

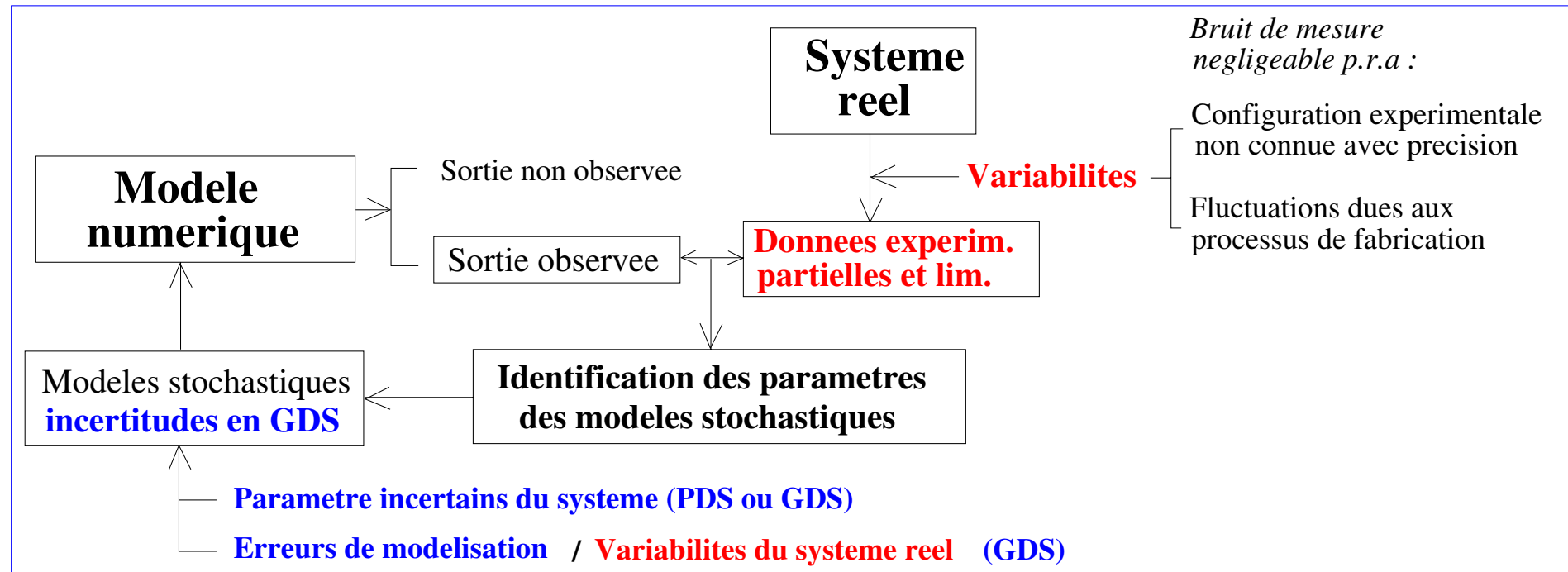
**Identification statistique inverse de modèles probabilistes en
Grande Dimension Stochastique (GDS):
Quantification des incertitudes en dynamique et en vibroacoustique.
Champ d'élasticité stochastique mésoscopique des microstructures hétérogènes**

Christian Soize

christian.soize@univ-paris-est.fr
Université Paris-Est Marne-la-Vallée

**Forum CEA
CEA/DAM/DIF, Bruyères-le-Châtel
1^{er} octobre 2014**

1. Problème d'identification de modélisation probabiliste en Grande Dimension Stochastique (GDS)



- **Question:** Peut-on construire directement une **modélisation stochastique posterior des incertitudes** basée sur une **modélisation stochastique prior simple/naive** et la méthode de Bayes ?
- **Réponse:** Non, car on considère la GDS avec des données expérimentales partielles et limitées. Alors, des approches plus avancées sont nécessaires.

Méthodologie proposée pour l'identification des modèles probabilistes en GDS avec données expérimentales partielles et limitées

[C. Soize], *Stochastic Models of Uncertainties in Computational Mechanics*, ASCE, Reston, 2012.

Etape 1. **Modèle probabiliste prior algébrique**, contrôlé par un hyper-paramètre vectoriel δ de **petite dimension**, pour les

- ▷ **incertitudes paramétriques**, en **PDS** ou en **GDS**
- ▷ **erreurs de modélisation / variabilités du système réel**, en **GDS**

construit avec le principe du MaxEnt sous les contraintes définies par les **informations disponibles prior** qui **doivent inclure des propriétés mathématiques additionnelles afin d'enrichir les données expérimentales manquantes**.

Etape 2. **Modèle probabiliste prior algébrique OPTIMAL** construit avec la méthode des moindres carrés ou le maximum de vraisemblance, et les données expérimentales $\implies \delta^{\text{opt}}$.

Etape 3. **Modèle probabiliste posterior des incertitudes paramétriques**

(en **PDS** or **GDS**) en présence du **modèle probabiliste prior optimal** (en **GDS**)
des **erreurs de modélisation / variabilités du système réel**, en utilisant

- ▷ la méthode de Bayes pour les **incertitudes paramétriques en PDS**
- ▷ des "dérivées" de la méthode de Bayes pour le cas de la **GDS**

2. Identification d'un modèle probabiliste prior optimal des erreurs de modélisation en GDS. Application à la vibroacoustique

[**C. Soize**], A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics, *PEM* 15 (2000).

[**C. Soize**], Random matrix theory for modeling uncertainties in computational mechanics, *CMAME* 194 (2005).

[**M. P. Mignolet, C. Soize**], Nonparametric stochastic modeling of linear systems with prescribed variance of several natural frequencies, *PEM* 23 (2008).

[**J.F Durand, C. Soize, L. Gagliardini**], Structural-acoustic modeling of automotive vehicles in presence of uncertainties and experimental identification and validation, *JASA* 124 (2008).

[**M. Kassem, C. Soize, L. Gagliardini**], Structural partitioning of complex structures in the medium-frequency range. An application to an automotive vehicle, *JSV* 330 (2011)

[**C. Soize, I.E. Poloskov**], Time-domain formulation in computational dynamics for linear viscoelastic media with model uncertainties and stochastic excitation, *Computers and Mathematics with Applications*, 64 (2012).

[**A. Arnoux, A. Batou, C. Soize, L. Gagliardini**], Stochastic reduced order computational model of structures having numerous local elastic modes in low frequency dynamics, *JSV* 332 (2013).

[**M. P. Mignolet, C. Soize, J. Avalos**], Nonparametric stochastic modeling of structures with uncertain boundary conditions / coupling between substructures, *AIAA Journal*, 51 (2013).

[**R. Ohayon, C. Soize**], *Advanced Computational Vibroacoustics - Reduced-Order Models and Uncertainty Quantification*, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

Modèle numérique d'ordre réduit stochastique avec un modèle probabiliste prior des incertitudes en GDS en vibroacoustique interne

- Utilisation de l'approche probabiliste non paramétrique pour construire le modèle probabiliste **prior** des **incertitudes paramétriques** et **des erreurs de modélisation**.
- Pour ω fixé, la réponse stochastique est représentée par le vecteur aléatoire $(\mathbf{Y}(\omega), \mathbf{P}(\omega))$:

$$\mathbf{Y}(\omega) = \sum_{\alpha=1}^{n_s} Q_{\alpha}^s(\omega) \varphi_{\alpha} \quad , \quad \mathbf{P}(\omega) = \sum_{\beta=1}^{n_f} Q_{\beta}^f(\omega) \psi_{\beta}$$

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 [\mathbf{M}_s] + i\omega [\mathbf{D}_s(\omega)] + [\mathbf{K}_s] & & [\mathbf{C}] \\ & & \\ \omega^2 [\mathbf{C}]^T & & -\omega^2 [\mathbf{M}_f] + i\omega [\mathbf{D}_f] + [\mathbf{K}_f] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{s,n_s}(\omega) \\ \mathbf{Q}^{f,n_f}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{f}}^s(\omega) \\ \underline{\mathbf{f}}^f(\omega) \end{bmatrix}$$

où $[\mathbf{M}_s]$, $[\mathbf{D}_s(\omega)]$, $[\mathbf{K}_s]$, $[\mathbf{M}_f]$, $[\mathbf{D}_f]$, $[\mathbf{K}_f]$ et $[\mathbf{C}]$ sont des matrices aléatoires pleines en **GDS**, dont les paramètres de dispersion (hyperparamètres)

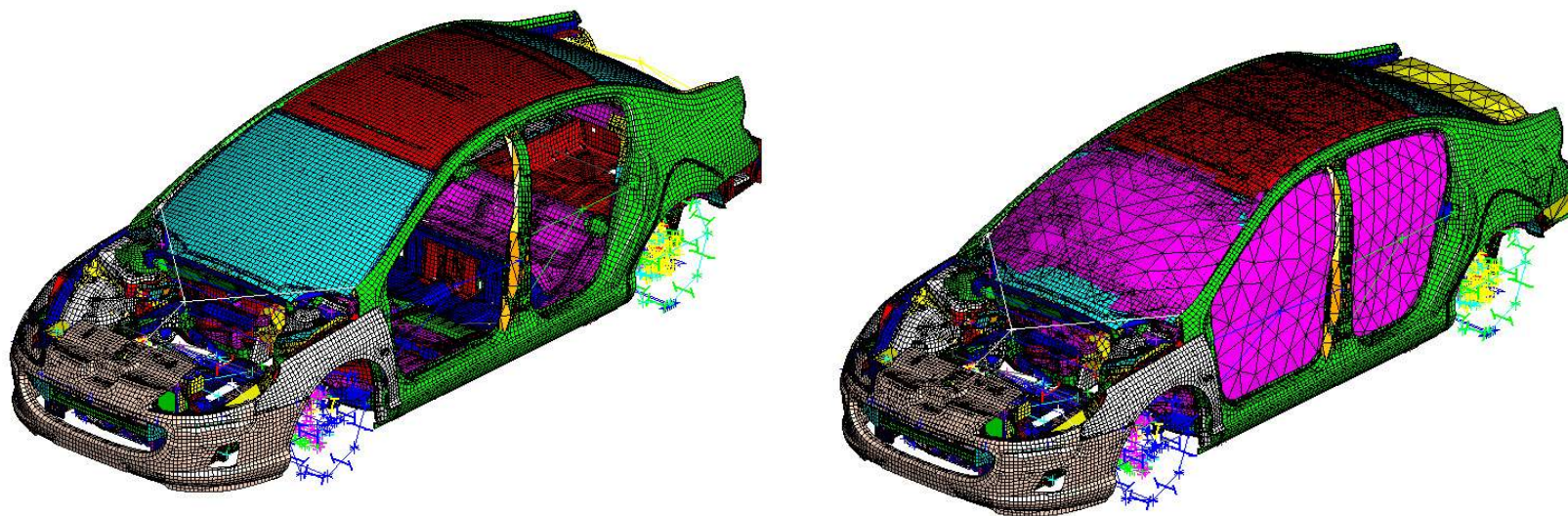
$$\delta_{M_s}, \delta_{D_s}, \delta_{K_s}, \delta_{M_f}, \delta_{D_f}, \delta_{K_f}, \delta_C$$

qui contrôlent le niveau d'incertitude, et qui doivent être identifiées en résolvant un problème statistique inverse.

Application : vibroacoustique interne d'une voiture

- ▷ Le système vibroacoustique est celui d'une **voiture d'un type donné**.
- ▷ Un **unique modèle numérique nominal** est développé et doit avoir la capacité de **prédire plusieurs options de configurations**.
- ▷ L'**objectif** est la prévision du **booming noise** induit par la rotation du moteur :
[1500, 4800] tr/pm, correspondant à une bande fréquentielle [50, 160] Hz :
 - **Entrée** : forces appliquées aux supports du moteur.
 - **Sortie** : champ de pression acoustique dans la cavité acoustique (habitacle).

● Modèle numérique vibroacoustique nominal et stochastique

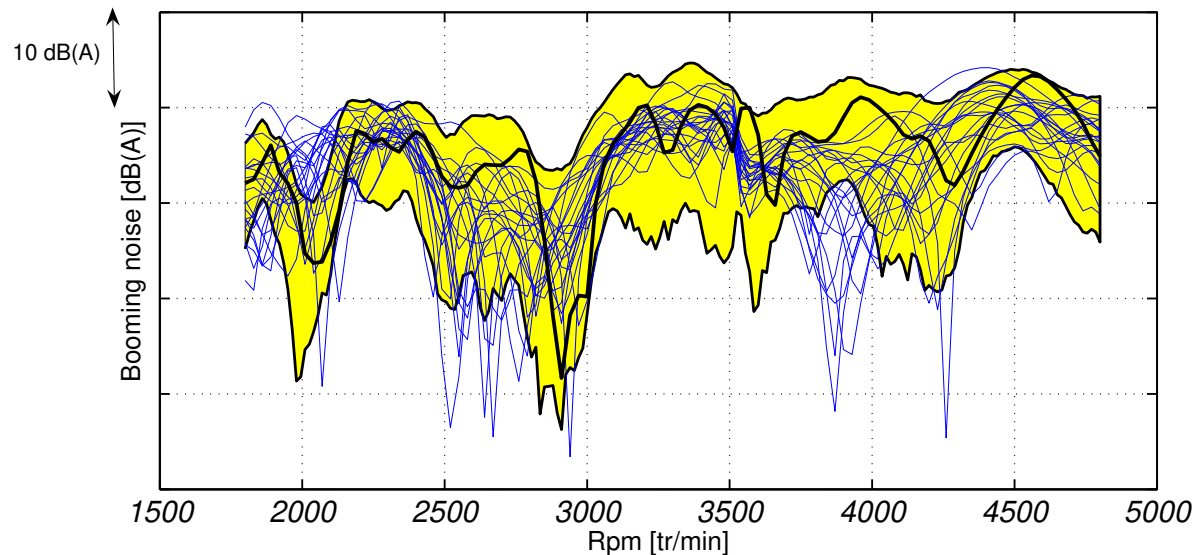


- ▷ **Modèle nominal** - Structure : 978 733 DDL de déplacement (fig. gauche)
 - Cavité acoustique : 8 139 DDL de pression (fig. droite)
- ▷ **Modèle numérique nominal d'ordre réduit**
 - Structure : 1 722 modes élastiques
 - Cavité acoustique : 57 modes acoustiques
- ▷ **Hyperparamètres du modèle numérique stochastique d'ordre réduit**
 - Structure : $\delta = \{\delta_{M_s}, \delta_{D_s}, \delta_{K_s}\}$
 - Cavité acoustique : $\delta_f = \delta_{M_f} = \delta_{D_f} = \delta_{K_f}$
 - Couplage vibroacoustique : δ_C

Procédure d'identification des hyperparamètres du modèle probabiliste prior des incertitudes en GDS

- GDS: environ 4 600 000 variables aléatoires indépendantes (germes) dans les matrices aléatoires.
- **Identification expérimentale des hyperparamètres** $\delta_f = \delta_{M_f} = \delta_{D_f} = \delta_{K_f}$
 - ▷ **Mesures:** 30 voitures de même type avec variabilités.
 - ▷ **Excitation:** Source acoustique dans la cavité.
 - ▷ **Observation:** Densité de puissance acoustique sur la bande de fréquence.
 - ▷ **Identification:** Méthode du maximum de vraisemblance donnant δ_f^{opt} .
- **Identification expérimentale des hyperparamètres** $\delta = \{\delta_{M_s}, \delta_{D_s}, \delta_{K_s}\}$
 - ▷ **Mesures:** 20 voitures de même type avec variabilité.
 - ▷ **Excitation:** Forces appliquées aux supports du moteur.
 - ▷ **Observation:** FRF dans la structure.
 - ▷ **Identification:** Méthode des moindres carrés donnant δ^{opt} .
- **Pas d'indentification expérimentale de l'hyperparamètre** δ_C dont la valeur est fixée.

Prévision du booming noise avec le modèle probabiliste prior optimal des incertitudes



Prévision du domaine de confiance (en dBA) du bruit interne en un point observé dû aux excitations du moteur pour un niveau de probabilité de 0.95

$\delta_f = \delta_f^{\text{opt}}$, $\delta = \delta^{\text{opt}}$, δ_C fixés, 600 réalisations par la méthode de Monte Carlo.

Axe horizontal : tr/pm. Axe vertical: module de la pression acoustique en dBA.

Domaine de confiance (jaune) - 20 mesures expérimentales (lignes bleues).

Prévision donnée par le modèle numérique nominal (line noire)

3. Identification du **modèle probabiliste posterior** des **incertitudes paramétriques en PDS** en présence d'un **modèle probabiliste prior des erreurs de modélisation en GDS** - Application à la dynamique des structures en basse et en moyenne fréquence

[C. Soize], Generalized Probabilistic approach of uncertainties in computational dynamics using random matrices and polynomial chaos decompositions, *IJNME* 81 (2010).

[A. Batou, C. Soize, M. Corus], Experimental identification of an uncertain computational dynamical model representing a family of structures, *Computer and Structures* 89 (2011).

[A. Batou, C. Soize], Stochastic modeling and identification of an uncertain computational dynamical model with random fields properties and model uncertainties, *Archive of Applied Mechanics* 83 (2013).

[C. Soize], Bayesian posteriors of uncertainty quantification in computational structural dynamics for low- and medium-frequency ranges, *Computers and Structures* 126 (2013).

[A. Batou, C. Soize, S. Audebert], Model identification in computational stochastic dynamics using experimental modal data, *Mechanical Systems and Signal Processing*, on line, May 27 (2014).

Modèle numérique stochastique d'ordre réduit dans le domaine fréquentiel avec un modèle probabiliste prior des incertitudes paramétriques et des erreurs de modélisations (incertitudes non paramétriques)

$$\mathbf{Y}(\omega) = [\phi(\mathbf{X})] \mathbf{Q}(\omega)$$

$$(-\omega^2[\mathbf{M}(\mathbf{X})] + i\omega[\mathbf{D}(\mathbf{X})] + [\mathbf{K}(\mathbf{X})]) \mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{f}(\omega; \mathbf{X})$$

- Modèles probabilistes prior :
 - ▷ **vecteur aléatoire \mathbf{X} pour les incertitudes paramétriques en PDS**
 - ▷ **matrices aléatoires $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{D}]$, $[\mathbf{K}]$ pour les incertitudes non paramétriques en GDS**
- Matrices aléatoires telles que :

$$[\mathbf{M}(\mathbf{X})] = [L_M(\mathbf{X})]^T [\mathbf{G}_M] [L_M(\mathbf{X})]$$

$$[\mathbf{D}(\mathbf{X})] = [L_D(\mathbf{X})]^T [\mathbf{G}_D] [L_D(\mathbf{X})]$$

$$[\mathbf{K}(\mathbf{X})] = [L_K(\mathbf{X})]^T [\mathbf{G}_K] [L_K(\mathbf{X})]$$
 et leurs lois de probabilité sont contrôlées par les **hyperparamètres** :
 - ▷ **$\underline{\mathbf{x}}$, δ_X en petite dimension pour les incertitudes paramétriques,**
 - ▷ **$\delta_G = (\delta_M, \delta_D, \delta_K)$ pour les incertitudes non paramétriques.**

Identification des modèles probabilistes prior optimaux des incertitudes

- ▷ Soit \mathbf{W}^{obs} le vecteur observation et soit $\mathbf{w}_1^{\text{obs,exp}}, \dots, \mathbf{w}_{\nu_{\text{exp}}}^{\text{obs,exp}}$ les **données expérimentales** correspondantes, pour ν_{exp} configurations expérimentales.
- ▷ La valeur optimale $(\underline{\mathbf{x}}^{\text{opt}}, \delta_X^{\text{opt}}, \delta_G^{\text{opt}})$ du vecteur $(\underline{\mathbf{x}}, \delta_X, \delta_G)$ qui est supposé être de **petite dimension**, est estimée en utilisant le **maximum de vraisemblance**.

Identification du modèle probabiliste posterior des incertitudes paramétriques en présence du modèle probabiliste prior optimal des incertitudes non paramétriques

Pour la d.d.p **prior optimal** fixée, $p_G([G_M], [G_D], [G_K]; \delta_G^{\text{opt}})$, des **incertitudes non paramétriques en GDS**, la d.d.p **posterior** $p_{\mathbf{X}}^{\text{post}}(\mathbf{x})$ des **incertitudes paramétriques en PDS** est estimée en utilisant la **méthode de Bayes** :

$$p_{\mathbf{X}}^{\text{post}}(\mathbf{x}) = \mathcal{L}(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}^{\text{prior}}(\mathbf{x}) \quad , \quad p_{\mathbf{X}}^{\text{prior}}(\mathbf{x}) = p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \underline{\mathbf{x}}^{\text{opt}}, \delta_{\mathbf{X}}^{\text{opt}})$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \frac{\prod_{r=1}^{\nu_{\text{exp}}} p_{\mathbf{W}_{\text{obs}}|\mathbf{X}}(\mathbf{w}_r^{\text{obs,exp}}|\mathbf{x})}{E\{\prod_{r=1}^{\nu_{\text{exp}}} p_{\mathbf{W}_{\text{obs}}|\mathbf{X}}(\mathbf{w}_r^{\text{obs,exp}}|\mathbf{X}^{\text{prior}})\}}$$

avec $\mathbf{w} \mapsto p_{\mathbf{W}_{\text{obs}}|\mathbf{X}}(\mathbf{w}|\mathbf{x})$ qui dépend de $p_G([G_M], [G_D], [G_K]; \delta_G^{\text{opt}})$ et qui est estimée avec le modèle numérique stochastique d'ordre réduit pour $\mathbf{X} = \mathbf{x}$

Analyse sur un exemple simple pour les basses et moyennes fréquences

- **Systeme réel**

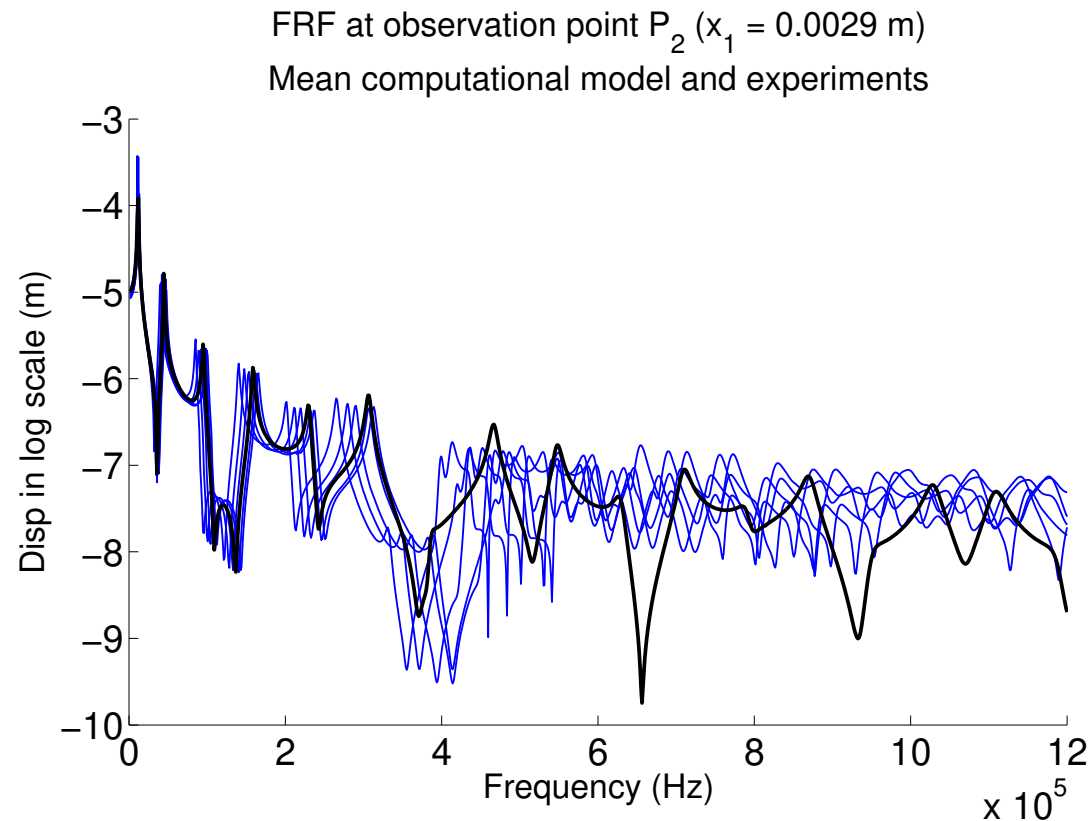
- ▷ Cylindre élancée 3D borné constitué d'un milieu élastique amorti, longueur 0.01 m, section rectangulaire 0.001 m \times 0.002 m.

- **Données expérimentales simulées**

- ▷ 5 jeux de données expérimentales ont été construites avec un modèle numérique utilisant des EF 3D 8-noeuds solides et ayant 69867 DDL, et avec paramètres aléatoires (module d'Young, coefficient de Poisson, masse volumique).

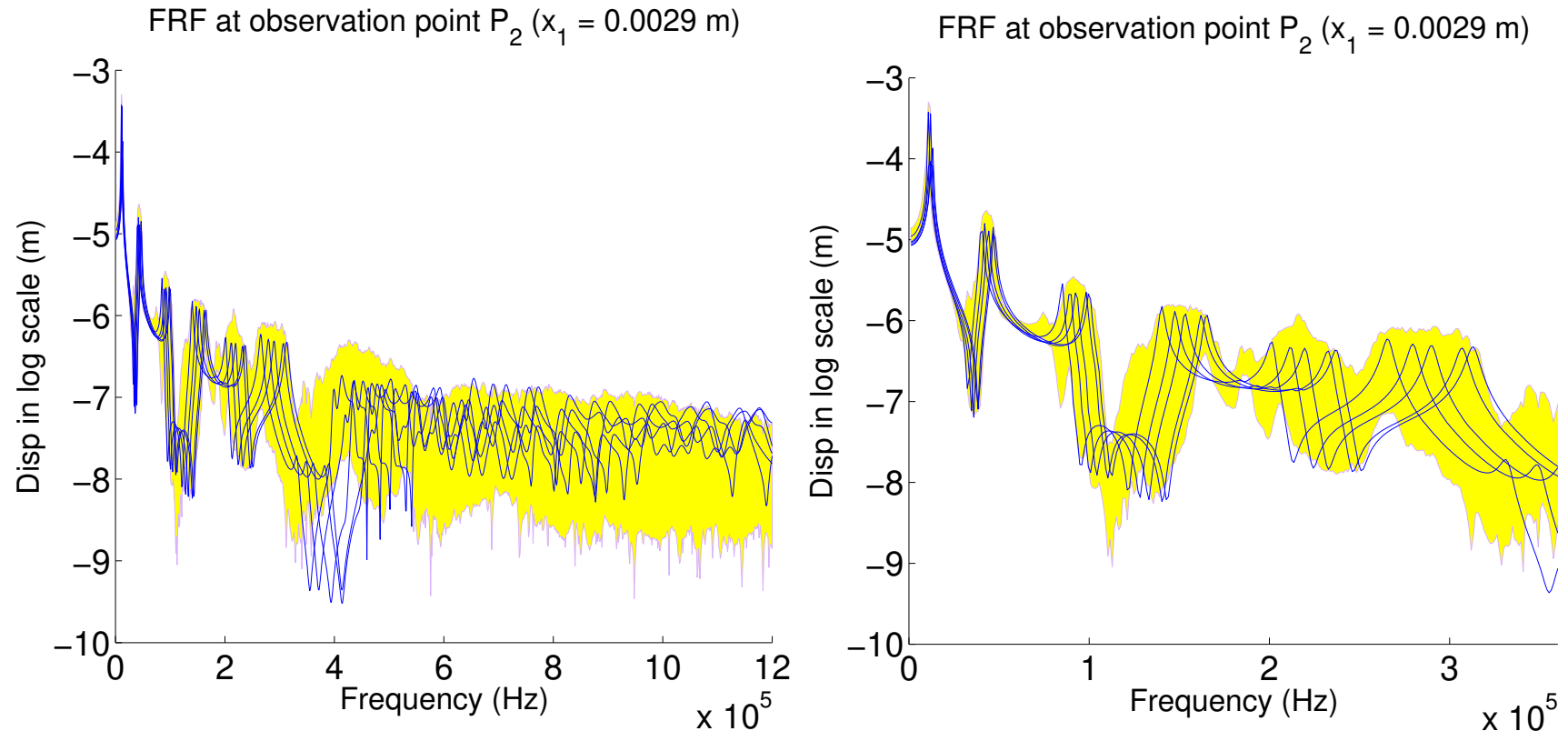
Prévision avec le modèle numérique nominal et comparaison expérimentale

MN nominal : Poutre de Timoshenko avec un facteur de déformation de cisaillement égal à 3.



- ▷ FRF pour le déplacement transversal: expe. simulée (lignes bleues), MN nominal (ligne noire).
- ▷ $\mathcal{B}_{BF} =]0, 360\,000]$ Hz: prévisions acceptables pour les premières résonances.
- ▷ $\mathcal{B}_{MF} =]360\,000, 1\,200\,000]$ Hz: différences significatives dues aux incertitudes.

Prévision avec le modèle probabiliste posterior des incertitudes paramétriques (module d'Young et facteur de déformation de cisaillement) et avec le modèle probabiliste prior optimal des incertitudes non paramétriques



▷ Domaine de confiance ($P_c=0.95$) de la FRF pour un déplacement transversal : Modèle probabiliste posterior des incertitudes paramétriques et modèle probabiliste prior optimal des incertitudes non paramétriques (domaine jaune), expérimentation simulée (5 lignes bleues). La figure de droite montre que la prévision est bonne dans la bande \mathcal{B}_{BF} .

4. Identification des **chaos polynomiaux posteriors** des **champs de tenseur stochastique en GDS** avec données partielles et limitées au travers des problèmes aux limites. Application au champ de tenseur d'élasticité mésoscopique de microstructure hétérogène

[C. Soize], Non Gaussian positive-definite matrix-valued random fields for elliptic stochastic partial differential operators, *CMAME* 195 (2006).

[C. Desceliers, R. Ghanem, C. Soize], Maximum likelihood estimation of stochastic chaos representations from experimental data, *IJNME*, 66 (2006).

[C. Soize], Construction of probability distributions in high dimension using the maximum entropy principle. Applications to stochastic processes, random fields and random matrices, *IJNME*, 76 (2008).

[C. Soize, R. Ghanem], Reduced chaos decomposition with random coefficients of vector-valued random variables and random fields, *CMAME*, 198 (2009).

[C. Soize], Identification of high-dimension polynomial chaos expansions with random coefficients for non-Gaussian tensor-valued random fields using partial and limited experimental data, *CMAME*, 199 (2010).

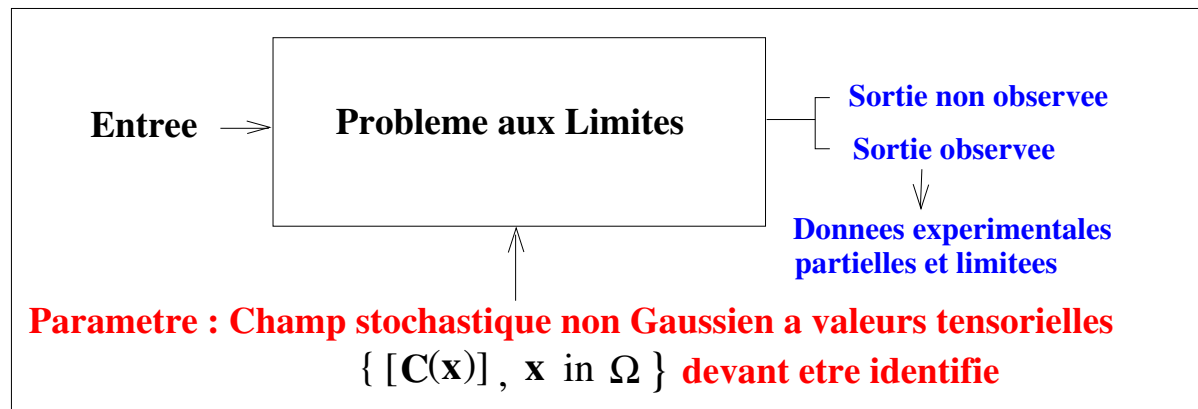
[C. Soize], A computational inverse method for identification of non-Gaussian random fields using the Bayesian approach in very high dimension, *CMAME*, 200 (2011).

[J. Guillemot, C. Soize], Non-Gaussian positive-definite matrix-valued random fields with constrained eigenvalues: application to random elasticity tensors with uncertain material symmetries, *IJNME*, 88 (2011).

[G. Perrin, C. Soize, D. Duhamel, C. Funfschilling], Identification of polynomial chaos representations in high dimension from a set of realizations, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 34 (2012).

[J. Guillemot, C. Soize], Stochastic model and generator for random fields with symmetry properties: application to the mesoscopic modeling of elastic random media, *SIAM Multiscale Model. & Simul.* 11 (2013).

Problème statistique inverse à résoudre en GDS (challenging problem)



- ▷ Identification du paramètre $\{\mathbf{C}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega\}$ qui est un **champ stochastique non Gaussien à valeurs matricielles** supposé être en **GDS**
- ▷ En utilisant comme représentation de $\{\mathbf{C}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega\}$, un développement en **chaos polynomiaux** (DCP) avec des coefficients aléatoires.
- ▷ On doit alors construire un modèle probabiliste posterior des coefficients aléatoires du DCP d'un **champ non Gaussien à valeurs matricielles** en **GDS**, en utilisant des données expérimentales partielles et limitées .

Discrétisation du problème aux limites stochastique par la méthode des éléments finis

- L'approximation par la méthode des éléments finis du problème aux limites donne un **vecteur aléatoire** \mathbb{V} qui représente le champ non Gaussien à valeurs matricielles $\{\mathbf{C}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega\}$ qui doit être identifié.
- **Sortie:** vecteur aléatoire $\mathbf{U} = (\mathbf{U}^{\text{obs}}, \mathbf{U}^{\text{nobs}})$ qui inclut les DDL observés et les DDL non observés, tels que

$$\mathbf{U}^{\text{obs}} = \mathbf{h}^{\text{obs}}(\mathbb{V}) \quad , \quad \mathbf{U}^{\text{nobs}} = \mathbf{h}^{\text{nobs}}(\mathbb{V})$$

où $\mathbf{h} = (\mathbf{h}^{\text{obs}}, \mathbf{h}^{\text{nobs}})$ est une **transformation non linéaire déterministe** construite en résolvant le problème aux limites discrétisé.

Pour la GDS avec des données expérimentales partielles et limitées, la méthodologie proposée est constituée de 5 étapes :

Etape 1: Introduction d'une **famille** $\{\mathbb{V}^{\text{MPPA}}(\mathbf{q})\}_{\mathbf{q}}$ de **modèles probabilistes prior algébriques (MPPA) en GDS**, dépendant d'un hyperparamètre \mathbf{q} de **petite dimension**.

Une telle **famille** de (MPPA) doit être **construite avec soin** en utilisant l'**information disponible** et le **le principe du Maximum d'Entropie** de la théorie de l'Information.

Etape 2: Identification du **MPPA optimal** $\mathbb{V}^{\text{MPPA},\text{opt}} = \mathbb{V}^{\text{MPPA}}(\mathbf{q}^{\text{opt}})$ dans la famille construite en utilisant le problème aux limites stochastiques, la **méthode des moindres carrés** ou la **méthode du maximum de vraisemblance** et les **données expérimentales relatives aux sorties observées**.

Etape 3: Construction d'un **MPPA optimal d'ordre réduit (statistiquement)**:

$$\underline{\mathbf{v}}^{\text{MPPA,opt}} \simeq \underline{\mathbf{v}} + \sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_j} \eta_j^{\text{MPPA,opt}} \mathbb{W}^j$$

avec n **très grand** dû à l'hypothèse de la GDS.

Etape 4: Construction du **développement en chaos polynomiaux**, avec des **coefficients vectoriels déterministes**, du MPPA optimal d'ordre réduit:

$$\eta^{\text{MPPA,opt}} \simeq \eta^{\text{chaos}}(N) = \sum_{\alpha=1}^N \underline{\mathbf{y}}^\alpha \Psi_\alpha(\underline{\Xi})$$

- ▷ $\underline{\Xi}$ **vecteur Gaussien normalisé** de **dimension N_g inconnue**
- ▷ $\underline{\mathbf{y}}^\alpha$ sont les N **coefficients vectoriels déterministes** à identifier, avec une nombre **N inconnue** a priori très grand

Identification de N_g , N et $\{\underline{\mathbf{y}}^\alpha\}_\alpha$ par la **méthode du maximum de vraisemblance** pour obtenir la **convergence**, et en utilisant des algorithmes adaptés.

Etape 5: Construction d'un **modèle posterior** en introduisant des **coefficients vectoriels aléatoires** dans le **développement en chaos polynomiaux** du MPPA optimal d'ordre réduit

$$\boldsymbol{\eta}^{\text{post}} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{Y}^{\alpha, \text{post}} \Psi_{\alpha}(\boldsymbol{\Xi})$$

$$\underline{\mathbb{Y}}^{\text{post}} = \underline{\mathbb{Y}} + \sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_j} \eta_j^{\text{post}} \mathbb{W}^j$$

- ▷ Utilisation de la **méthode de Bayes** pour estimer la d.d.p du vecteur aléatoire $\mathbb{Y} = (\mathbf{Y}^1, \dots, \mathbf{Y}^N)$, centré autour de $(\underline{\mathbf{y}}^1, \dots, \underline{\mathbf{y}}^N)$.
- ▷ Pour la GDS, et avec données partielle et limitées, une alternative, dérivée de la méthode de Bayes, peut être avantageusement utilisée; voir [C. Soize], A computational inverse method for identification of non-Gaussian random fields using the Bayesian approach in very high dimension, *CMAME*, 200 (2011).

Identification du champ d'élasticité non Gaussien à l'échelle mésoscopique d'une microstructure élastique hétérogène

▷ **Problème aux limites stochastiques pour la microstructure** $\Omega = (]0, 1[)^3$:

$$-\text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{dans } \Omega ,$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 ,$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^\Gamma(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \Gamma \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\text{obs}}$$

$$\text{Loi de comportement stochastique : } \boldsymbol{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}) = \mathbb{C}_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{jk}(\mathbf{x})$$

▷ **Données**

Points d'intégration des éléments finis du maillage = 1 728

Dimension du vecteur $\mathbb{V} = 36\,288$

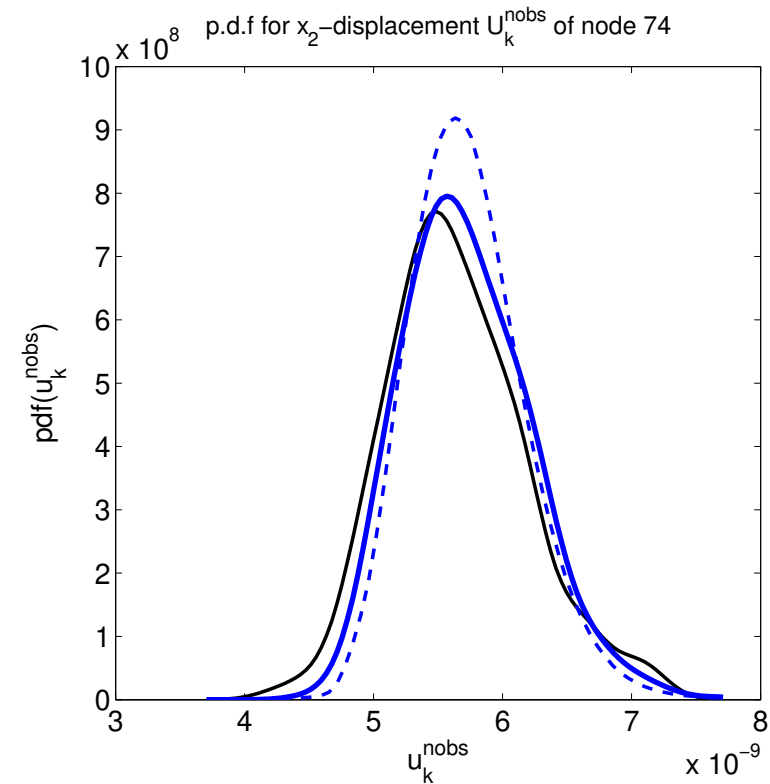
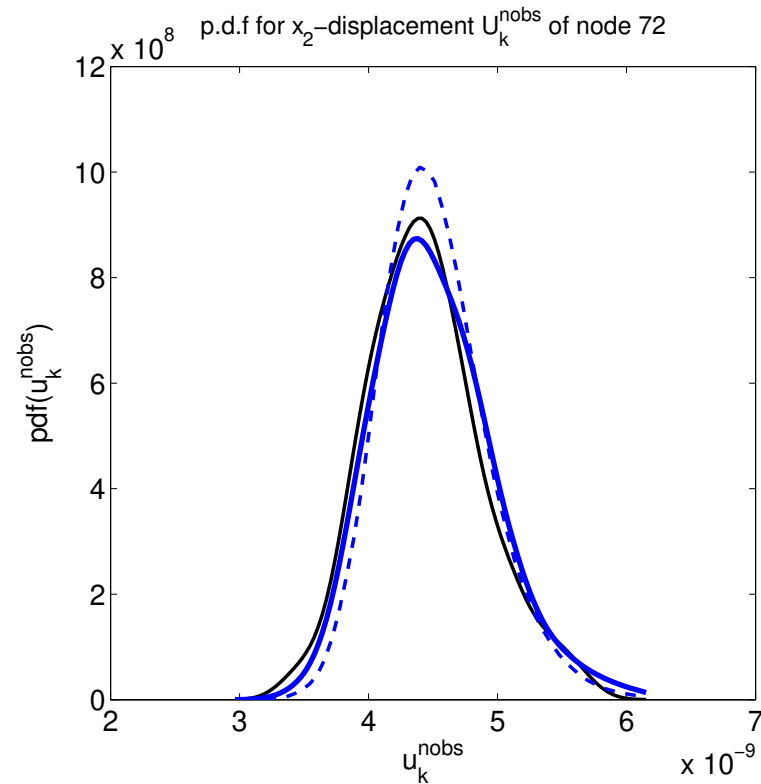
DDL observé sur une face de la frontière du domaine = 50

Nombre de tests expérimentaux = 200 (expérimentations simulées)

Dimension de la réduction statistique = 550

Convergence du développement en chaos polynomiaux $N_d = 20$ and $N_g = 4$
yielding $N = 10\,625$ (soit 5 843 750 coefficients scalaires identifiés).

- **Evaluation de la qualité : d.d.p de 2 DDL non observés (à l'intérieur du domaine), calculées avec le modèle posterior**



d.d.p de référence (expérimental simulé) (ligne noire)

d.d.p prior (ligne tiretée bleue)

d.d.p posterior (ligne bleue)

Conclusion

- Les approches standards pour l'**identification statistique inverse** des modèles stochastiques des **incertitudes** en **grande dimension stochastique** et avec des données partielles et limitées ne sont pas adaptées.
- Nécessité d'introduire des méthodologies plus avancées :
 - ▷ Construction de modèles **posterior** des incertitudes paramétriques à partir de modèles **prior optimaux** des incertitudes paramétriques en présence d'un **modèle prior optimal des incertitudes non paramétriques** (erreurs de modélisations).
 - ▷ Construction **non naive** de modèles stochastiques **prior** contenant des propriétés mathématiques essentielles qui permettent d'enrichir les données expérimentales manquantes pour l'identification des **champs en grande dimension stochastique** au travers de problèmes aux limites (requérant un effort important en modélisation stochastique).

Quelques mots sur les problèmes non linéaires

- **Quantification des incertitudes en dynamique non linéaire**

[**C. Desceliers, C. Soize, S. Cambier**], Non-parametric-parametric model for random uncertainties in nonlinear structural dynamics - Application to earthquake engineering, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 33 (2004).

[**M. P. Mignolet, C. Soize**], Stochastic reduced order models for uncertain nonlinear dynamical systems, *CMAME* 197 (2008).

[**A. Batou, C. Soize**], Identification of stochastic loads applied to a non-linear dynamical system using an uncertain computational model and experimental responses, *Computational Mechanics*, 43 (2009).

[**E. Capiez-Lernout, C. Soize, M. Mignolet**], Computational stochastic statics of an uncertain curved structure with geometrical nonlinearity in three-dimensional elasticity, *Computational Mechanics* 49 (2012).

[**A. Batou, C. Soize**], Rigid multibody system dynamics with uncertain rigid bodies, *Multibody System Dynamics* 27 (2012).

[**A. Batou, C. Soize, N. Brie**], Reduced-order computational model in nonlinear structural dynamics for structures having numerous local elastic modes in the low-frequency range. Application to fuel assemblies, *Nuclear Engineering and Design* 262 (2013).

[**E. Capiez-Lernout, C. Soize, M. Mignolet**], Post-buckling nonlinear static and dynamical analyzes of uncertain cylindrical shells and experimental validation, *CMAME* 271 (2014).

● Problèmes aux limites non linéaires multi-échelles stochastiques

[**A. Clément, C. Soize, J. Yvonnet**], Computational nonlinear stochastic homogenization using a non-concurrent multiscale approach for hyperelastic heterogenous microstructures analysis, *IJNME* 91 (2012).

[**A. Clément, C. Soize, J. Yvonnet**], Uncertainty quantification in computational stochastic multiscale analysis of nonlinear elastic materials, *CMAME* 254 (2013).

[**M. Arnst, C. Soize, R. Ghanem**], Hybrid sampling/spectral method for solving stochastic coupled problems, *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification* 1 (2013).

[**Y. Le Guennec, R. Cottureau, D. Clouteau, C. Soize**], A coupling method for stochastic continuum models at different scales, *PEM* on line (2014).

... mais beaucoup reste à faire