Quelle information peut-on extraire du bruit de fond ?

J. Garnier (Université Paris VII)

Imagerie par cross corrélation de signaux bruités

J. Garnier (Université Paris VII)

Collaborateurs : G. Papanicolaou (Stanford), C. Bardos (Paris 7), K. Solna (Irvine).

Problème classique en géophysique : construire la carte de la vitesse du son du sous-sol.

- Méthode usuelle : Utilisation des signaux sismiques issus de tremblements de terre.

Imagerie par cross corrélation de signaux bruités

J. Garnier (Université Paris VII)

Collaborateurs : G. Papanicolaou (Stanford), C. Bardos (Paris 7), K. Solna (Irvine).

Problème classique en géophysique : construire la carte de la vitesse du son du sous-sol.

- Méthode usuelle : Utilisation des signaux sismiques issus de tremblements de terre.
- Un tremblement de terre se produit en un point $\mathbf{x}_1$ à l'instant t_1.
- L'onde sismique est enregistrée au point $\mathbf{x}_2$ à l'instant t_2.
- On en déduit le temps de trajet $\tau(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = t_2 - t_1$.
- Comme on connaît la distance $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$, on trouve la vitesse du son entre $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$.

Imagerie par cross corrélation de signaux bruités

J. Garnier (Université Paris VII)

Collaborateurs : G. Papanicolaou (Stanford), C. Bardos (Paris 7), K. Solna (Irvine).

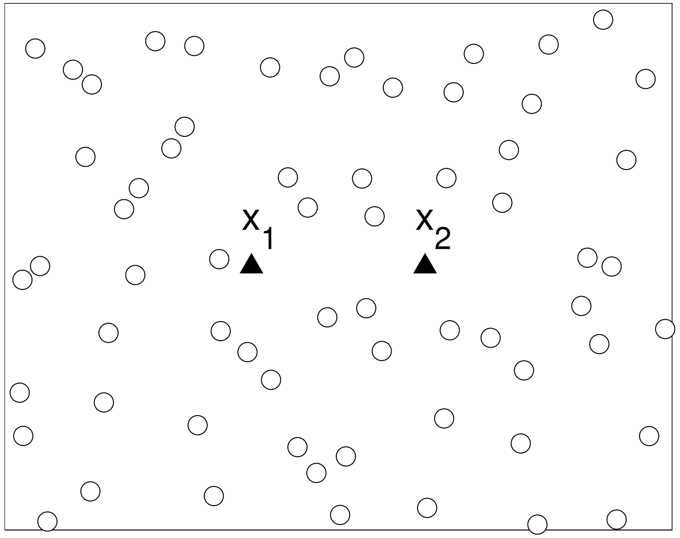
Problème classique en géophysique : construire la carte de la vitesse du son du sous-sol.

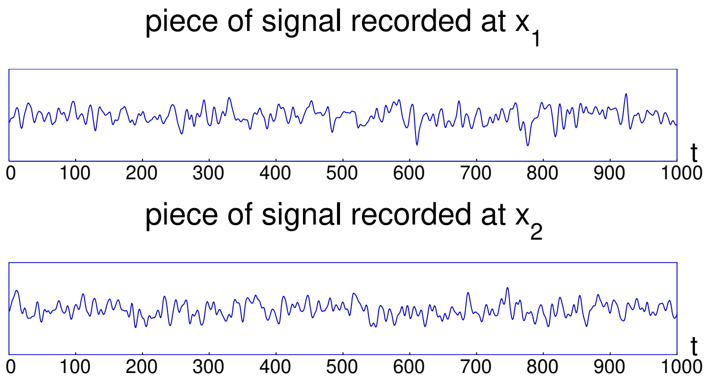
- Méthode usuelle : Utilisation des signaux sismiques issus de tremblements de terre.
- Un tremblement de terre se produit en un point $\mathbf{x}_1$ à l'instant t_1.
- L'onde sismique est enregistrée au point $\mathbf{x}_2$ à l'instant t_2.
- On en déduit le temps de trajet $\tau(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = t_2 - t_1$.
- Comme on connaît la distance $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$, on trouve la vitesse du son entre $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$.

- Méthode originale : Utilisation du bruit sismique (bruit sismique = bruit de fond qu'on enregistre quand il ne se passe rien).

Estimation de temps de trajet par cross corrélation

- Des sources de bruit ($\circ$) émettent des signaux aléatoires stationnaires.
- Les signaux se propagent dans le milieu.
- Les signaux $u(t, \mathbf{x}_1)$ et $u(t, \mathbf{x}_2)$ sont enregistrés par les capteurs $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$.

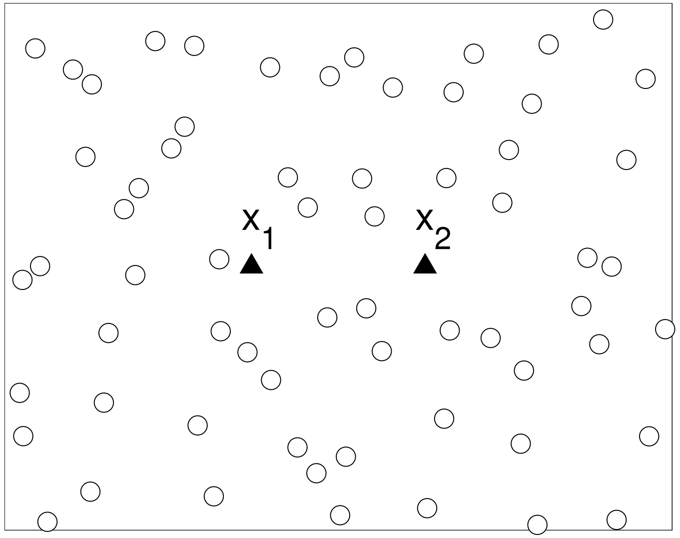


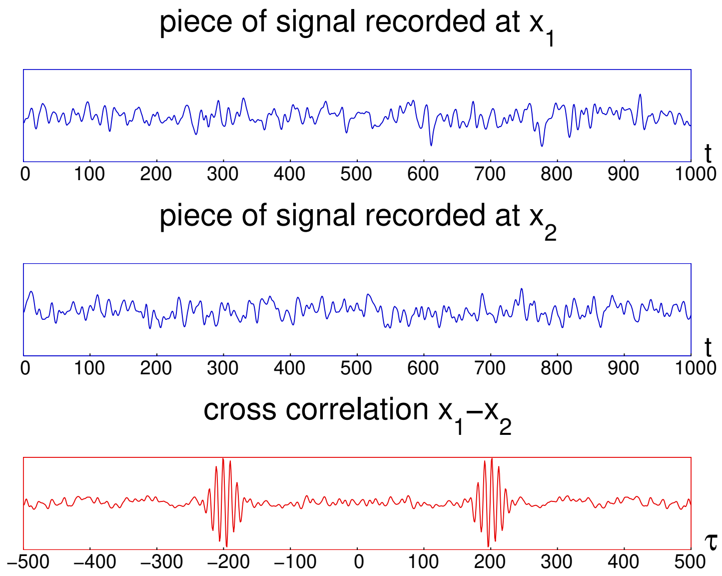


- Quelle information (sur le milieu) peut-on extraire de ces signaux ?

Estimation de temps de trajet par cross corrélation

- Des sources de bruit ($\circ$) émettent des signaux aléatoires stationnaires.
- Les signaux se propagent dans le milieu.
- Les signaux $u(t, \mathbf{x}_1)$ et $u(t, \mathbf{x}_2)$ sont enregistrés par les capteurs $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$.



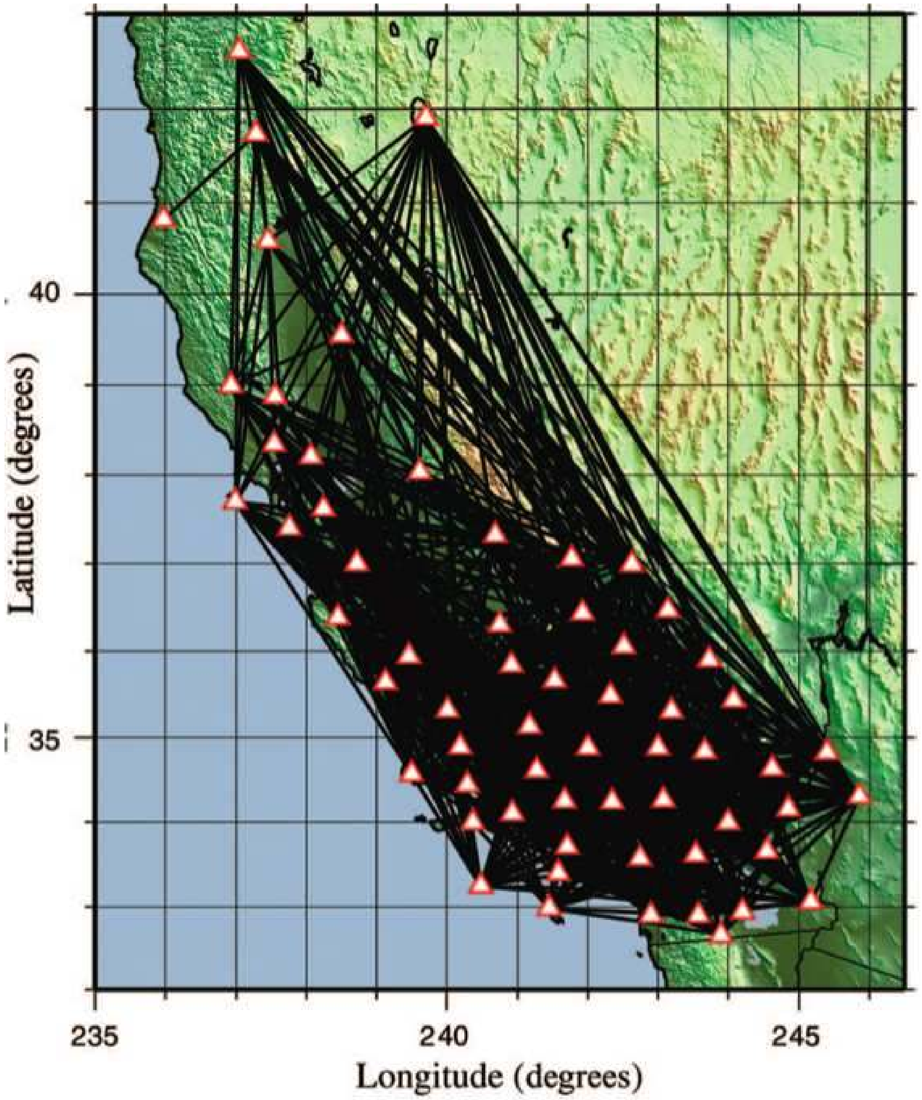


- On calcule la cross corrélation :

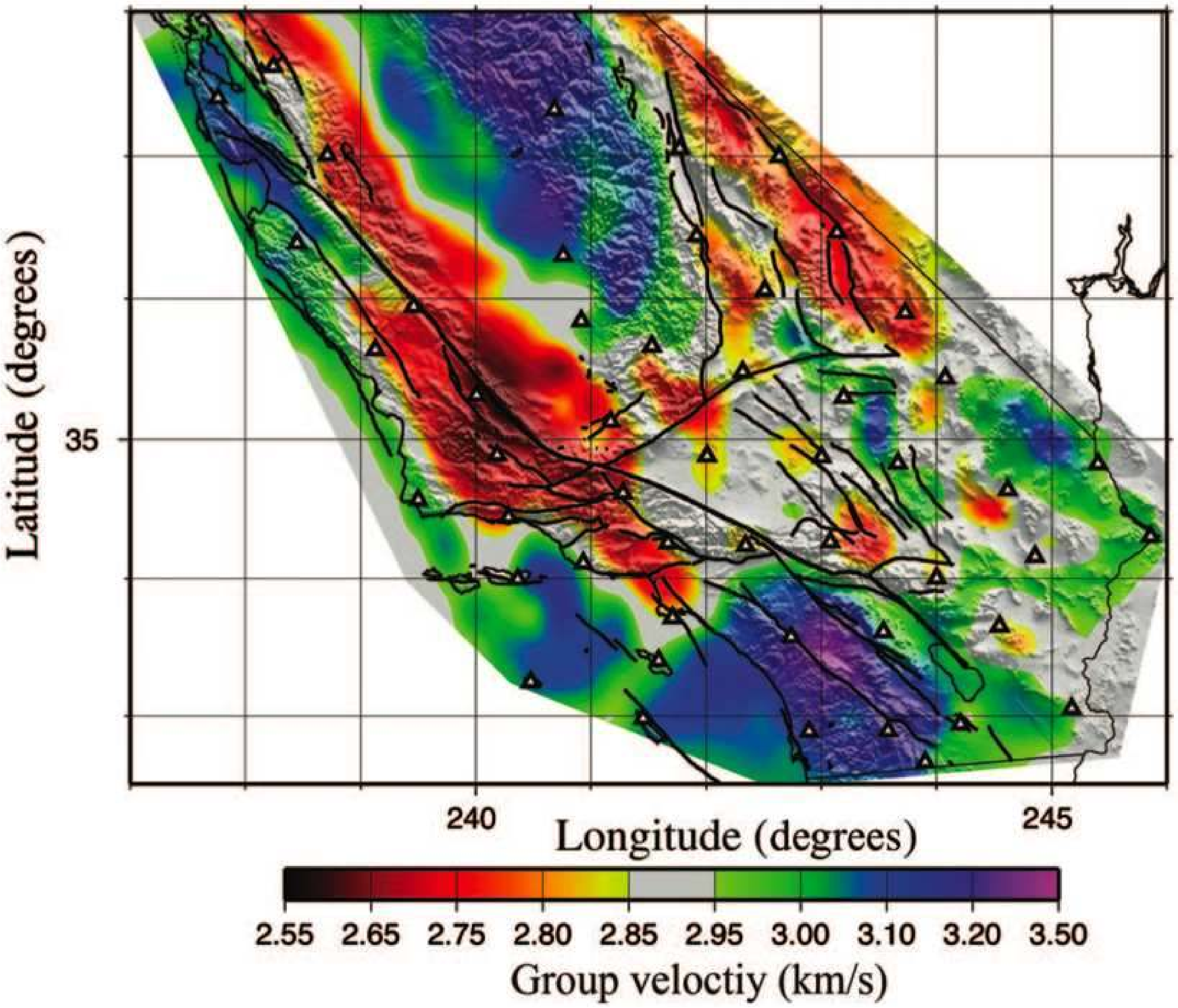
$$C(\tau, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t, \mathbf{x}_1) u(t + \tau, \mathbf{x}_2) dt$$

- $C(\tau, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ est liée à la fonction de Green de $\mathbf{x}_1$ à $\mathbf{x}_2$!
- La composante singulière de la fonction de Green de $\mathbf{x}_1$ à $\mathbf{x}_2$ donne le temps de trajet de $\mathbf{x}_1$ à $\mathbf{x}_2$.

Estimation de temps de trajet entre paires de capteurs



Estimation de la vitesse du son
à partir des estimations des temps de trajet



[from Shapiro et al, Science 307 (2005), 1615]

Equation des ondes avec sources

$$\frac{1}{c^2(\mathbf{x})}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_{\mathbf{x}} u = n(t, \mathbf{x})$$

• Milieu inhomogène tri-dimensionnel (vitesse du son $c(\mathbf{x})$).

• Les sources sont (i) distribuées spatialement de manière aléatoire

(ii) des processus aléatoires stationnaires en temps.

$n(t, \mathbf{x})$: processus gaussien, à moyenne nulle, avec la covariance

$$\langle n(t_1, \mathbf{y}_1) n(t_2, \mathbf{y}_2)\rangle = F(t_2 - t_1)\Gamma(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$$

• Stationnaire en temps : $\big(n(t, \mathbf{y})\big)_{t,\mathbf{y}}$ et $\big(n(t+h, \mathbf{y})\big)_{t,\mathbf{y}}$ suivent la même loi statistique pour tout $h \Longrightarrow$ la fonction de corrélation F ne dépend que de $t_2 - t_1$.

• La distribution spatiale des sources est caractérisée par $\Gamma(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$. Pour simplifier :

$$\Gamma(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \theta(\mathbf{y}_1)\delta(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$$

θ caractérise le support des sources.

[Pour des Γ plus généraux, on peut utiliser l'analyse microlocale [1]]

[1] C. Bardos, J. Garnier, and G. Papanicolaou, *Inverse Problems* **24**, 015011 (2008).

Solution stationnaire

Solution u de l'équation des ondes :

$$u(t,\mathbf{x}) = \int\int G(s,\mathbf{x},\mathbf{y})n(t-s,\mathbf{y})dsd\mathbf{y}$$

Fonction de Green :

$$\frac{1}{c^2(\mathbf{x})}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \Delta_{\mathbf{x}} G = \delta(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

partant de $G(0,\mathbf{x},\mathbf{y}) = \partial_t G(0,\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \quad (G(t,\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ pour $t < 0)$.

Fonction de Green harmonique :

$$\hat{G}(\omega,\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int G(t,\mathbf{x},\mathbf{y})e^{i\omega t}dt$$

solution de

$$\frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})}\hat{G} + \Delta_{\mathbf{x}}\hat{G} = -\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

+ condition de radiation.

Exemple : Si $c(\mathbf{x}) \equiv c_0$, alors

$$G(t,\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\delta\Big(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c_0} - t\Big)$$

Cross corrélation empirique et cross corrélation statistique

Cross corrélation empirique :

$$C_T(\tau, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t, \mathbf{x}_1) u(t + \tau, \mathbf{x}_2) dt$$

avec $u(t, \mathbf{x}) = \int \int G(s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) n(t - s, \mathbf{y}) ds d\mathbf{y}$.

1. L'espérance de C_T (par rapport à la distribution des sources) est indépendante du temps d'intégration T :

$$\langle C_T(\tau, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \rangle = C^{(1)}(\tau, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

où la cross corrélation statistique $C^{(1)}$ est donnée par

$$C^{(1)}(\tau, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int d\mathbf{y} \int d\omega \overline{\hat{G}}(\omega, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}) \hat{G}(\omega, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \theta(\mathbf{y}) \hat{F}(\omega) e^{-i\omega\tau}$$

Cross corrélation empirique et cross corrélation statistique

Cross corrélation empirique :

$$C_T(\tau, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{T}\int_0^T u(t, \mathbf{x}_1)u(t+\tau, \mathbf{x}_2)dt$$

avec $u(t, \mathbf{x}) = \int\int G(s, \mathbf{x}, \mathbf{y})n(t-s, \mathbf{y})dsd\mathbf{y}$.

1. L'espérance de C_T (par rapport à la distribution des sources) est indépendante du temps d'intégration T :

$$\langle C_T(\tau, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\rangle = C^{(1)}(\tau, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

où la cross corrélation statistique $C^{(1)}$ est donnée par

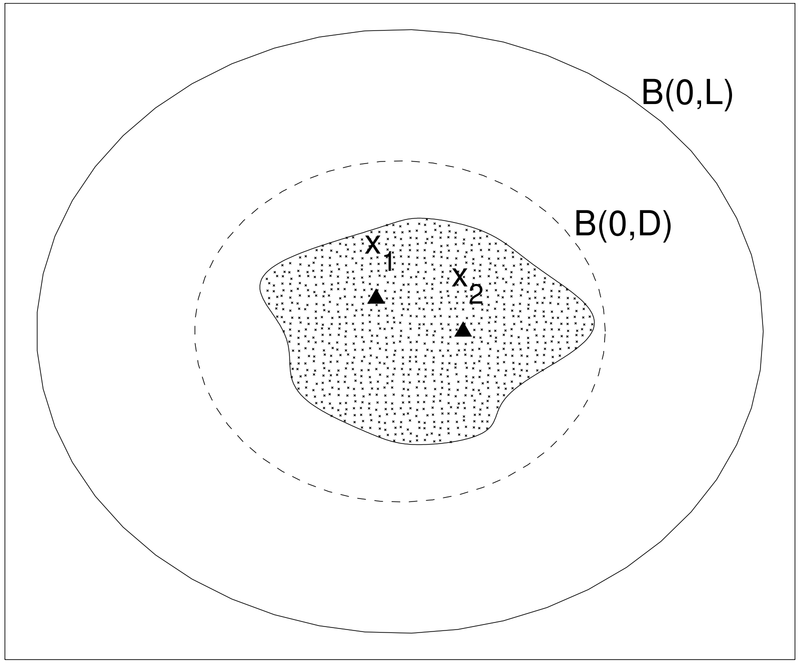
$$C^{(1)}(\tau, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int d\mathbf{y} \int d\omega \overline{\hat{G}}(\omega, \mathbf{x}_1, \mathbf{y})\hat{G}(\omega, \mathbf{x}_2, \mathbf{y})\theta(\mathbf{y})\hat{F}(\omega)e^{-i\omega\tau}$$

2. La cross corrélation empirique C_T est une quantité auto-moyennante :

$$C_T(\tau, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \overset{T\to\infty}{\longrightarrow} C^{(1)}(\tau, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

en probabilité. Plus précisément, les fluctuations de C_T autour de sa moyenne $C^{(1)}$ sont d'ordre $T^{-1/2}$.

Un outil utile : le théorème de Helmholtz Kirchhoff



Si le milieu est homogène (vitesse c_e) hors de $B(\mathbf{0}, D)$, alors $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B(\mathbf{0}, D)$ on a pour $L \gg D$:

$$\hat{G}(\omega, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - \overline{\hat{G}}(\omega, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{2i\omega}{c_e} \int_{\partial B(\mathbf{0}, L)} dS(\mathbf{y}) \overline{\hat{G}}(\omega, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}) \hat{G}(\omega, \mathbf{x}_2, \mathbf{y})$$

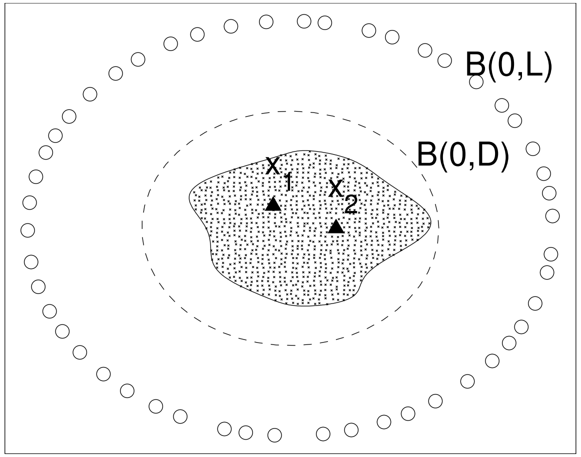
Preuve : seconde identité de Green et condition de radiation de Sommerfeld.

Utile pour : théorie du scattering, expériences de retournement temporel, et cross corrélation.

Cross corrélation avec des sources de bruit sur une surface fermée

Cross corrélation statistique :

$$C^{(1)}(\tau, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int d\omega \int_{\partial B(\mathbf{0},L)} dS(\mathbf{y}) \overline{\hat{G}}(\omega, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}) \hat{G}(\omega, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \hat{F}(\omega) e^{-i\omega\tau}$$



Théorème de Helmholtz Kirchhoff :

$$\hat{G}(\omega, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - \overline{\hat{G}}(\omega, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{2i\omega}{c_e} \int_{\partial B(\mathbf{0},L)} dS(\mathbf{y}) \overline{\hat{G}}(\omega, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}) \hat{G}(\omega, \mathbf{x}_2, \mathbf{y})$$

Si 1) le milieu est homogène en dehors de $B(\mathbf{0}, D)$,

2) les sources sont distribuées sur la sphère $\partial B(\mathbf{0}, L)$, avec $L \gg D$.

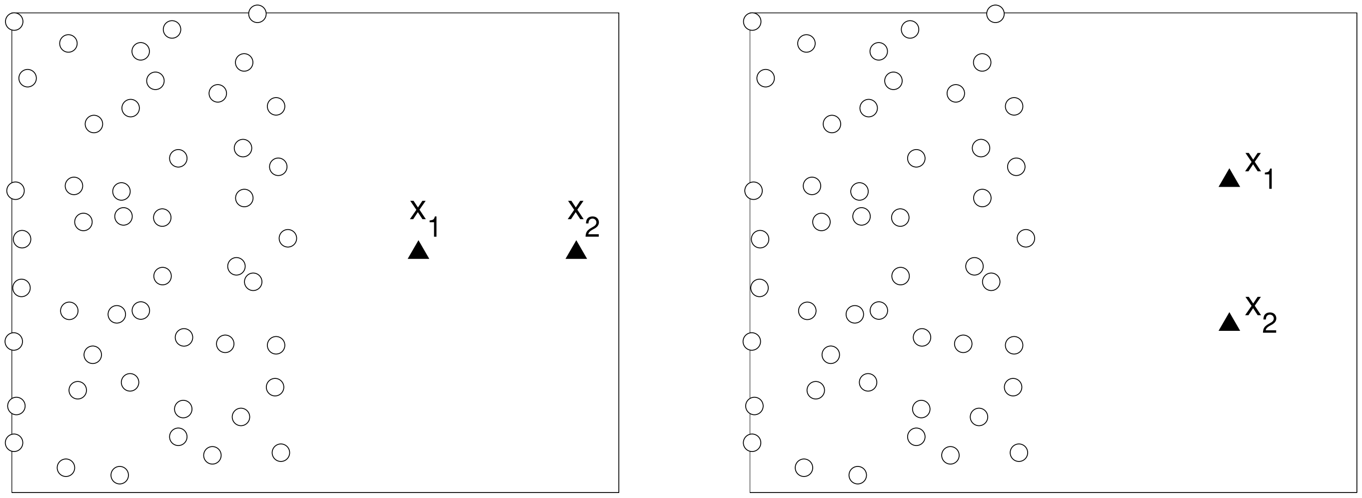
Alors pour tout $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B(\mathbf{0}, D)$, on a (à un facteur multiplicatif près) :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} C^{(1)}(\tau, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = F *_\tau G(\tau, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - F *_\tau G(-\tau, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

En (geo)physique [1]: S'il y a assez de "diversité directionnelle" ou d'"équipartition", alors

$$\frac{\partial}{\partial \tau} C^{(1)}(\tau, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \simeq F *_\tau G(\tau, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - F *_\tau G(-\tau, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

Que se passe-t-il lorsque



?

[1] K. Wapenaar and J. Fokkema, *Geophysics* **71**, SI33 (2006)

Hypothèse de géométrie simple dans un milieu régulier

- On suppose que le rapport ε du temps de cohérence des sources sur le temps de trajet typique entre deux capteurs est petit.

$\hookrightarrow$ La fonction de corrélation temporelle des sources est de la forme :

$$F^{\varepsilon}(t_2 - t_1) = F\Big(\frac{t_2 - t_1}{\varepsilon}\Big)$$

- On utilise l'approximation WKB (optique géométrique) :

$$\hat{G}\Big(\frac{\omega}{\varepsilon}, \mathbf{x}, \mathbf{y}\Big) \sim a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{i\frac{\omega}{\varepsilon}\tau(\mathbf{x},\mathbf{y})}$$

valide lorsque $\varepsilon \ll 1$, où le temps de trajet est :

$$\tau(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf\Big\{T \ \text{ t.q. } \ \exists (\mathbf{X}_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{C}^1([0,T], \mathbb{R}^d)\,,\ \mathbf{X}_0 = \mathbf{x}\,,\ \mathbf{X}_T = \mathbf{y}\,,\ \Big|\frac{d\mathbf{X}_t}{dt}\Big| = c(\mathbf{X}_t)\Big\}$$

Hypothèse de géométrie simple : $c(\mathbf{x})$ est régulier et toute paire de points est reliée par un unique rayon (dans la région qui nous intéresse).

Analyse par phase stationnaire ($\varepsilon \to 0$)

Fonction de corrélation temporelle des sources $F^\varepsilon(t) = F(\frac{t}{\varepsilon}) \Longrightarrow \hat{F}^\varepsilon(\omega) = \varepsilon \hat{F}(\varepsilon\omega)$.

$$\begin{aligned} C^{(1)}(\tau, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{y} \int d\omega \theta(\mathbf{y}) \overline{\hat{G}}(\omega, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}) \hat{G}(\omega, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) e^{-i\omega\tau} \hat{F}^\varepsilon(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{y} \int d\omega \theta(\mathbf{y}) \overline{\hat{G}}\Big(\frac{\omega}{\varepsilon}, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}\Big) \hat{G}\Big(\frac{\omega}{\varepsilon}, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}\Big) e^{-i\frac{\omega}{\varepsilon}\tau} \hat{F}(\omega) \end{aligned}$$

Approximation WKB pour $\hat{G}$:

$$C^{(1)}(\tau, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{y} \int d\omega \theta(\mathbf{y}) \hat{F}(\omega) \overline{a}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) a(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) e^{i\frac{\omega}{\varepsilon}\mathcal{T}(\mathbf{y})}$$

avec la phase rapide

$$\omega\mathcal{T}(\mathbf{y}) = \omega[\tau(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) - \tau(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) - \tau]$$

Utilisation du théorème de la phase stationnaire. La contribution principale vient des points stationnaires $(\mathbf{y}, \omega)$ satisfaisant :

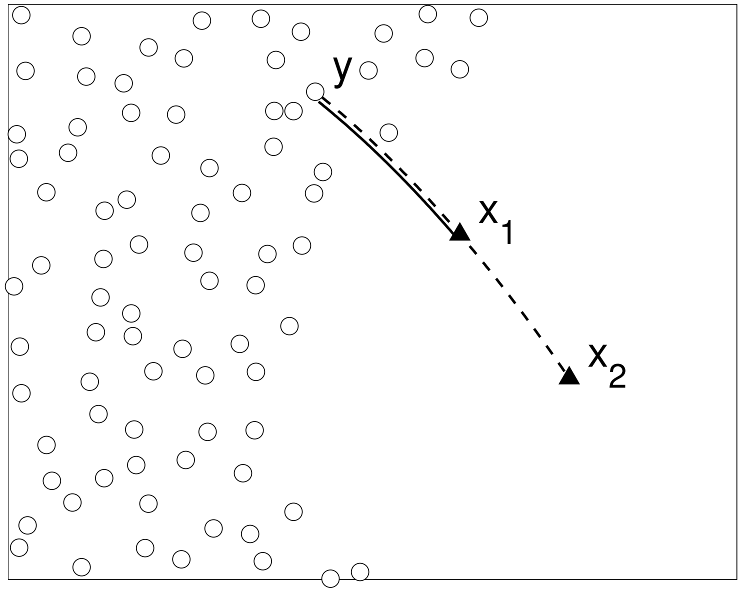
$$\nabla_{\mathbf{y}}\Big(\omega\mathcal{T}(\mathbf{y})\Big) = \mathbf{0}, \qquad \partial_\omega\Big(\omega\mathcal{T}(\mathbf{y})\Big) = 0$$

$\hookrightarrow$ deux conditions :

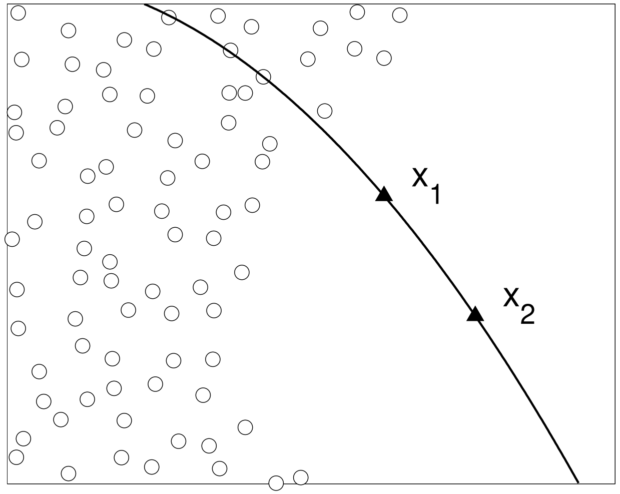
$$\nabla_{\mathbf{y}}\tau(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1) = \nabla_{\mathbf{y}}\tau(\mathbf{y}, \mathbf{x}_2), \qquad \tau(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) - \tau(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \tau$$

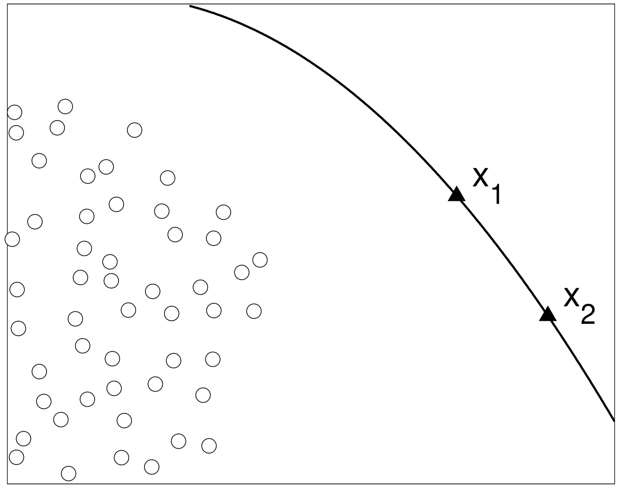
$$\nabla_{\mathbf{y}}\tau(\mathbf{y},\mathbf{x}_1) = \nabla_{\mathbf{y}}\tau(\mathbf{y},\mathbf{x}_2)\,, \qquad \tau(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}) - \tau(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}) = \tau$$

$\Longrightarrow$ $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ sur le même rayon et $\tau = \pm\tau(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$.



Aussi : $\mathbf{y}$ doit être dans le support de θ (région des sources)





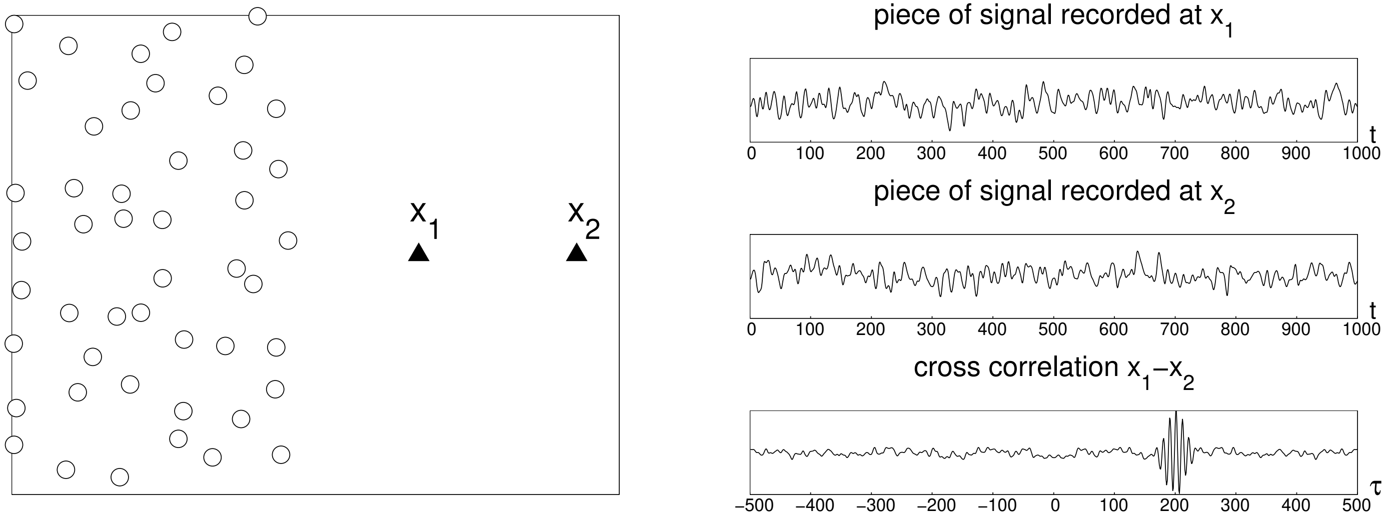
Composante singulière en $\tau(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ — Pas de composante singulière

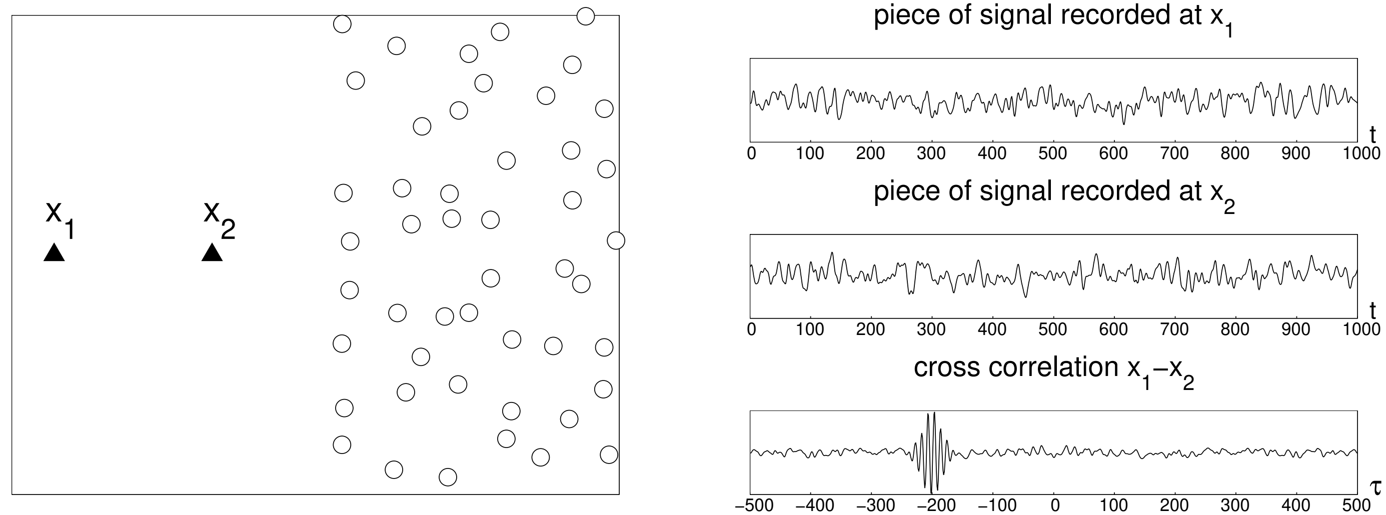
Conclusion : La cross corrélation $C^{(1)}(\tau, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ possède des composantes singulières ssi le rayon passant par $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ atteint la zone des sources (i.e. le support de la fonction θ). Il y a alors une ou deux composantes singulières en $\tau = \pm\tau(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$.

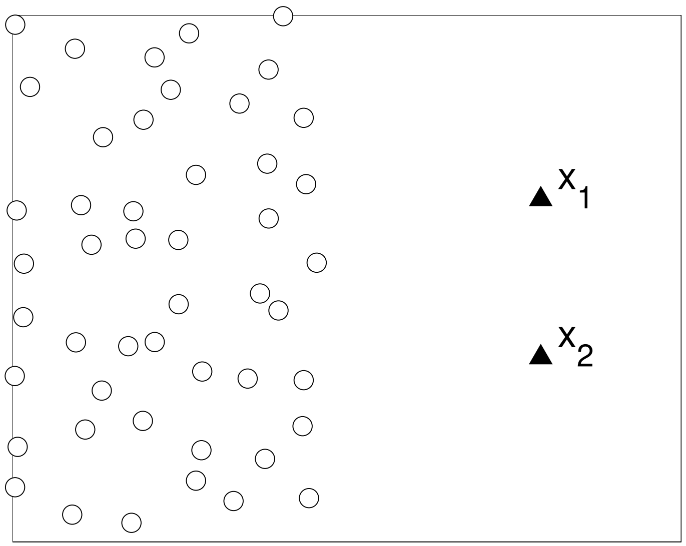
[Plus exactement :

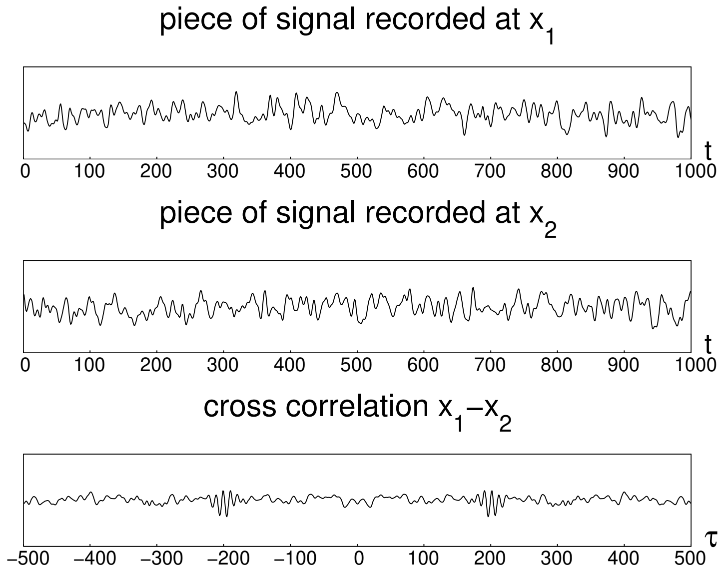
les rayons $\mathbf{y} \to \mathbf{x}_1 \to \mathbf{x}_2$ donne une composante en $\tau = \tau(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$,

les rayons $\mathbf{y} \to \mathbf{x}_2 \to \mathbf{x}_1$ donne une composante en $\tau = -\tau(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$.]

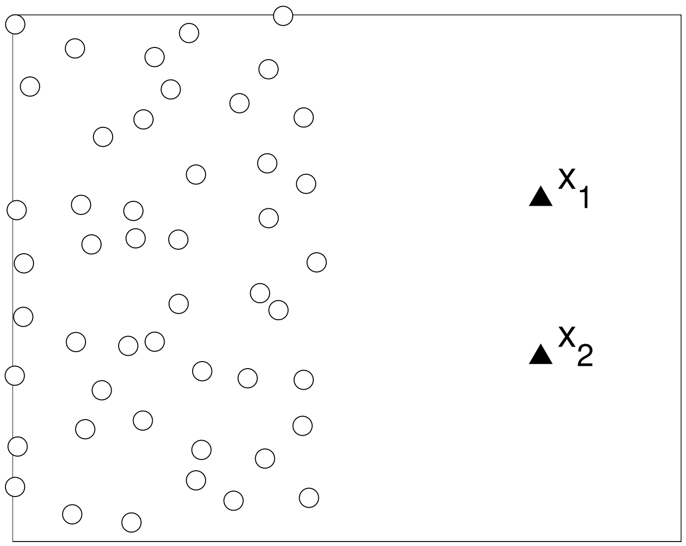

x1
x2
piece of signal recorded at x1
piece of signal recorded at x2
cross correlation x1−x2
t
τ

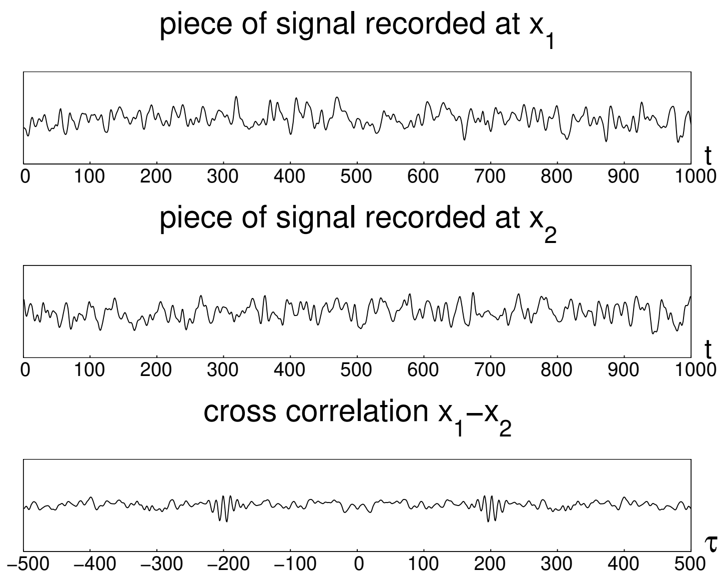

x1
x2
piece of signal recorded at x1
piece of signal recorded at x2
cross correlation x1−x2
t
τ





• Ici, la méthode de cross corrélation ne permet pas d'estimer le temps de trajet, par manque de "diversité directionnelle".





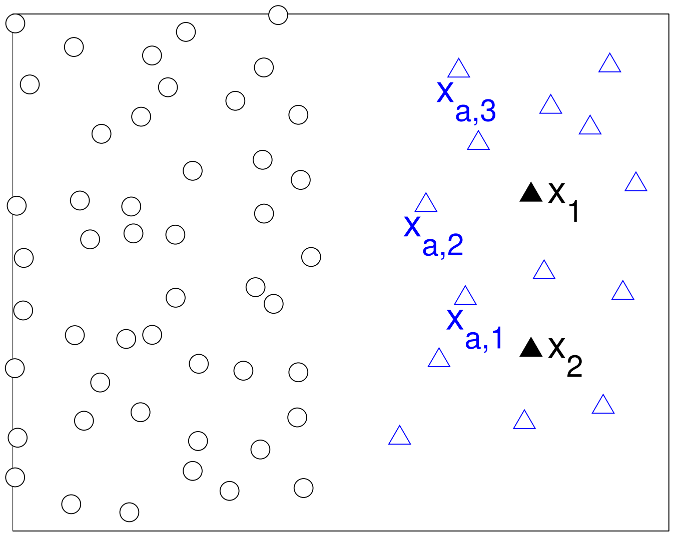
• Ici, la méthode de cross corrélation ne permet pas d'estimer le temps de trajet, par manque de "diversité directionnelle".

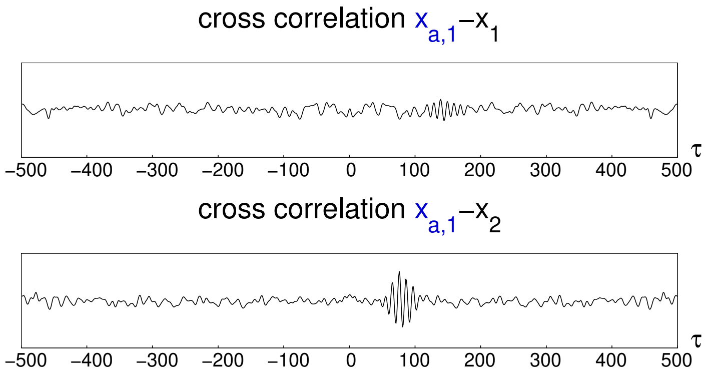
• Idée : exploiter les propriétés de diffusion du milieu inhomogène.

- Les ondes diffusées ont plus de diversité directionnelle que les ondes qui viennent directement des sources.
- Les contributions incohérentes des ondes diffusées sont dans les queues des cross corrélations.
- En cross corrélant les queues des cross corrélations, il doit être possible d'exploiter les ondes diffusées et leur diversité directionnelle accrue (idée de M. Campillo [1]).

[1] M. Campillo and L. Stehly, *Eos Trans. AGU* **88**(52) (2007), Fall Meet. Suppl., Abstract S51D-07.

Cross corrélations d'ordre quatre



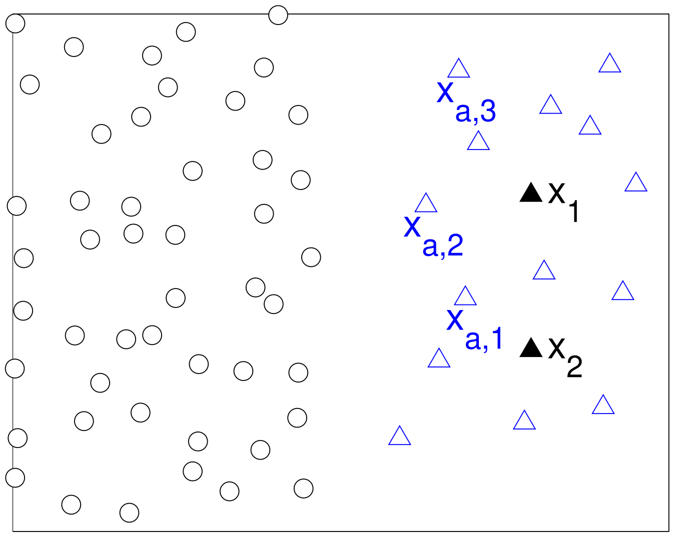


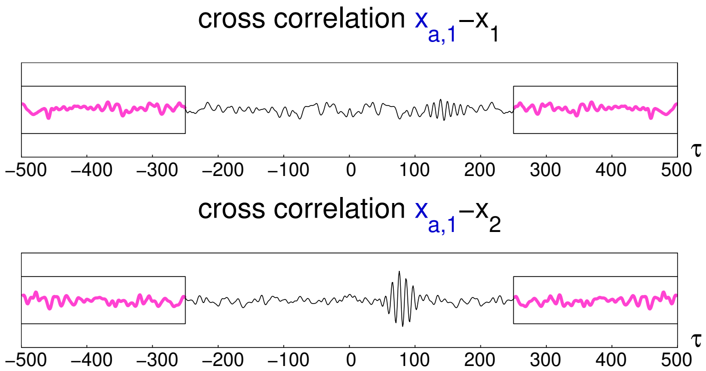
Utilisation de capteurs auxiliaires $\mathbf{x}_{a,j}$, $j = 1, \ldots, N$. Algorithme :

1) pour chaque j, calcul des cross corrélations $C(\tau, \mathbf{x}_{a,j}, \mathbf{x}_1)$ et $C(\tau, \mathbf{x}_{a,j}, \mathbf{x}_2)$:

$$C(\tau, \mathbf{x}_{a,j}, \mathbf{x}_l) = \frac{1}{T}\int_0^T u(t, \mathbf{x}_{a,j}) u(t+\tau, \mathbf{x}_l) dt \,, \quad l = 1, 2$$

Cross corrélations d'ordre quatre





Utilisation de capteurs auxiliaires $\mathbf{x}_{a,j}$, $j = 1, \ldots, N$. Algorithme :

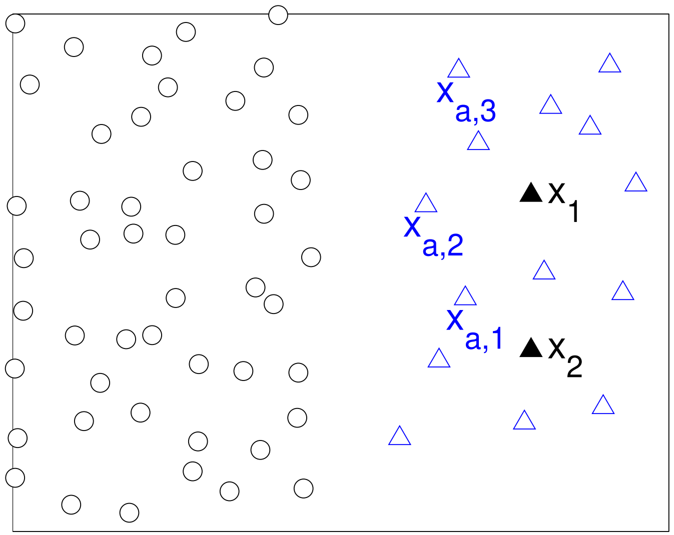
1) pour chaque j, calcul des cross corrélations $C(\tau, \mathbf{x}_{a,j}, \mathbf{x}_1)$ et $C(\tau, \mathbf{x}_{a,j}, \mathbf{x}_2)$:

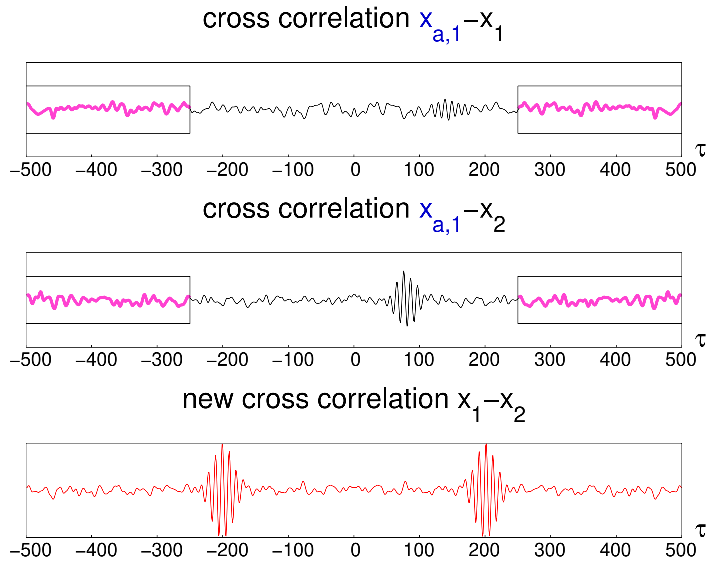
$$C(\tau, \mathbf{x}_{a,j}, \mathbf{x}_l) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t, \mathbf{x}_{a,j}) u(t+\tau, \mathbf{x}_l) dt \,, \quad l = 1, 2$$

2) extraction des queues de $C(\tau, \mathbf{x}_{a,j}, \mathbf{x}_1)$ and $C(\tau, \mathbf{x}_{a,j}, \mathbf{x}_2)$:

$$C_{\rm coda}(\tau, \mathbf{x}_{a,j}, \mathbf{x}_l) = C(\tau, \mathbf{x}_{a,j}, \mathbf{x}_l) \big[\mathbf{1}_{(-\infty, -T_{\rm coda})}(\tau) + \mathbf{1}_{(T_{\rm coda}, \infty)}(\tau) \big], \quad l = 1, 2$$

Cross corrélations d'ordre quatre





Utilisation de capteurs auxiliaires $\mathbf{x}_{a,j}$, $j = 1, \ldots, N$. Algorithme :

1) pour chaque j, calcul des cross corrélations $C(\tau, \mathbf{x}_{a,j}, \mathbf{x}_1)$ et $C(\tau, \mathbf{x}_{a,j}, \mathbf{x}_2)$:

$$C(\tau, \mathbf{x}_{a,j}, \mathbf{x}_l) = \frac{1}{T}\int_0^T u(t, \mathbf{x}_{a,j})u(t+\tau, \mathbf{x}_l)dt\,, \quad l = 1, 2$$

2) extraction des queues de $C(\tau, \mathbf{x}_{a,j}, \mathbf{x}_1)$ and $C(\tau, \mathbf{x}_{a,j}, \mathbf{x}_2)$:

$$C_{\rm coda}(\tau, \mathbf{x}_{a,j}, \mathbf{x}_l) = C(\tau, \mathbf{x}_{a,j}, \mathbf{x}_l)\big[\mathbf{1}_{(-\infty, -T_{\rm coda})}(\tau) + \mathbf{1}_{(T_{\rm coda}, \infty)}(\tau)\big], \quad l = 1, 2$$

3) calcul des cross corrélations des queues et somme sur j :

$$C^{(3)}(\tau, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_{j=1}^N \int_{-T'}^{T'} C_{\rm coda}(\tau', \mathbf{x}_{a,j}, \mathbf{x}_1)C_{\rm coda}(\tau'+\tau, \mathbf{x}_{a,j}, \mathbf{x}_2)d\tau'$$

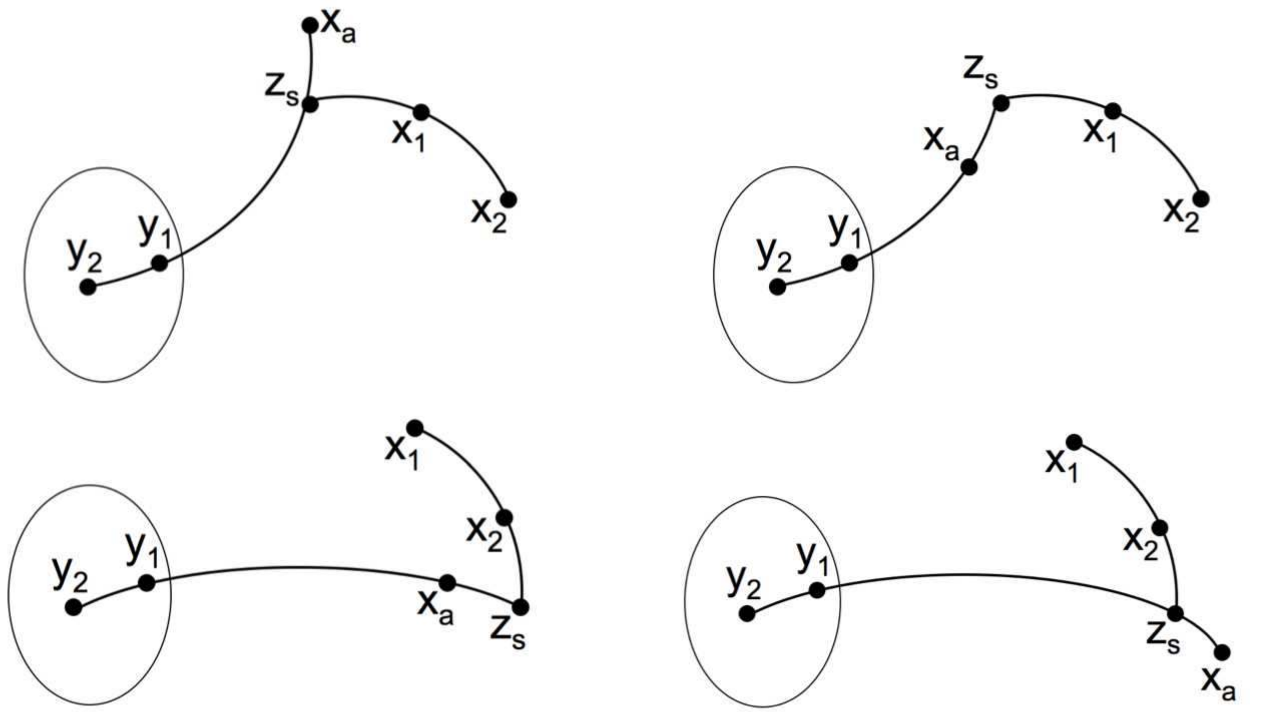
Analyse de la fonction de corrélation $C^{(3)}$

- Propriété d'auto-moyennisation de $C^{(3)}$
- Approximation de Born pour le milieu aléatoire
- Approximation WKB pour la fonction de Green du milieu

$\hookrightarrow$ expression de $C^{(3)}$ comme une intégrale multiple, avec une phase rapide paramétrée par une fréquence ω, un capteur auxiliaire $\mathbf{x}_a$, deux sources $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, un diffuseur $\mathbf{z}_s$, et aussi par les capteurs principaux $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$.

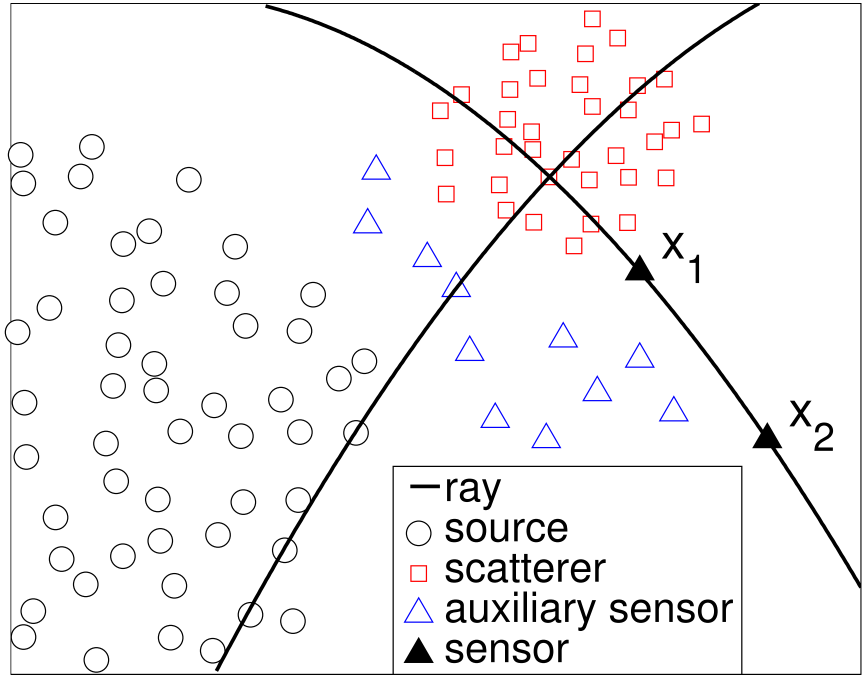
- Analyse par phase stationnaire : cinq conditions pour les points stationnaires.

$\hookrightarrow$ Il y a des points stationnaires :



Conclusion : $C^{(3)}$ *a des composantes singulières aux instants* $\tau = \pm\tau(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ *si :*
1) il y a des diffuseurs le long du rayon passant par $\mathbf{x}_1$ *et* $\mathbf{x}_2$ *(mais pas entre* $\mathbf{x}_1$ *et* $\mathbf{x}_2$*).*
2) il y a des capteurs auxiliaires le long de rayons allant des sources aux diffuseurs.

Il n'y a pas besoin qu'un rayon issu des sources passe par $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$!



Ici :

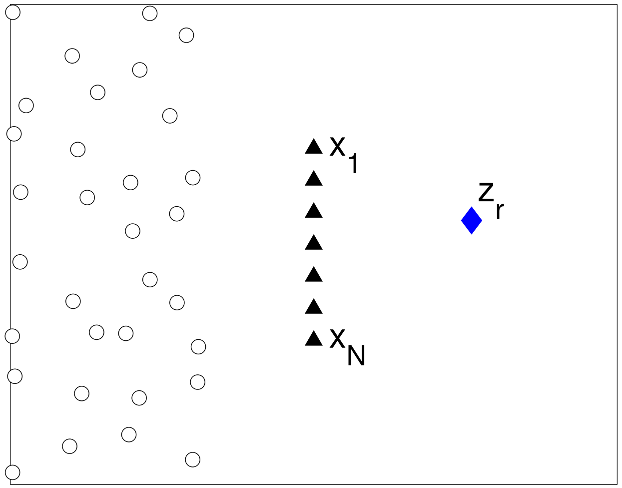
On ne peut pas extraire le temps de trajet $\tau(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ à partir de C.

On peut extraire le temps de trajet $\tau(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ à partir de $C^{(3)}$.

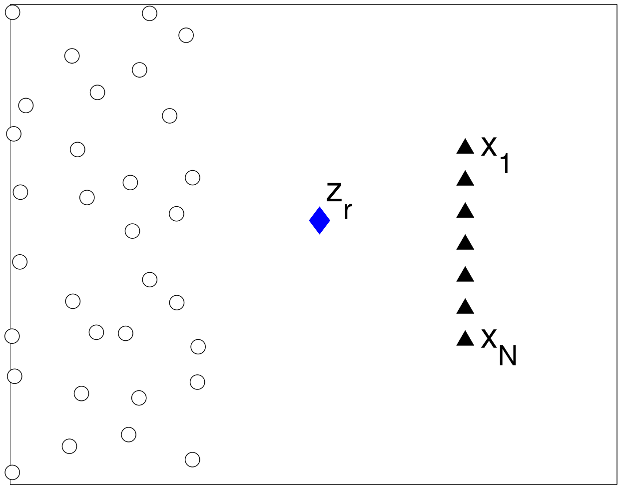
Imagerie passive par cross corrélation de signaux bruités

- Réseau de capteurs passifs $\mathbf{x}_j$, $j = 1, \ldots, N$
- Sources de bruit émettant des signaux aléatoires stationnaires
- Objet cible (petit réflecteur) en $\mathbf{z}_r$

- Deux différentes configurations d'éclairement



Configuration "jour"



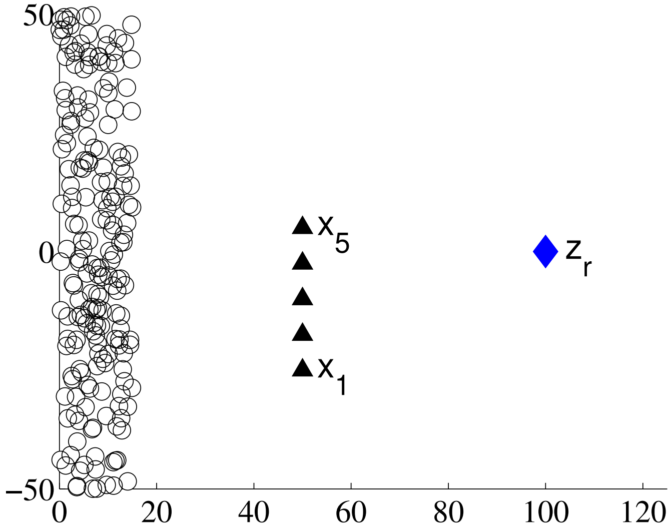
Configuration "contre-jour"

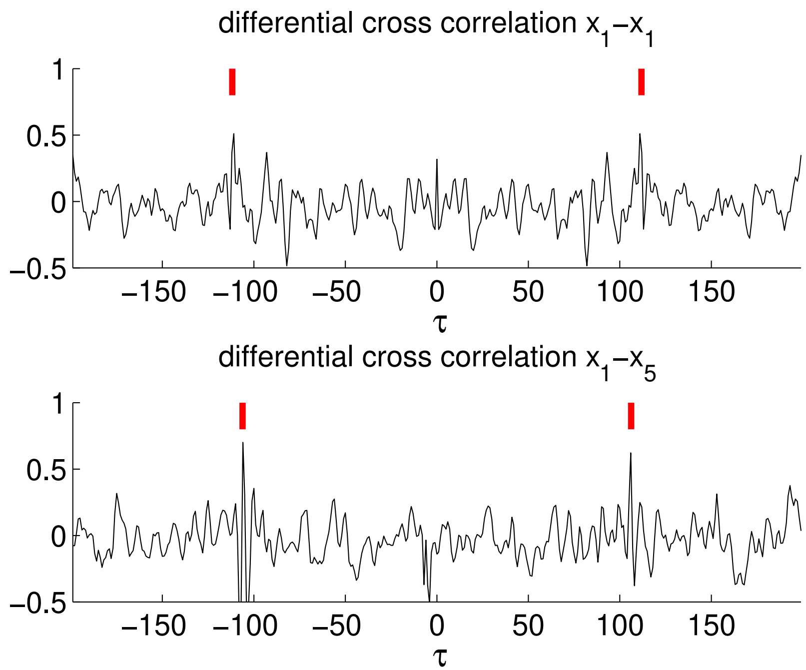
- Deux types de situations :
- Données en présence (C) et en absence (C_0) du réflecteur
- Données uniquement en présence du réflecteur

- On suppose qu'on connaît les temps de trajets entre les capteurs et les points dans la région autour de $\mathbf{z}_{\mathrm{r}}$.

Configuration "jour"

- Données en absence ($C_0(\tau, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l)$, $j, l = 1, \ldots, 5$) et en présence ($C(\tau, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l)$, $j, l = 1, \ldots, 5$) du réflecteur





Cross corrélation différentielle :

$$\Delta C(\tau, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l) = (C - C_0)(\tau, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l)$$

Théorie : $\Delta C(\tau, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l)$ *a des composantes singulières en* $\tau = \pm[\tau(\mathbf{x}_j, \mathbf{z}_r) + \tau(\mathbf{x}_l, \mathbf{z}_r)]$.

Configuration "jour" - migration

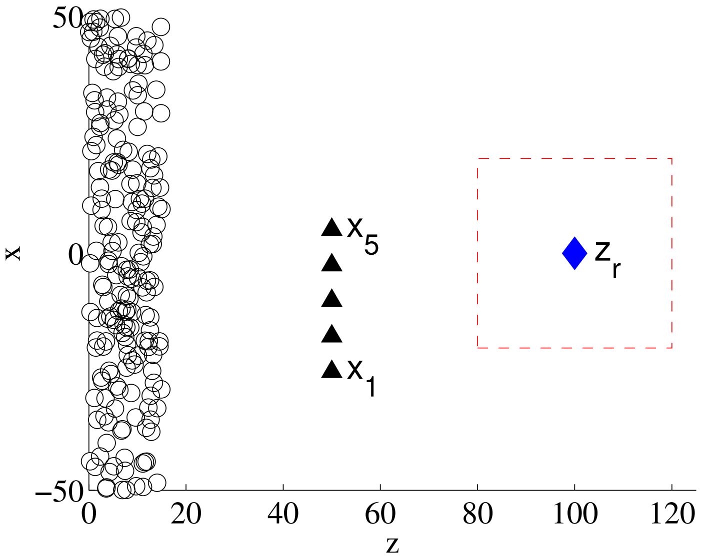
$$\Delta C(\tau, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l) = (C - C_0)(\tau, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l)$$

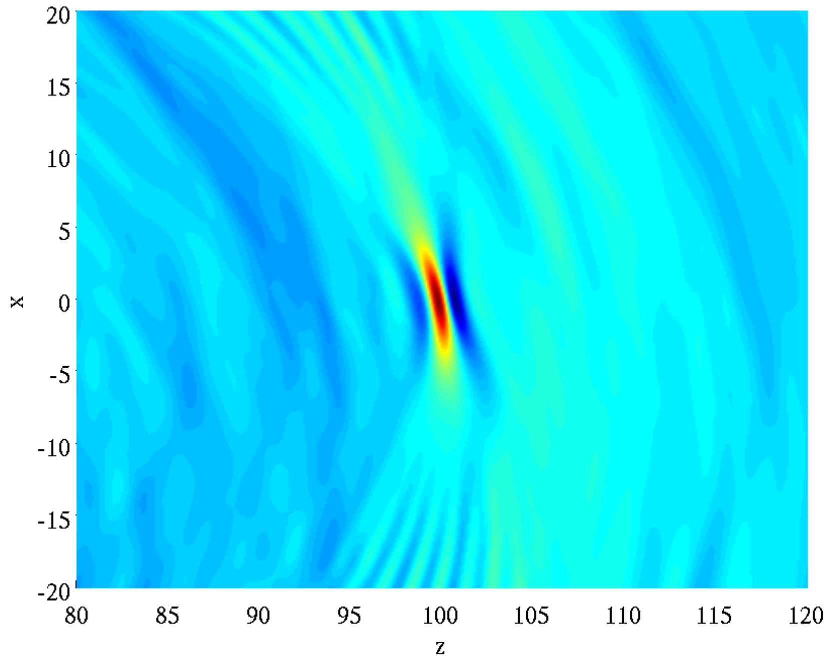
Théorie : ΔC *a des composantes singulières en* $\tau = \pm[\tau(\mathbf{x}_j, \mathbf{z}_r) + \tau(\mathbf{x}_l, \mathbf{z}_r)]$.

- Migration des cross corrélations différentielles ΔC.

Fonction de migration pour un point test $\mathbf{z}^S$:

$$\mathcal{I}^{\mathrm{D}}(\mathbf{z}^S) = \sum_{j,l=1}^{N} \Delta C\big(-\tau(\mathbf{x}_j, \mathbf{z}^S) - \tau(\mathbf{x}_l, \mathbf{z}^S), \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l\big) + \Delta C\big(\tau(\mathbf{x}_j, \mathbf{z}^S) + \tau(\mathbf{x}_l, \mathbf{z}^S), \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l\big)$$





Configuration "jour" - analyse de résolution

Fonction de migration :

$$\mathcal{I}^{\mathrm{D}}(\mathbf{z}^S) = \sum_{j,l=1}^{N} \Delta C\big(- \tau(\mathbf{z}^S, \mathbf{x}_j) - \tau(\mathbf{z}^S, \mathbf{x}_l), \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l\big) + \Delta C\big(\tau(\mathbf{z}^S, \mathbf{x}_j) + \tau(\mathbf{z}^S, \mathbf{x}_l), \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l\big)$$

Analogie avec la migration de Kirchhoff [1] pour l'imagerie utilisant un réseau de capteurs actifs $(\mathbf{x}_j)_{j=1,\ldots,N}$ émettant des impulsions brèves. Les données sont alors la matrice de réponse impulsionnelle $(P(t, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l))_{j,l=1,\ldots,N}$ et la fonction de Migration de Kirchhoff est

$$\mathcal{I}^{\mathrm{KM}}(\mathbf{z}^S) = \sum_{j,l=1}^{N} P\big(\tau(\mathbf{z}^S, \mathbf{x}_j) + \tau(\mathbf{z}^S, \mathbf{x}_l), \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l\big)$$

$\hookrightarrow$ L'imagerie passive utilisant le bruit ambiant a la même résolution que l'imagerie active utilisant des sources d'impulsions brèves !

$\longrightarrow$ Résolution longitudinale $\simeq c_0/B$, où B est la largeur spectrale.

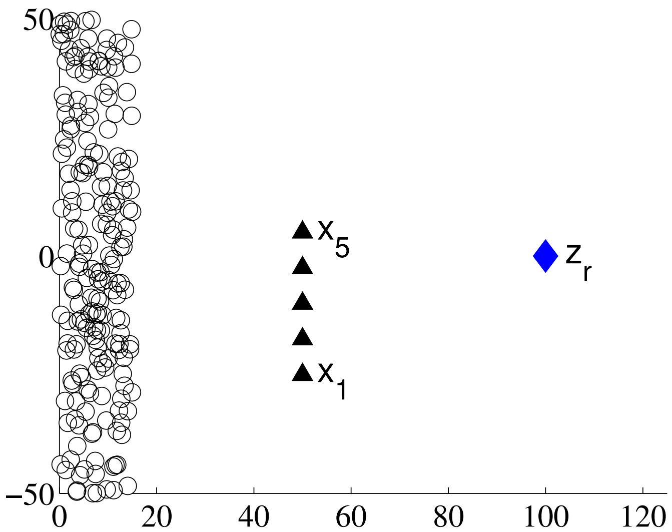
$\longrightarrow$ Résolution transverse (pour un réseau linéaire) $\simeq \lambda_0 L/a$, où λ_0 est la fréquence porteuse, L est la distance du réseau au réflecteur, a est le diamètre du réseau.

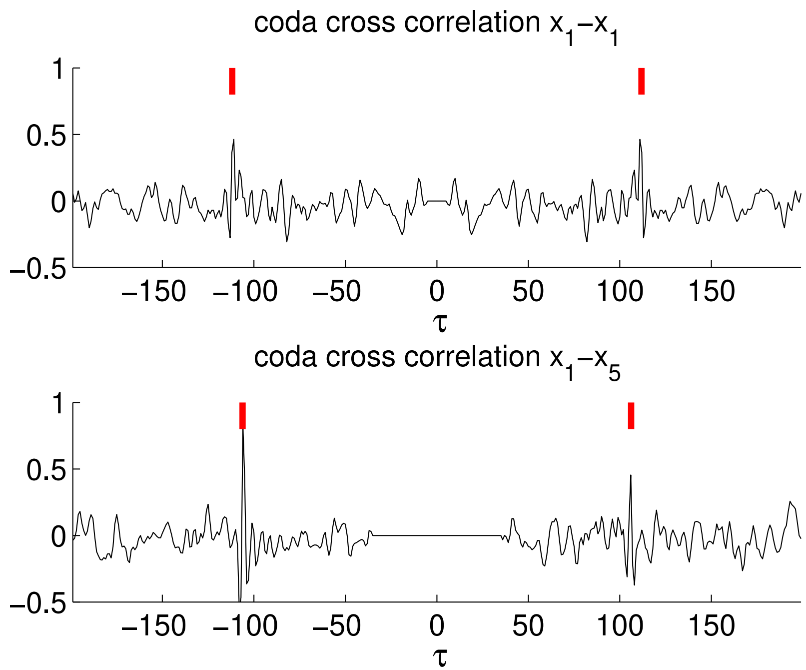
$\longrightarrow$ Résolution transverse (pour un réseau distribué) $\simeq c_0/B$ (triangulation).

[1] N. Bleistein, J. K. Cohen, and J. W. Stockwell Jr, Mathematics of seismic imaging, Springer, 2001.

Configuration "jour"

- Données *seulement* en présence du réflecteur : $C(\tau, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l)$, $j, l = 1, \ldots, 5$.





Coda cross corrélation :

$$C_{\mathrm{coda}}(\tau, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l) = C(\tau, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l)\left[\mathbf{1}_{(-\infty, -\tau(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l))}(\tau) + \mathbf{1}_{(\tau(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l), \infty)}(\tau)\right]$$

Configuration "jour" - migration

$$C_{\rm coda}(\tau,\mathbf{x}_j,\mathbf{x}_l) = C(\tau,\mathbf{x}_j,\mathbf{x}_l)\big[\mathbf{1}_{(-\infty,-\tau(\mathbf{x}_j,\mathbf{x}_l))}(\tau)+\mathbf{1}_{(\tau(\mathbf{x}_j,\mathbf{x}_l),\infty)}(\tau)\big]$$

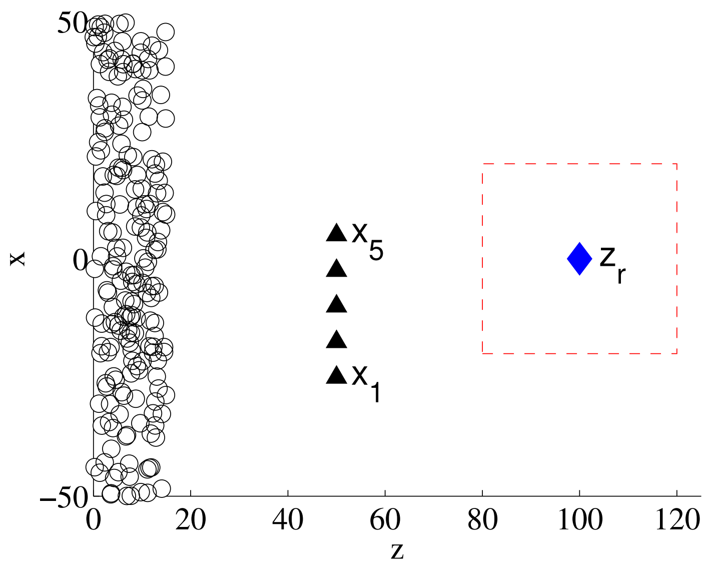
Théorie : $C_{\rm coda}(\tau,\mathbf{x}_j,\mathbf{x}_l)$ *a des composantes singulières en* $\tau=\pm[\tau(\mathbf{x}_j,\mathbf{z}_r)+\tau(\mathbf{x}_l,\mathbf{z}_r)]$

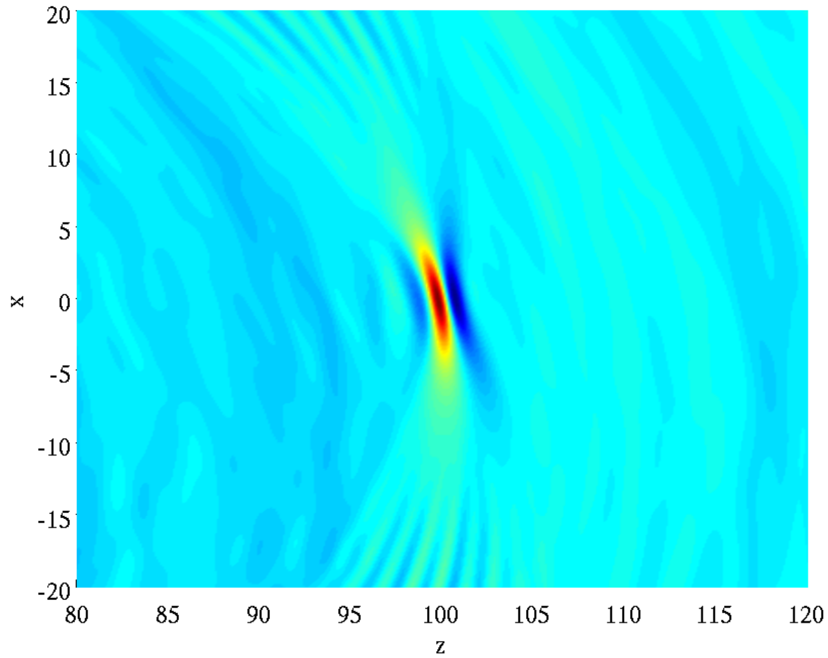
Inégalité triangulaire : $|\tau(\mathbf{x}_j,\mathbf{z}_r)+\tau(\mathbf{x}_l,\mathbf{z}_r)|\geq\tau(\mathbf{x}_j,\mathbf{x}_l)\Longrightarrow$ *composantes dans* $C_{\rm coda}$

- Migration des coda cross corrélations $C_{\rm coda}$.

Fonction de migration pour un point test $\mathbf{z}^S$:

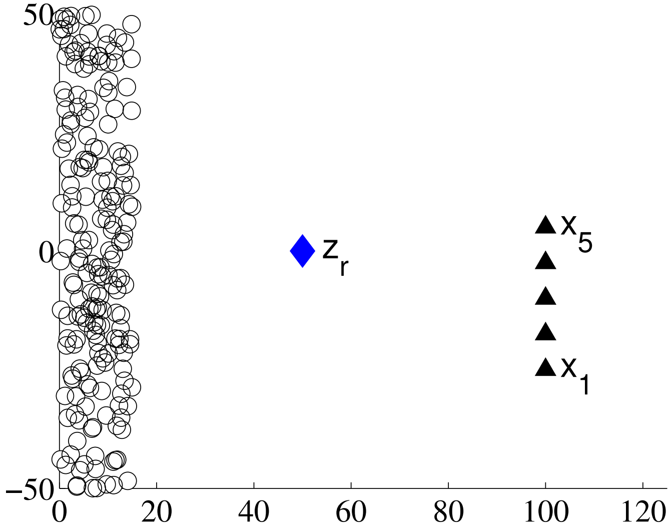
$$\mathcal{I}^{\rm D}(\mathbf{z}^S)=\sum_{j,l=1}^{N}C_{\rm coda}\big(-\tau(\mathbf{x}_j,\mathbf{z}^S)-\tau(\mathbf{x}_l,\mathbf{z}^S),\mathbf{x}_j,\mathbf{x}_l\big)+C_{\rm coda}\big(\tau(\mathbf{x}_j,\mathbf{z}^S)+\tau(\mathbf{x}_l,\mathbf{z}^S),\mathbf{x}_j,\mathbf{x}_l\big)$$

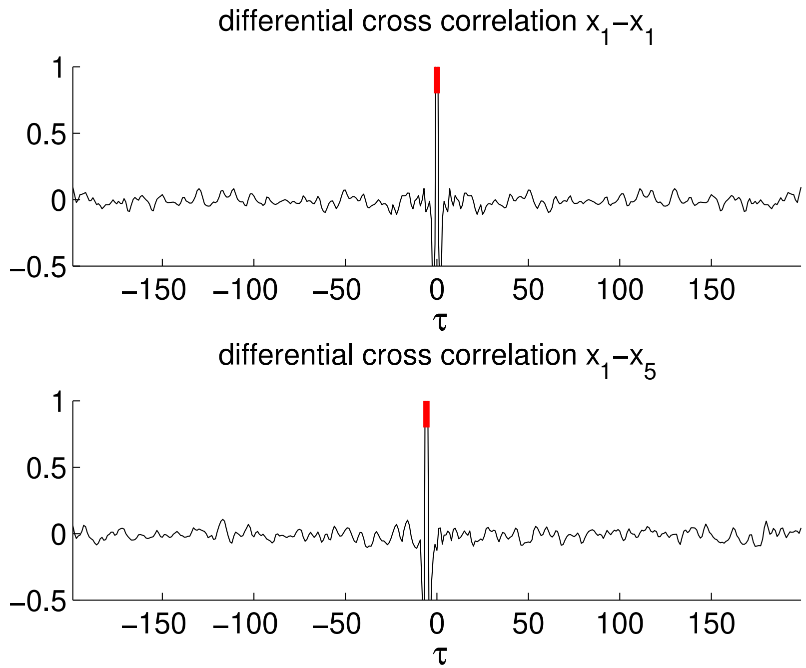




Configuration "contre-jour"

- Données en absence (C_0) et en présence (C) du réflecteur





Cross corrélation différentielle

$$\Delta C(\tau, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l) = (C - C_0)(\tau, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l)$$

Théorie : ΔC *a une composante singulière en* $\tau = \tau(\mathbf{x}_l, \mathbf{z}_r) - \tau(\mathbf{x}_j, \mathbf{z}_r)$.

Configuration "contre-jour" - migration

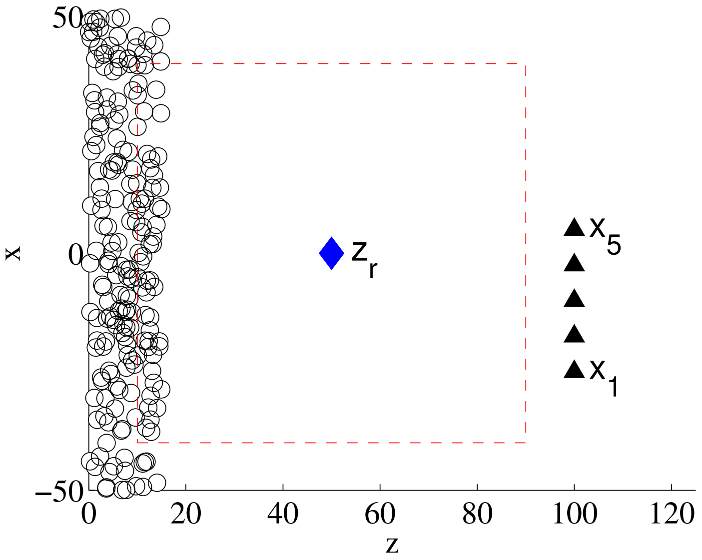
$$\Delta C(\tau, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l) = (C - C_0)(\tau, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l)$$

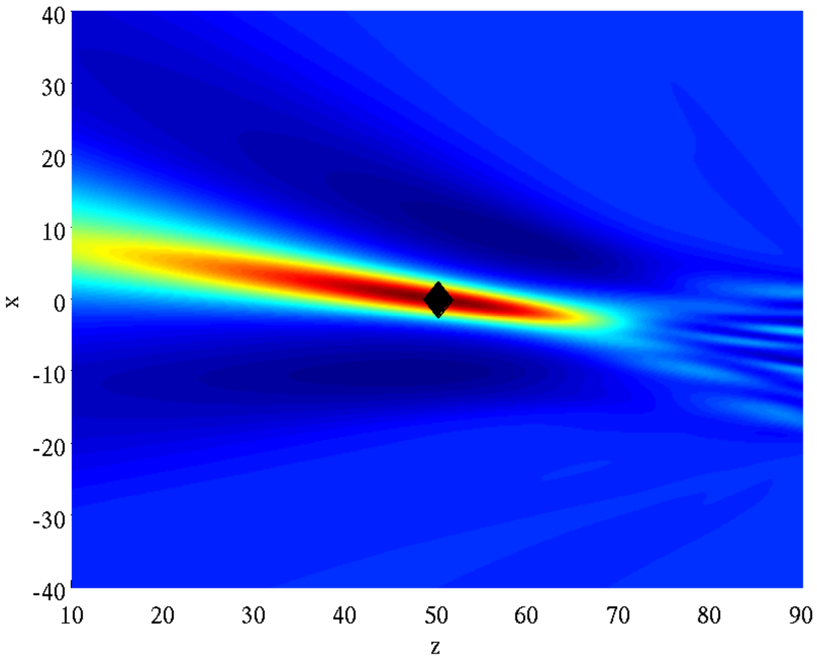
Théorie : ΔC *a une composante singulière en* $\tau = \tau(\mathbf{x}_l, \mathbf{z}_r) - \tau(\mathbf{x}_j, \mathbf{z}_r)$.

- Migration des cross corrélations différentielles ΔC.

Fonction de migration pour un point test $\mathbf{z}^S$:

$$\mathcal{I}^{\mathrm{B}}(\mathbf{z}^S) = \sum_{j,l=1}^{N} \Delta C\big(\tau(\mathbf{x}_l, \mathbf{z}^S) - \tau(\mathbf{x}_j, \mathbf{z}^S), \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l\big)$$





Configuration ”contre-jour” - analyse de résolution

Fonction de migration :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}^{\mathrm{B}}(\mathbf{z}^S) &= \sum_{j,l=1}^{N} \Delta C\big(\tau(\mathbf{x}_l, \mathbf{z}^S) - \tau(\mathbf{x}_j, \mathbf{z}^S), \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l\big) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int d\omega \sum_{j,l=1}^{N} e^{-i\omega[\tau(\mathbf{z}^S,\mathbf{x}_l)-\tau(\mathbf{z}^S,\mathbf{x}_j)]} \widehat{\Delta C}\big(\tau(\mathbf{x}_l, \mathbf{z}^S) - \tau(\mathbf{x}_j, \mathbf{z}^S), \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l\big)
\end{aligned}
$$

Analogie avec l'Interférométrie Incohérente [1], utilisée lorsque $\mathbf{z}_{\mathrm{r}}$ est une source émettant une impulsion brève enregistrée par un réseau de capteurs $(\mathbf{x}_j)_{j=1,\ldots,N}$. Les données sont le vecteur $(P(t, \mathbf{x}_j))_{j=1,\ldots,N}$. La fonction de migration est :

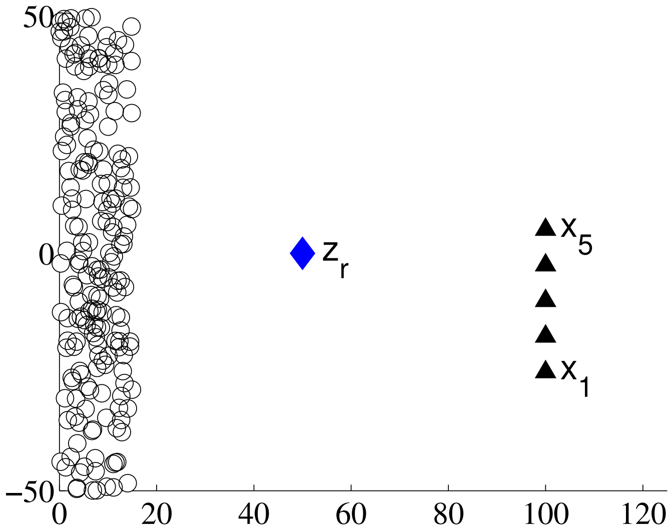
$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}^{\mathrm{II}}(\mathbf{z}^S) &= \frac{1}{2\pi} \int d\omega \Big| \sum_{l=1}^{N} e^{-i\omega\tau(\mathbf{z}^S,\mathbf{x}_l)} \hat{P}(\omega, \mathbf{x}_l) \Big|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int d\omega \sum_{j,l=1}^{N} e^{-i\omega[\tau(\mathbf{z}^S,\mathbf{x}_l)-\tau(\mathbf{z}^S,\mathbf{x}_j)]} \hat{P}(\omega, \mathbf{x}_l) \overline{\hat{P}(\omega, \mathbf{x}_j)}
\end{aligned}
$$

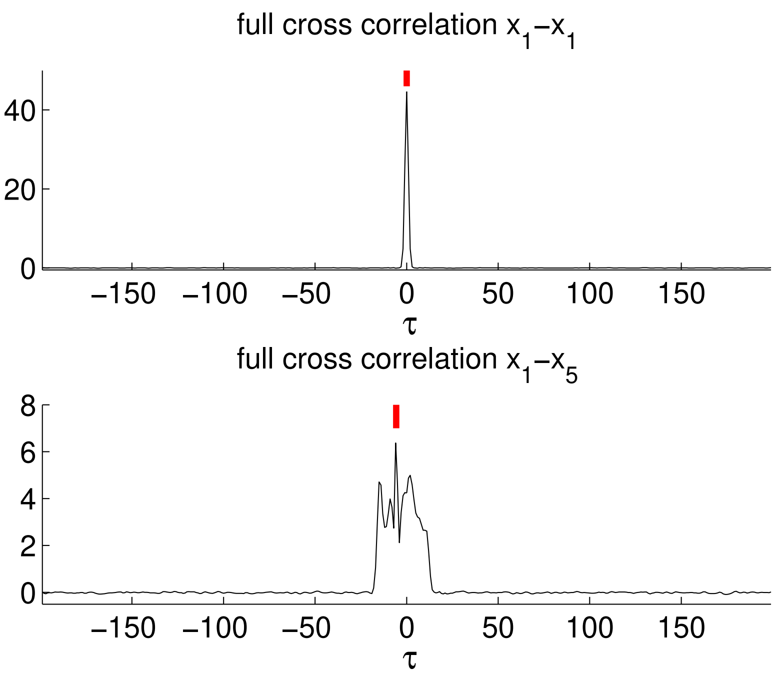
$\rightarrow$ La méthode d'imagerie passive en configuration contre-jour a une faible résolution longitudinale, comme l'Interférométrie Incohérente.

[1] L. Borcea, G. Papanicolaou, and C. Tsogka, *Inverse Problems* **19**, S134 (2003).

Configuration "contre-jour"

- Données seulement en présence (C) du réflecteur

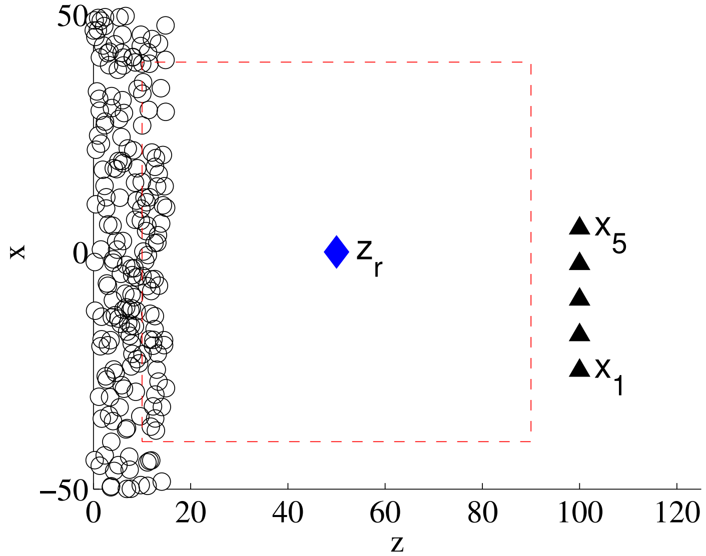


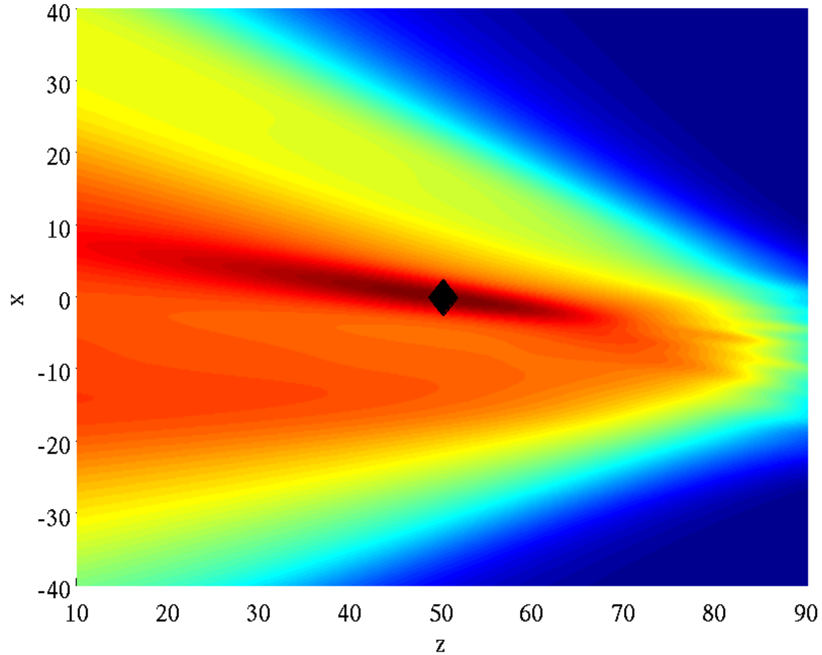


Théorie : $C(\tau, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l)$ *a des composantes singulières en* $\tau = \tau(\mathbf{x}_l, \mathbf{z}_r) - \tau(\mathbf{x}_j, \mathbf{z}_r)$.
Inégalité triangulaire $|\tau(\mathbf{x}_l, \mathbf{z}_r) - \tau(\mathbf{x}_j, \mathbf{z}_r)| \leq \tau(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l) \Longrightarrow$ *la composante singulière est noyée dans les composantes des ondes directes.*
$\hookrightarrow$ la technique de coda cross corrélation est inapplicable.

Configuration "contre-jour" - migration

- Migration des cross corrélations complètes





Fonction de migration pour un point test $\mathbf{z}^S$:

$$\mathcal{I}^{\mathrm{B}}(\mathbf{z}^S) = \sum_{j,l=1}^{N} C\big(\tau(\mathbf{x}_l, \mathbf{z}^S) - \tau(\mathbf{x}_j, \mathbf{z}^S), \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l\big)$$

Conclusions

• Estimation de temps de trajet :

• L'estimation de temps de trajet à partir du bruit ambiant est possible.

• Il est possible d'exploiter les propriétés de diffusion du milieu pour améliorer cette estimation (en utilisant des cross corrélations d'ordre quatre spéciales).

• C'est un exemple où la présence de bruit est un avantage et peut être exploitée.

• D'autres régimes de propagation peuvent être analysés : approximation parabolique, transfert radiatif, milieu aléatoire stratifié.

• Imagerie de réflecteurs :

• Migration des cross corrélations des signaux bruités permet d'imager le milieu.

• Il est possible d'exploiter les propriétés de diffusion du milieu et de migrer des cross corrélations d'ordre quatre spéciales pour améliorer la résolution.

• Principales applications en géophysique (à des échelles globales, régionales, et locales : volcans [1], réservoirs pétroliers); aussi en imagerie micro-ondes.

[1] F. Brenguier, N. M. Shapiro, M. Campillo, et al, *Nature Geoscience* **1**, 126 (2008).