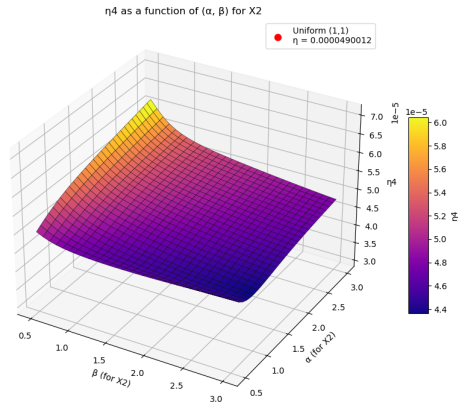
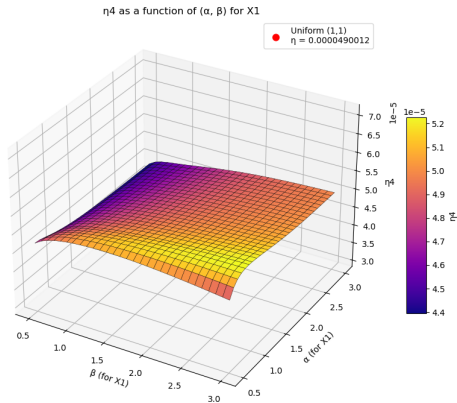
$$\mathbf{x}_{\text{low}} = (3.5, 65, 261, 15, 4 \times 10^{-4}), \quad \mathbf{x}_{\text{up}} = (4.5, 75, 265, 15, 6 \times 10^{-4}).$$

Un plan d'expériences de taille $N = 2500$ fournit des sorties dans $\mathbb{R}^{128}$. On considère la position présentant la plus grande variance, qui sera notée Y et étudiée par la suite. Toutes les sorties sont normalisées et transformées en variables uniformes sur $[0, 1]$ et pour chaque $\eta_i(\theta)$, on utilise la variable auxiliaire

$$Z_{\theta,i} = \sqrt{\frac{\text{Beta}_{\alpha_{\theta}, \beta_{\theta}}(X_i^{\text{std}})}{\text{Unif}[0, 1](X_i^{\text{std}})}} \prod_{j \neq i} \frac{\text{Beta}_{\alpha_{\theta}, \beta_{\theta}}(X_j^{\text{std}})}{\text{Unif}[0, 1](X_j^{\text{std}})} f(\mathbf{X}).$$

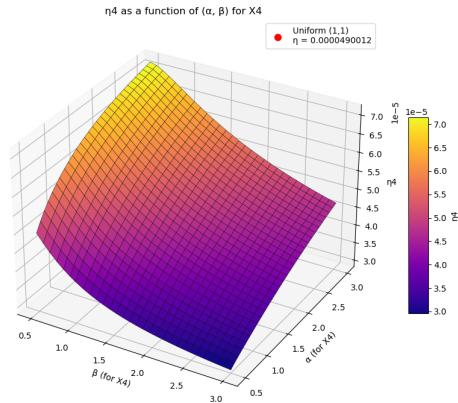
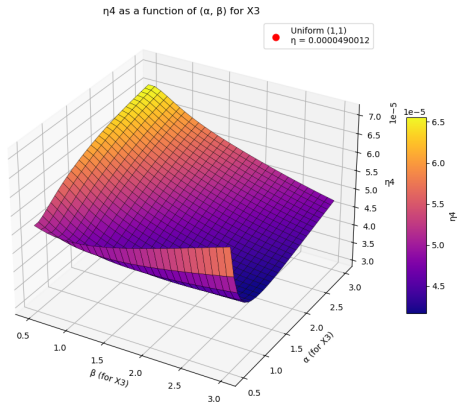
Dans cette application, on se concentre sur $\eta_4(\theta) = \mathbb{E}_{p_{\theta}} [(\mathbb{E}[Y | X_4])^2]$ où X_4 représente la température de l'air ambiant. Pour étudier sa sensibilité aux lois marginales, on remplace la loi uniforme d'un seul X_j à la fois par une loi **Beta** dont les paramètres (α_j, β_j) varient, les autres entrées restant inchangées.

Illustration numérique : Sensibilité de $\eta_i(\theta)$ aux lois d'entrée



Figures : Effet des variations de la loi marginale sur η_4 : chaque sous-figure montre l'évolution de η_4 lorsque les paramètres Beta d'une variable d'entrée X_j sont modifiés, les autres restant uniformes.

Illustration numérique : Sensibilité de $\eta_i(\theta)$ aux lois d'entrée



Figures : Effet des variations de la loi marginale sur η_4 : chaque sous-figure montre l'évolution de η_4 lorsque les paramètres Beta d'une variable d'entrée X_j sont modifiés, les autres restant uniformes.

Contribution (en cours) Variable de contrôle et estimation de η_i

On considère $Y = f(\mathbf{X})$, où l'on cherche à estimer la moyenne de performance $\theta = \mathbb{E}[f(\mathbf{X})]$ à partir de l'estimateur Monte Carlo $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{X}_i)$.

Principe de la variable de contrôle. On introduit un méta-modèle f^a dont l'espérance $\theta^a = \mathbb{E}[f^a(\mathbf{X})]$ est connue. L'estimateur corrigé s'écrit :

$$\hat{\theta}_{\text{cv}}(\beta) = \hat{\theta} - \beta (\hat{\theta}^a - \theta^a), \quad \hat{\theta}^a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f^a(\mathbf{X}_i).$$

Contribution (en cours) Variable de contrôle et estimation de η_i

On considère $Y = f(\mathbf{X})$, où l'on cherche à estimer la moyenne de performance $\theta = \mathbb{E}[f(\mathbf{X})]$ à partir de l'estimateur Monte Carlo $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{X}_i)$.

Principe de la variable de contrôle. On introduit un méta-modèle f^a dont l'espérance $\theta^a = \mathbb{E}[f^a(\mathbf{X})]$ est connue. L'estimateur corrigé s'écrit :

$$\hat{\theta}_{\text{CV}}(\beta) = \hat{\theta} - \beta (\hat{\theta}^a - \theta^a), \quad \hat{\theta}^a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f^a(\mathbf{X}_i).$$

Sa variance vaut :

$$\text{Var}(\hat{\theta}_{\text{CV}}) = \text{Var}(\hat{\theta}) - 2\beta \text{Cov}(\hat{\theta}, \hat{\theta}^a) + \beta^2 \text{Var}(\hat{\theta}^a),$$

et elle est minimale pour

$$\beta^* = \frac{\text{Cov}(\hat{\theta}, \hat{\theta}^a)}{\text{Var}(\hat{\theta}^a)}, \quad \text{Var}(\hat{\theta}_{\text{CV}}) = \text{Var}(\hat{\theta}) - \frac{\text{Cov}(\hat{\theta}, \hat{\theta}^a)^2}{\text{Var}(\hat{\theta}^a)}.$$

Estimateur des rangs et variable de contrôle

On dispose d'un échantillon i.i.d. $\{(\mathbf{X}_i), Y_i, \tilde{Y}_i\}_{i=1}^n$, et les sorties correspondantes du modèle principal et du méta-modèle sont notées $(Y_{(i)}, \tilde{Y}_{(i)})$.

Les estimateurs basés sur les rangs sont :

$$\hat{\eta}_{\text{rank}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} Y_{(i)} Y_{(i+1)}, \quad \tilde{\eta}_{\text{rank}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{Y}_{(i)} \tilde{Y}_{(i+1)}.$$

Estimateur des rangs et variable de contrôle

On dispose d'un échantillon i.i.d. $\{(\mathbf{X}_i), Y_i, \tilde{Y}_i\}_{i=1}^n$, et les sorties correspondantes du modèle principal et du méta-modèle sont notées $(Y_{(i)}, \tilde{Y}_{(i)})$.

Les estimateurs basés sur les rangs sont :

$$\hat{\eta}_{\text{rank}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} Y_{(i)} Y_{(i+1)}, \quad \tilde{\eta}_{\text{rank}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{Y}_{(i)} \tilde{Y}_{(i+1)}.$$

L'estimateur à variable de contrôle s'écrit :

$$\hat{\eta}_{\text{rank-CV}} = \hat{\eta}_{\text{rank}} - \hat{\beta}^* (\tilde{\eta}_{\text{rank}} - \hat{\mathbb{E}}[\tilde{\eta}_{\text{rank}}]), \quad \text{Var}(\hat{\eta}_{\text{CV}}) = \text{Var}(\hat{\eta}) - \frac{\text{Cov}(\hat{\eta}, \tilde{\eta})^2}{\text{Var}(\tilde{\eta})}.$$

Estimateur des rangs et variable de contrôle

On dispose d'un échantillon i.i.d. $\{(\mathbf{X}_i), Y_i, \tilde{Y}_i\}_{i=1}^n$, et les sorties correspondantes du modèle principal et du méta-modèle sont notées $(Y_{(i)}, \tilde{Y}_{(i)})$.

Les estimateurs basés sur les rangs sont :

$$\hat{\eta}_{\text{rank}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} Y_{(i)} Y_{(i+1)}, \quad \tilde{\eta}_{\text{rank}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{Y}_{(i)} \tilde{Y}_{(i+1)}.$$

L'estimateur à variable de contrôle s'écrit :

$$\hat{\eta}_{\text{rank-CV}} = \hat{\eta}_{\text{rank}} - \hat{\beta}^* (\tilde{\eta}_{\text{rank}} - \hat{\mathbb{E}}[\tilde{\eta}_{\text{rank}}]), \quad \text{Var}(\hat{\eta}_{\text{CV}}) = \text{Var}(\hat{\eta}) - \frac{\text{Cov}(\hat{\eta}, \tilde{\eta})^2}{\text{Var}(\tilde{\eta})}.$$

Si $\tilde{f}$ est appris indépendamment des données $(\mathbf{X}_i, Y_i)$, alors $\text{Cov}(\hat{\eta}_{\text{rank}}, \tilde{\eta}_{\text{rank}})$ s'écrit :

$$n \text{Cov}(\hat{\eta}_{\text{rank}}, \tilde{\eta}_{\text{rank}}) = \text{Cov}(m(X)^2, \tilde{m}(X)^2) + o(1).$$

Exemple : fonction d'Ishigami et méta-modèle

On considère la fonction d'Ishigami

$(x_1, x_2, x_3) \sim \mathcal{U}([-\pi, \pi]^3)$:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1) + 7 \sin^2(x_2) + 0.1 x_3^4 \sin(x_1), .$$

Le méta-modèle $\tilde{f}$ est un processus gaussien appris sur des simulations de f .

On cherche à estimer la quantité :

$$\eta_1 = \mathbb{E}[m_1(X_1)^2], \quad m_1(x_1) = \mathbb{E}[Y \mid X_1 = x_1].$$

Exemple : fonction d'Ishigami et méta-modèle

On considère la fonction d'Ishigami

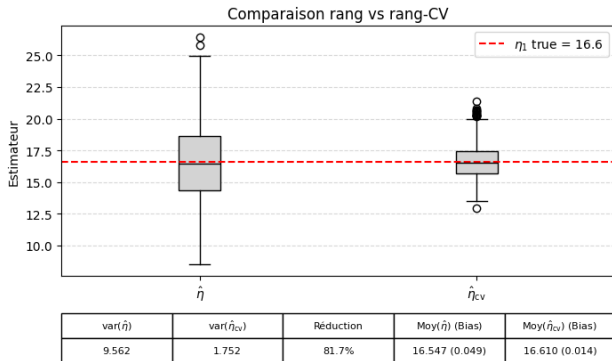
$(x_1, x_2, x_3) \sim \mathcal{U}([- \pi, \pi]^3)$:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1) + 7 \sin^2(x_2) + 0.1 x_3^4 \sin(x_1), .$$

Le méta-modèle $\tilde{f}$ est un processus gaussien appris sur des simulations de f .

On cherche à estimer la quantité :

$$\eta_1 = \mathbb{E}[m_1(X_1)^2], \quad m_1(x_1) = \mathbb{E}[Y \mid X_1 = x_1].$$



Travaux en cours et perspectives

Soumission récente :

- Article principal (cette présentation) ([arXiv:2507.05958](https://arxiv.org/abs/2507.05958)).

Projets en cours :

- Développement d'une nouvelle méthode d'estimation de η_i basée sur les *variables de contrôle*.
- Estimation simultanée de tous les indices de Sobol avec un même échantillon IS, via une loi jointe commune.
- Introduction d'un nouvel estimateur de η_i , fondé sur la *moyenne harmonique* dans un cadre bayésien.

Bibliographie

- [1] F. Gamboa, A. Janon, T. Klein, A. Lagnoux et C. Prieur,
Statistical Inference for Sobol Pick-Freeze Monte Carlo Method,
Statistics, 50 (4), pp. 881–902 (2016).
- [2] S. D. Veiga et F. Gamboa,
Efficient Estimation of Sensitivity Indices,
Journal of Nonparametric Statistics, 25 (3), pp. 573–595 (2013).
- [3] S. D. Veiga, F. Gamboa, A. Lagnoux, T. Klein et C. Prieur,
New Estimation of Sobol' Indices Using Kernels (2023),
<https://arxiv.org/abs/2303.17832>,
arXiv preprint arXiv :2303.17832.
- [4] L. Devroye, L. Györfi, G. Lugosi et H. Walk,
A Nearest Neighbor Estimate of the Residual Variance,
Electronic Journal of Statistics, 12 (1), pp. 1752–1778 (2018).

- [5] F. Gamboa, P. Gremaud, T. Klein et A. Lagnoux,
Global Sensitivity Analysis : A Novel Generation of Mighty Estimators Based on Rank Statistics,
Bernoulli, 28 (4), pp. 2345–2374 (2022).
- [6] H. Kahn et T. E. Harris,
Estimation of particle transmission by random sampling,
National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 12, pp. 27–30 (1951).
- [7] P. Lemaître, E. Sergienko, A. Arnaud, N. Bousquet, F. Gamboa et B. Iooss,
Density Modification Based Reliability Sensitivity Analysis,
Journal of Statistical Computation and Simulation, 85 (7), pp. 1200–1223 (2015).
- [8] P. Trontin, G. Blanchard, A. Kontogiannis et P. Villedieu,
Description and Assessment of the New ONERA 2D Icing Suite IGLOO2D,
Dans *AIAA Atmospheric and Space Environments Conference*, no. AIAA 2017-3417. American Institute
of Aeronautics and Astronautics (2017),
Session : Ice Accretion Modeling.