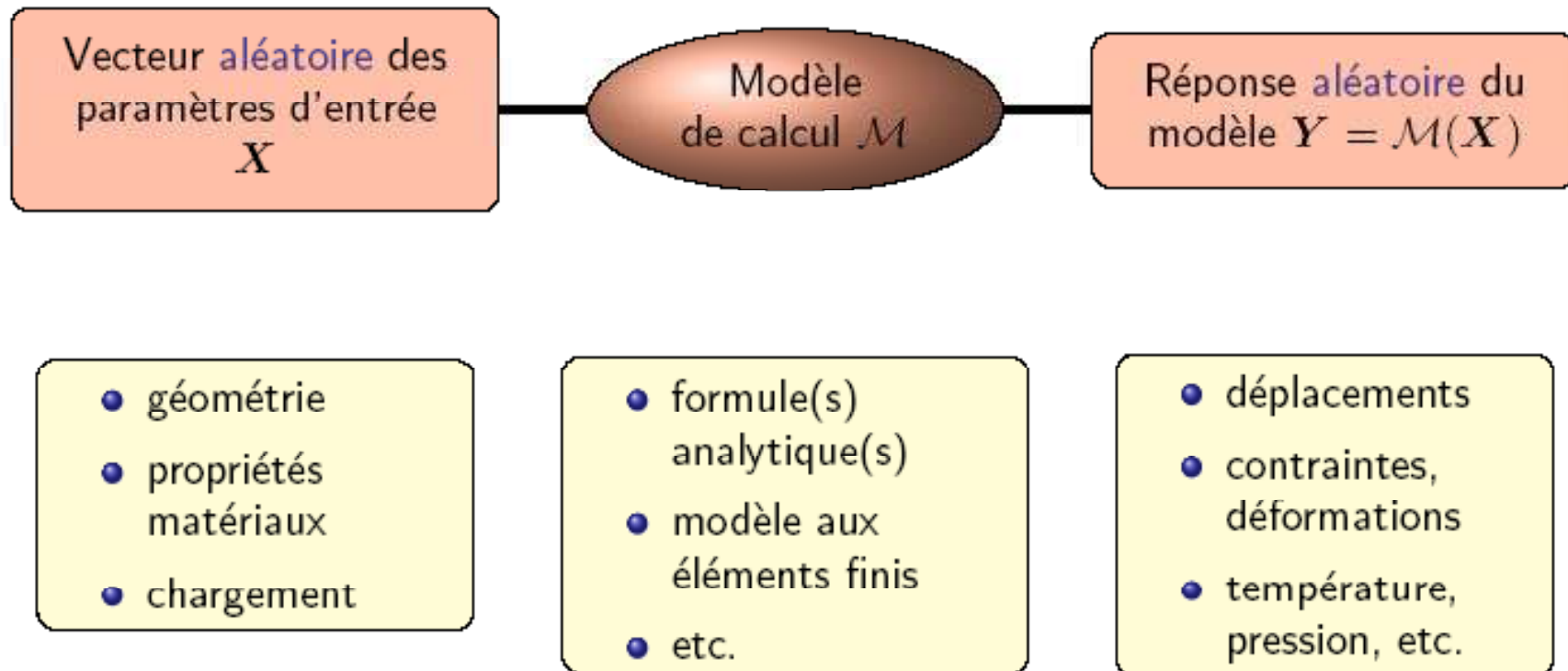
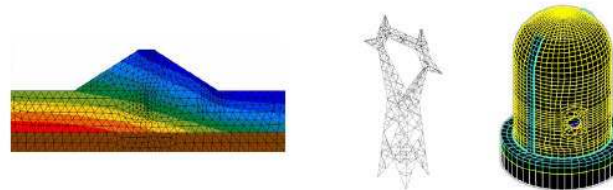


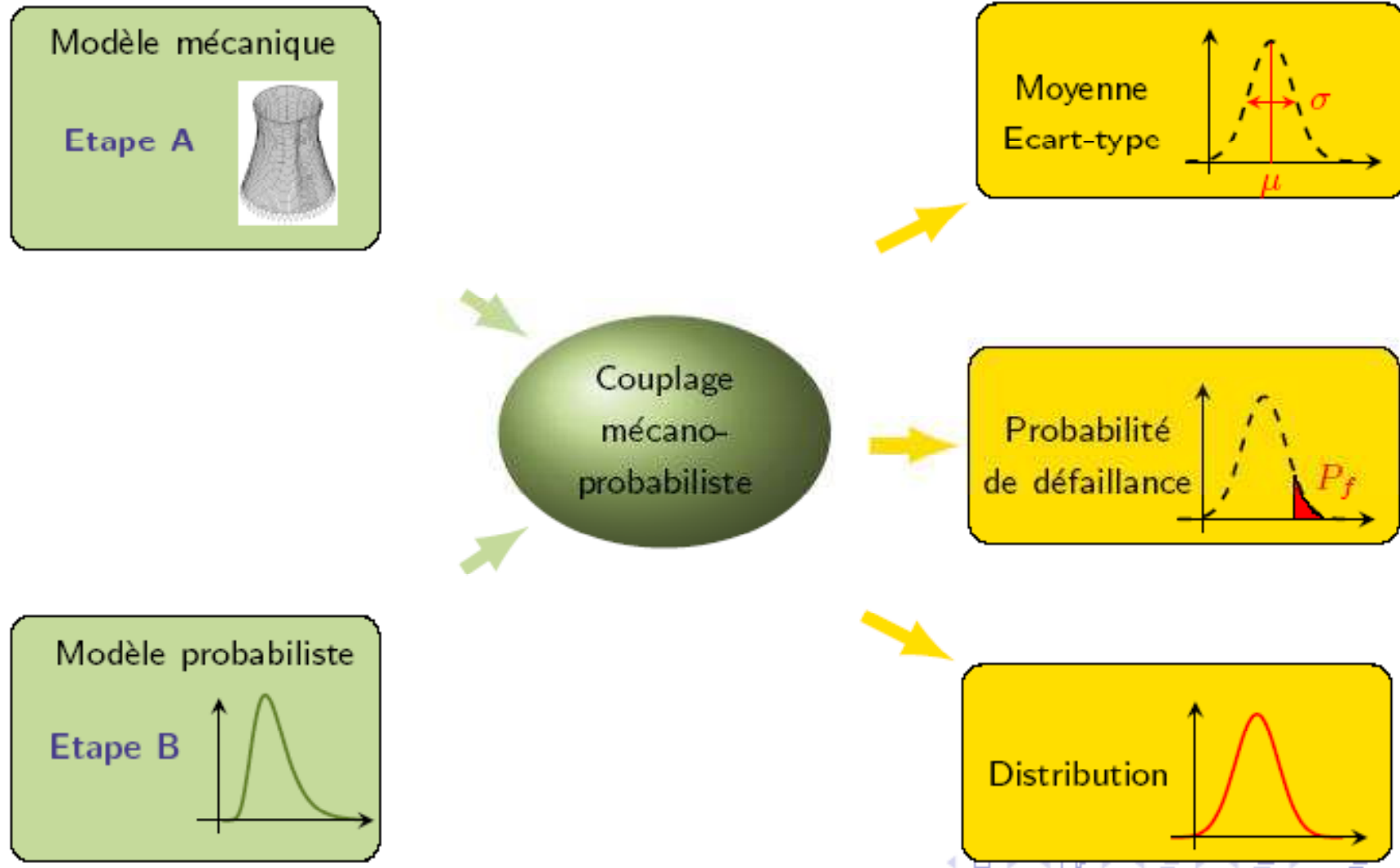
Rencontres du GdR MASCOT NUM
18 mars 2009

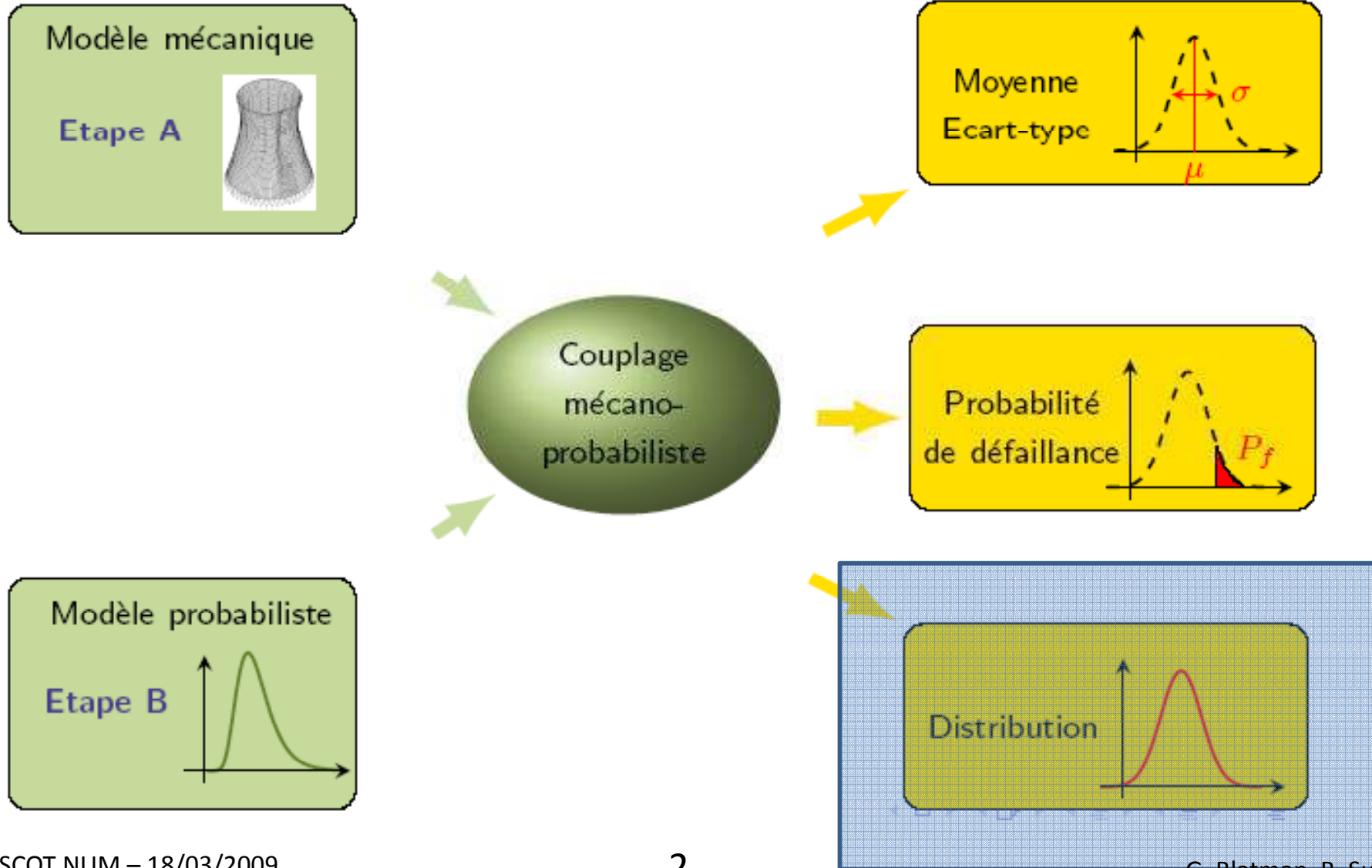
Propagation d'incertitudes par chaos polynomial creux et adaptatif

Thèse préparée par G. Blatman

- Directeur de thèse : B. Sudret (LaMI/Phimeca)
- Encadrant EDF: M. Berveiller







- Représentation **explicite** et **globale** de la réponse aléatoire du modèle
- Choix d'une méthode **non intrusive**, pouvant être appliquée à différents types de modèles physiques
- Développer une méthodologie permettant de **minimiser le nombre d'évaluations du modèle**, afin de pouvoir traiter des modèles industriels complexes
- Maîtrise de la **précision** de l'approximation

- Représentation **explicite** et **globale** de la réponse aléatoire du modèle
- Choix d'une méthode **non intrusive**, pouvant être appliquée à différents types de modèles physiques
- Développer une méthodologie permettant de **minimiser le nombre d'évaluations du modèle**, afin de pouvoir traiter des modèles industriels complexes
- Maîtrise de la **précision** de l'approximation

**Choix d'une méthode basée sur les développements
par chaos polynomial**

- Représentation par chaos polynomial
 - Développement sur la base du chaos polynomial
 - Calcul des coefficients
 - Post-traitements

- Chaos polynomial creux adaptatif
 - Le “fléau” de la dimension
 - Nouvelle stratégie de troncature du chaos
 - Algorithme de régression pas-à-pas (méthode 1)
 - *Least Angle Regression* (LAR) adaptatif (méthode 2)

- Calcul du tassement d'une fondation

- On considère un modèle physique $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$
 - ▶ \mathbf{X} est un vecteur aléatoire à composantes indépendantes
 - ▶ Y est un vecteur aléatoire de carré intégrable
- Représentation par chaos polynomial Soize *et al.* (2004)

$$Y = \mathcal{M}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^M} a_{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{X})$$

- On considère un modèle physique $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$
 - ▶ \mathbf{X} est un vecteur aléatoire à composantes indépendantes
 - ▶ \mathbf{Y} est un vecteur aléatoire de carré intégrable

- Représentation par chaos polynomial Soize *et al.* (2004)

$$Y = \mathcal{M}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^M} a_{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{X})$$

Coefficients déterministes qui caractérisent complètement la réponse \mathbf{Y}

Polynômes multivariés orthonormaux

$$\mathbb{E}[\psi_i(\mathbf{X})\psi_j(\mathbf{X})] = \delta_{i,j}$$

- Rappel : hypothèse d'indépendance des composantes de \mathbf{X}

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^M f_{X_k}(x_k)$$

- Rappel : hypothèse d'indépendance des composantes de \mathbf{X}

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^M f_{X_k}(x_k)$$

- Construction de **polynômes orthogonaux** vis-à-vis de $f_{X_i}(x_i)$

$$\langle \psi_k^i, \psi_l^i \rangle \equiv \int \psi_k^i(x) \psi_l^i(x) f_{X_i}(x) dx = 0 \quad \text{si } k \neq l$$

- Rappel : hypothèse d'indépendance des composantes de \mathbf{X}

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^M f_{X_k}(x_k)$$

- Construction de **polynômes orthogonaux** vis-à-vis de $f_{X_i}(x_i)$

$$\langle \psi_k^i, \psi_l^i \rangle \equiv \int \psi_k^i(x) \psi_l^i(x) f_{X_i}(x) dx = 0 \quad \text{si } k \neq l$$

- Produit tensoriel de polynômes unidimensionnels

$$\boldsymbol{\alpha} \equiv \{\alpha_1, \dots, \alpha_M\} \quad \Psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^M \psi_{\alpha_i}^i(x_i)$$

- On tronque le chaos polynomial (CP) après P termes
- Soit $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}\}^\top$ un ensemble de N réalisations de \mathbf{X} et soit $\mathcal{Y} \equiv \{\mathcal{M}(\mathbf{x}^{(1)}), \dots, \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(N)})\}^\top$ les évaluations du modèle associées
- On calcule les coefficients du CP par **ajustement des moindres carrés**

$$\hat{\mathbf{a}} = \arg \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^P} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}) - \mathbf{a}^\top \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}^{(i)}) \right)^2$$

Berveiller et al. (2005)

- On tronque le chaos polynomial (CP) après P termes
- Soit $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}\}^\top$ un ensemble de N réalisations de \mathbf{X} et soit $\mathcal{Y} \equiv \{\mathcal{M}(\mathbf{x}^{(1)}), \dots, \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(N)})\}^\top$ les évaluations du modèle associées
- On calcule les coefficients du CP par **ajustement des moindres carrés**

$$\hat{\mathbf{a}} = \arg \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^P} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}) - \mathbf{a}^\top \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}^{(i)}) \right)^2$$

Berveiller et al. (2005)

- La solution s'écrit sous forme analytique :

$$\hat{\mathbf{a}} = \left(\boldsymbol{\Psi}^\top \boldsymbol{\Psi} \right)^{-1} \boldsymbol{\Psi}^\top \mathcal{Y}$$

Matrice d'information ($P \times P$)

$$\Psi_{ij} = \psi_j(\mathbf{x}^{(i)})$$

Vecteur des évaluations du modèle ($N \times 1$)

- Soit le développement en CP de la réponse:

$$Y = \mathcal{M}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^M} a_{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{X})$$

- Moyenne et variance s'obtiennent **analytiquement** à partir des coefficients du chaos :

► Moyenne :

$$\mu_{Y,p} = a_0$$

► Variance :

$$\sigma_{Y,p}^2 = \sum_{0 < |\alpha| \leq p} a_{\alpha}^2$$

- Calcul analytique des *indices de sensibilité globale* Sudret (2008)
Reliab. Eng. Sys.
Safe.
- Analyses de fiabilité à moindre coût Blatman, Sudret (2009)
Prob. Eng. Mech.

- Représentation par chaos polynomial
 - Développement sur la base du chaos polynomial
 - Calcul des coefficients
 - Post-traitements
- Chaos polynomial creux adaptatif
 - Le “fléau” de la dimension
 - Nouvelle stratégie de troncature du chaos
 - Algorithme de régression pas-à-pas (méthode 1)
 - *Least Angle Regression* (LAR) adaptatif (méthode 2)
- Calcul du tassement d'une fondation

- Stratégie usuelle de troncature du chaos :
 - Ne conserver que les polynômes dont le degré total n'excède pas p
 - Le nombre P de termes est alors donné par : $P = \binom{M+p}{p}$
 - Or on doit nécessairement effectuer $N \geq P$ calculs pour résoudre le problème de régression

Augmenter le degré p peut donc conduire à un coût de calcul considérable en grande dimension (*i.e.* $M \gg 1$)

Solution : adopter une stratégie de troncature privilégiant les effets principaux (*hiérarchie des effets*)

- Stratégie usuelle

$$Y = \mathcal{M}(X) \approx \sum_{|\alpha| \leq p} a_{\alpha} \psi_{\alpha}(X)$$

Ensemble de troncature $\mathcal{A}^{M,p} = \{\alpha \in \mathbb{N}^M : \|\alpha\|_1 \equiv \sum_{i=1}^M \alpha_i \leq p\}$

- *Principe de hiérarchie des effets (PHE)* Montgomery (2004)

- La plupart des modèles sont gouvernés par les effets principaux et les interactions d'ordre faible

- Ensembles de troncature basés sur le PHE

$$\mathcal{A}_q^{M,p} = \left\{ \alpha \in \mathbb{N}^M : \|\alpha\|_q \equiv \left(\sum_{i=1}^M \alpha_i^q \right)^{1/q} \leq p \right\} \quad 0 < q \leq 1$$

$q = 1$
(schéma classique)

$q = 0,75$

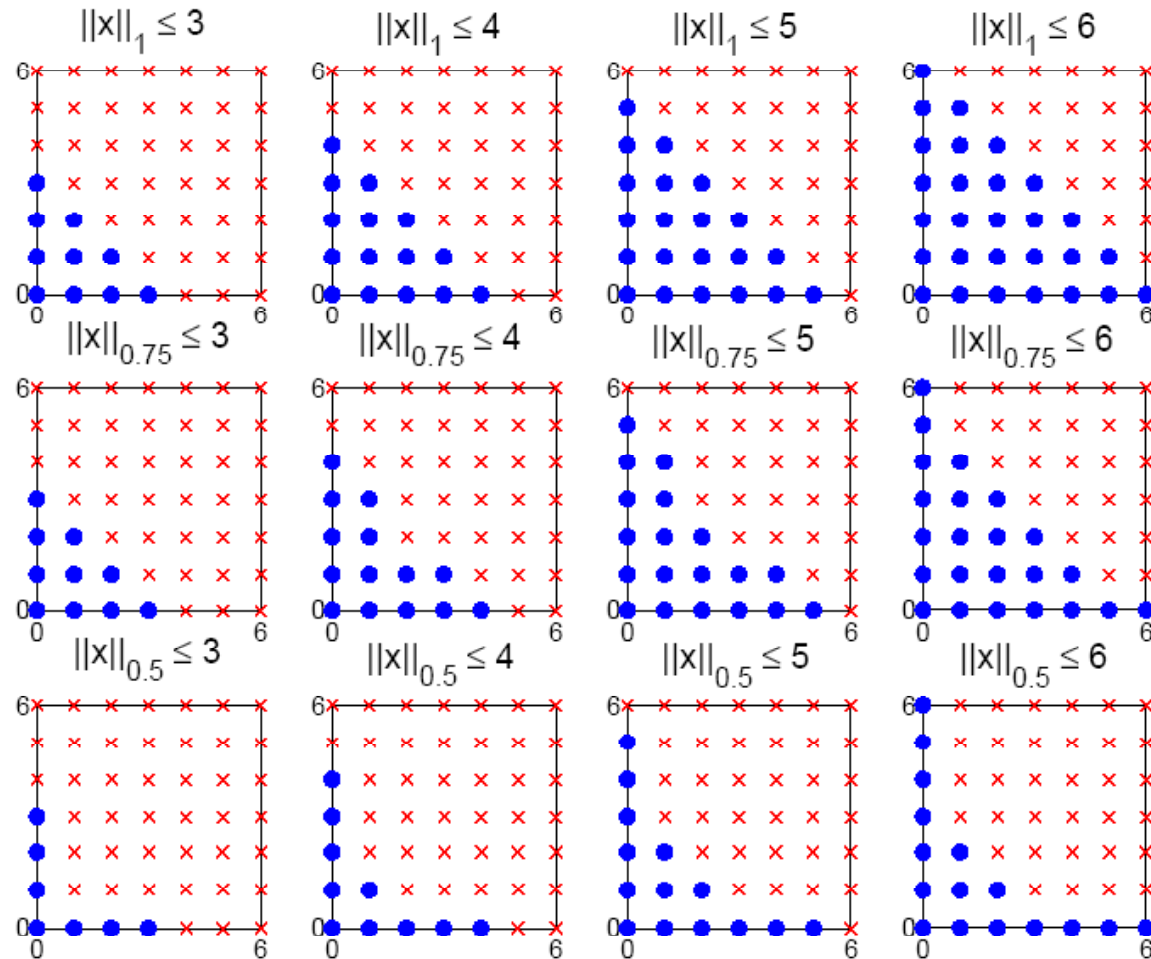
$q = 0,50$

Degré 3

Degré 4

Degré 5

Degré 6



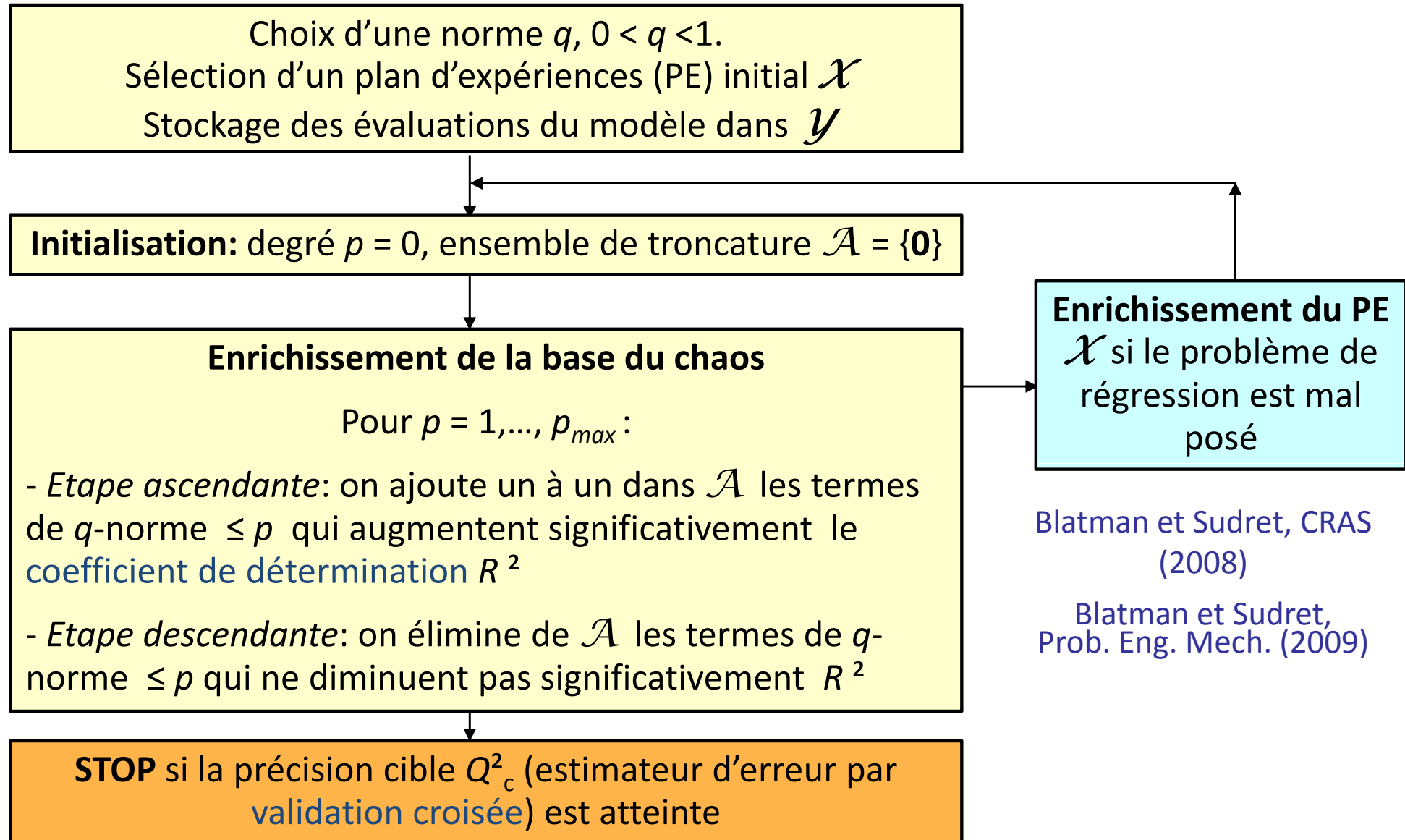
- La nouvelle stratégie de troncature permet une forte diminution de la taille du CP, et donc du coût de calcul
- Une version **anisotrope** est également investiguée pour privilégier les variables d'entrée influentes

*Blatman, Sudret (2009)
ICOSSAR'09*

- Le coût de calcul peut être encore réduit en supposant que le CP est **creux** (i.e. ne comporte que peu de termes non nuls)

Stratégie : concevoir une procédure itérative pour la construction pas-à-pas d'un CP creux

- Représentation par chaos polynomial
 - Développement sur la base du chaos polynomial
 - Calcul des coefficients
 - Post-traitements
- Chaos polynomial creux adaptatif
 - Le “fléau” de la dimension
 - Nouvelle stratégie de troncature du chaos
 - Algorithme de régression pas-à-pas (méthode 1)
 - *Least Angle Regression* (LAR) adaptatif (méthode 2)
- Calcul du tassement d'une fondation



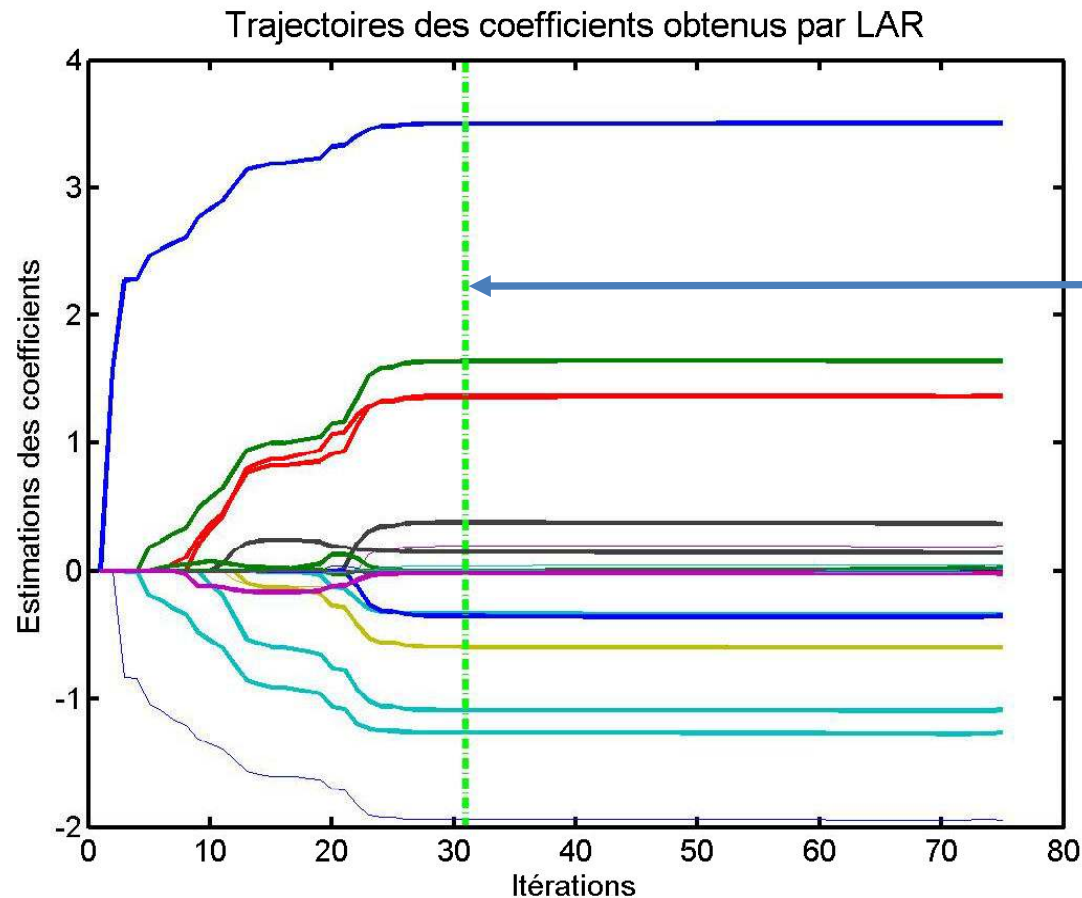
- La volonté d'obtenir un métamodèle **creux** nous conduit vers certaines méthodes de **régression régularisée**
- Problème de régression avec régularisation L_1 :

Minimiser
$$\sum_{i=1}^N \left(y^{(i)} - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_q^{M,p}} a_\alpha \psi(\mathbf{x}^{(i)}) \right)^2$$
 sous
$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_q^{M,p}} |a_\alpha| \leq s$$

- La solution est d'autant plus creuse que le paramètre s est faible
- Cette formulation nous permet d'obtenir des solutions pour $N < P$, ce qui est conforme à notre objectif de parcimonie en calculs

- LAR permet d'obtenir en une seule fois l'ensemble des solutions quand s varie de 0 à une valeur maximale

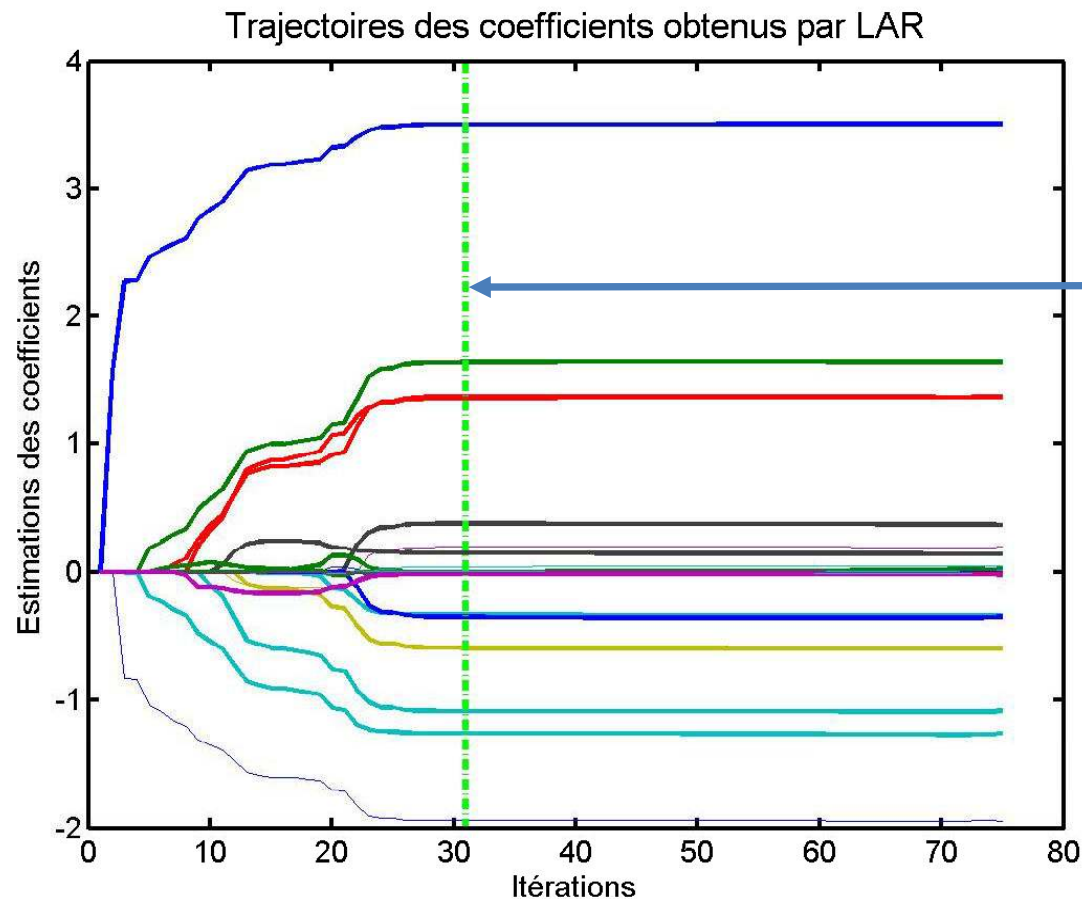
Efron *et al.*, 2000



Solution optimale
obtenue par validation
croisée

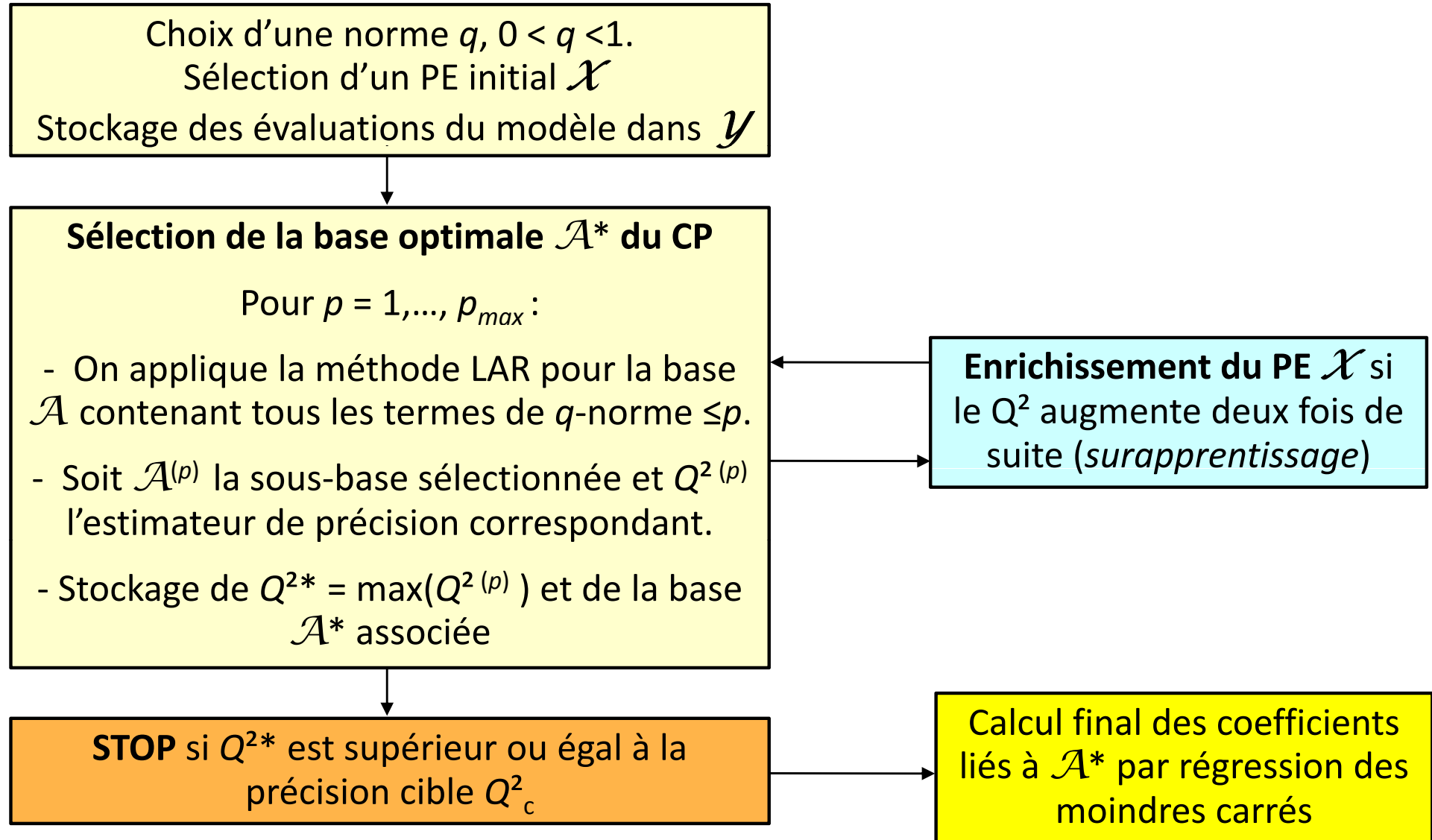
- LAR permet d'obtenir en une seule fois l'ensemble des solutions quand s varie de 0 à une valeur maximale

Efron *et al.*, 2000



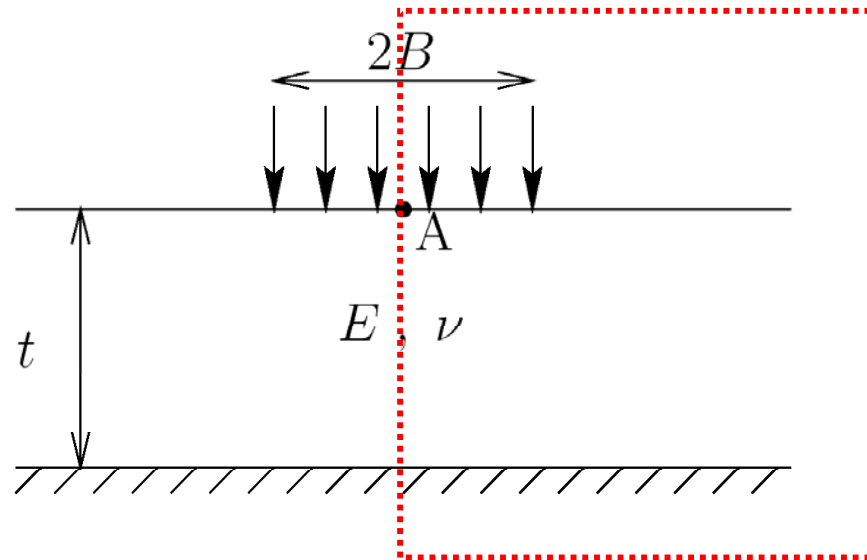
Solution optimale
obtenue par validation
croisée

Problème : choix de la
base (i.e. de l'ensemble
de troncature) *a priori* !



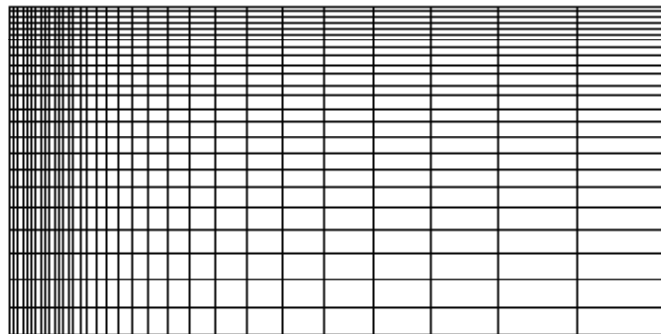
- Représentation par chaos polynomial
 - Développement sur la base du chaos polynomial
 - Calcul des coefficients
 - Post-traitements
- Chaos polynomial creux adaptatif
 - Le “fléau” de la dimension
 - Nouvelle stratégie de troncature du chaos
 - Algorithme de régression pas-à-pas (méthode 1)
 - *Least Angle Regression* (LAR) adaptatif (méthode 2)
- Calcul du tassement d'une fondation

Sudret *et al.* (2000)

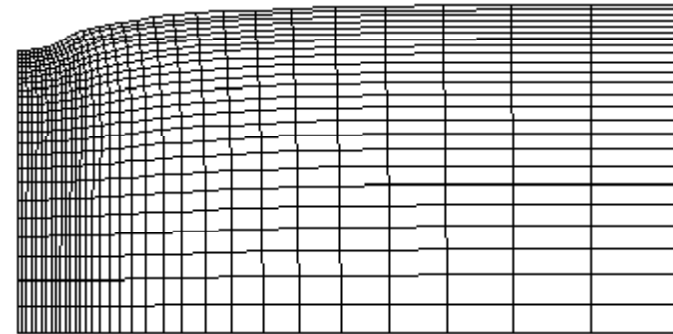


Domaine modélisé +
conditions de symétrie

Calcul du déplacement
vertical maximal



Maillage



Déformée

- Le module d'Young est un champ aléatoire

- ▶ Champ aléatoire lognormal:

$$E(\mathbf{x}, \omega) = \exp(\zeta \cdot U(\mathbf{x}, \omega) + \lambda) \quad U(\mathbf{x}, \omega) \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- ▶ Moyenne et écart-type : $\mu_E = 50 \text{ MPa}$ $\sigma_E = 15 \text{ MPa}$

- ▶ Fonction d'autocorrélation :

$$\rho_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp \left[-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2}{\ell^2} \right] \quad \ell = 10 \text{ cm}$$

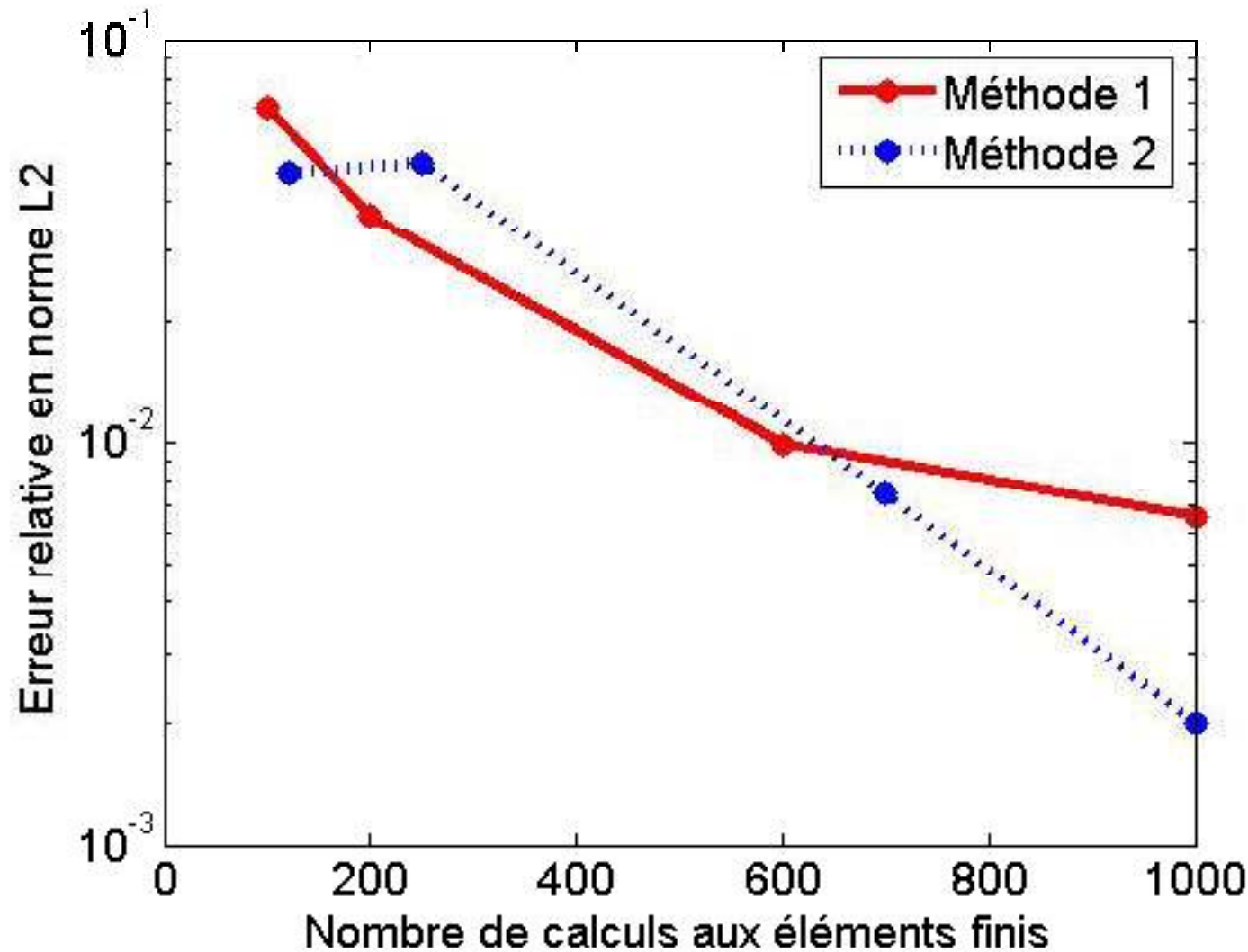
- Décomposition de Karhunen-Loève

$$U(\mathbf{x}, \omega) \simeq \sum_{i=1}^M h_i(\mathbf{x}) \xi_i(\omega) \quad \xi_i : \text{i.i.d. } \mathcal{N}(0, 1)$$

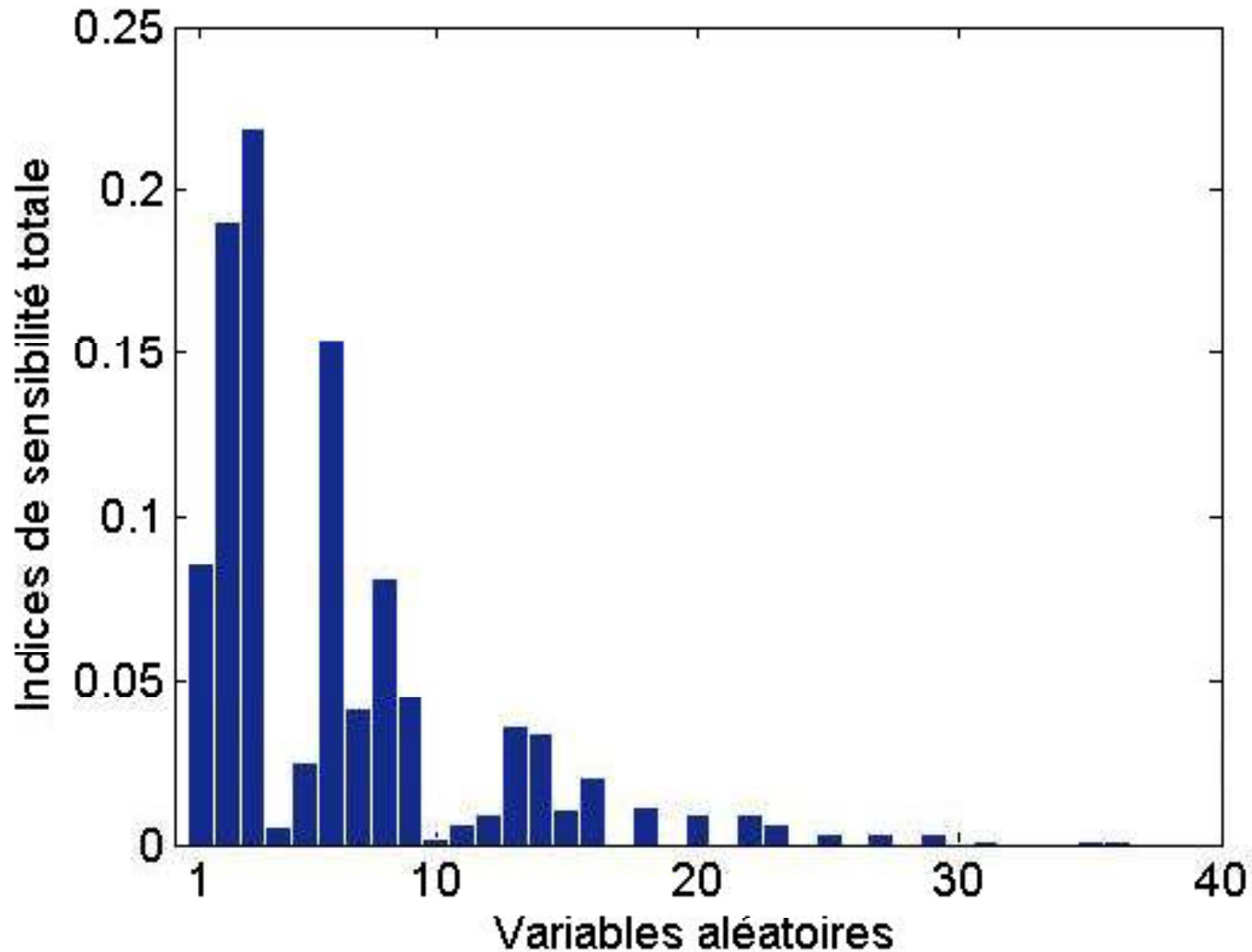
$M = 40$
 (variance de l'erreur
 $\leq 1\%$)

$$Q^2_{cible} = 0,99$$

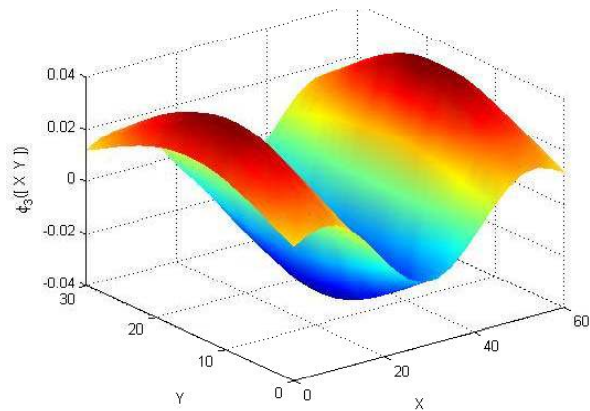
Moments	MC direct + <i>bootstrap</i> CI à 95%	CP creux Methode 1 $q=0,6$	CP creux Methode 2 $q=0,6$
Mean (cm)	[5,91 ; 5,92]	5,91	5,90
Ecart-type (cm)	[1,12 ; 1,14]	1,13	1,12
<i>Skewness</i>	[0,6 ; 0,7]	0,5	0,5
<i>Kurtosis</i>	[3,6 ; 3,8]	3,3	3,4
# calculs EF	50 000	600	700
Degré final	-	4	4



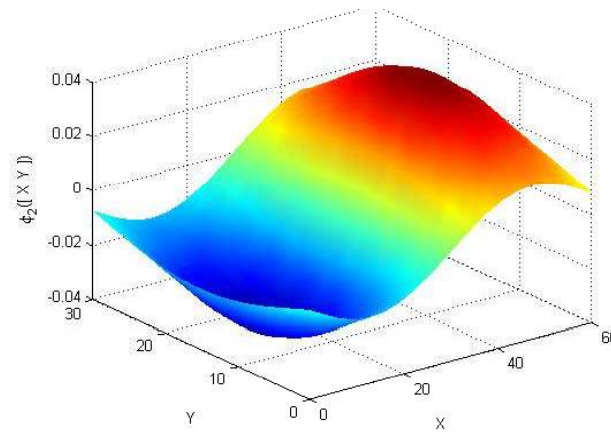
- ▶ L'algo. basé sur LAR est le plus performant sur cet exemple
- ▶ Convergence exponentielle



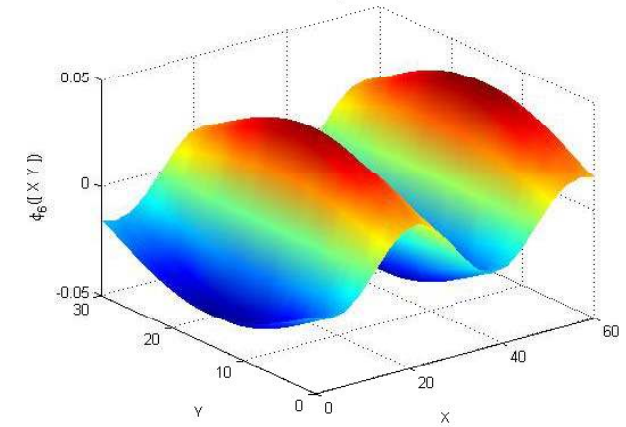
1



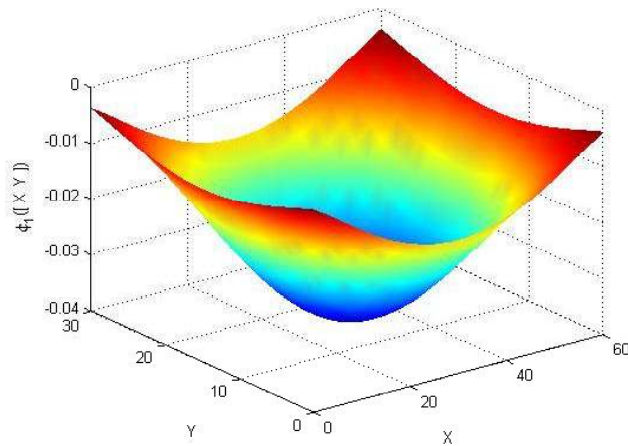
2



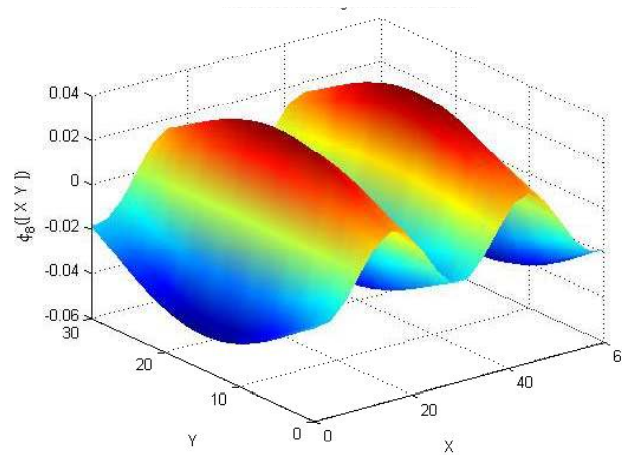
3



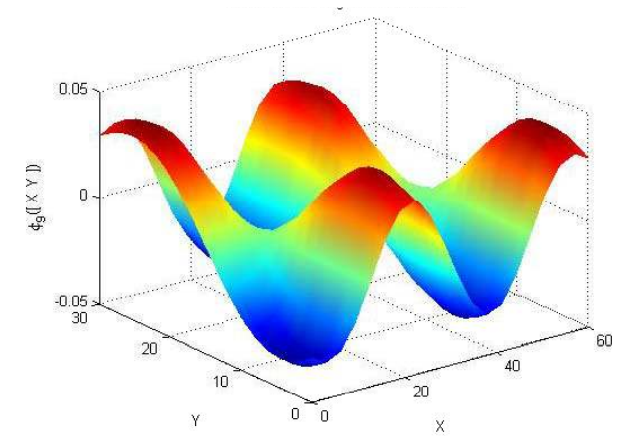
4



5



6



- Approximation de la réponse par un chaos polynomial creux
 - ▶ Une nouvelle stratégie de troncature est définie (*hiérarchie des effets*)
 - ▶ Le CP creux est construit par **régression pas-à-pas** (méthode 1) ou par **régression LAR adaptative** (méthode 2)
 - ▶ Le nombre d'évaluations du modèle est ajusté de manière automatique
- Résultats
 - ▶ Les CP creux permettent de traiter des problèmes de grande dimension (i.e. 40 variables d'entrée pour 600 calculs)
 - ▶ Ils permettent d'effectuer des analyses de moments statistiques à faible coût numérique comparé aux chaos "pleins"
 - ▶ La méthode basée sur LAR est *a priori* plus performante

- Comparaison systématique des méthodes 1 et 2 sur différents exemples
- Etude paramétrique vis-à-vis du choix de la valeur q de la norme de troncature des chaos polynomiaux
- Mise en œuvre d'un schéma de troncature anisotrope pour privilégier les variables les plus influentes sur la réponse
- Application à l'analyse de l'intégrité d'une cuve de réacteur de centrale nucléaire

MERCI DE VOTRE ATTENTION