Homogénéisation et mélange aléatoire de matériaux périodiques

Arnaud Anantharaman - Doctorant au CERMICS

ananthaa@cermics.enpc.fr
CERMICS, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées et Université Paris Est
6 & 8 avenue Blaise Pascal, 77455 Marne-la-Vallée Cedex 2, France

1 Motivations

Ce résumé présente un travail effectué avec Claude Le Bris (CERMICS), réalisé dans le cadre d'un contrat de thèse entre le CERMICS et EADS IW. Nous nous plaçons dans le contexte de l'homogénéisation, dont un des buts est de faciliter le traitement numérique de matériaux présentant des hétérogénéités à petite échelle. Les matériaux composites utilisés dans l'industrie aéronautique, et notamment au sein du groupe EADS, ne sont ni idéalement périodiques ni totalement désordonnés. Un grand nombre d'entre eux sont des arrangements périodiques perturbés, avec par exemple des défauts de fibres. Nous souhaitons proposer un modèle à la fois fondé théoriquement et implémentable en pratique de ces matériaux, qui, tout en étant très simplifié, constitue à notre avis un premier pas intéressant dans la recherche d'une approche mathématique rigoureuse et exploitable numériquement.

Notre modèle consiste en un mélange aléatoire de matériaux périodiques, dans lequel un matériau périodique de référence est perturbé de manière stochastique par un second matériau périodique. Ce modèle fait suite aux travaux de X. Blanc, C. Le Bris et P.-L. Lions ([1]) sur les déformations stochastiques de matériaux périodiques ; il en diffère par le fait que la perturbation que nous considérons constitue un évènement rare en probabilité mais qui peut néanmoins fortement modifier la structure locale du matériau.

2 Présentation succincte du problème et résultat

2.1 Rappel du cadre de l'homogénéisation stochastique

On se place dans $\mathbb{R}^3$, dont on note e_i la base canonique ($i \in [\![1,3]\!]$). On note Ω l'espace probabilisé, $\omega \in \Omega$ l'aléa, $\mathcal{D}$ le domaine de forme du matériau, ϵ la taille caractéristiques des hétérogénéités du matériau et, pour un réel η dont la signification sera précisée plus tard, $A_\eta(y,\omega)$ un champ de tenseurs aléatoire $\mathbb{Z}^3$-stationnaire ergodique (la stationnarité est alors discrète).

On suppose que le comportement du matériau est caractérisé par le tenseur $A_\eta\left(\frac{x}{\epsilon},\omega\right)$ au point $x \in \mathcal{D}$ et pour la réalisation $\omega \in \Omega$. On sait alors (voir [2] ou [3]) que son comportement homogénéisé est donné par le tenseur déterministe A_η^* défini par

$$\forall i \in [\![1,3]\!],\ A_\eta^* e_i = \mathbb{E}\left(\int_Q A_\eta(y,\omega)(\nabla w_i^\eta(y,\omega) + e_i)dy\right)$$

où $\mathbb{E}$ désigne l'espérance, $Q = [0,1]^3$ et les w_i^η sont les solutions des problèmes de correcteur

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(A_\eta(\nabla w_i^\eta + e_i)\right) = 0 \ \text{ dans } \mathbb{R}^3 \times \Omega \\ \nabla w_i^\eta \ \ \mathbb{Z}^3 - \text{stationnaire} \\ \mathbb{E}\left(\displaystyle\int_Q \nabla w_i^\eta\right) = 0 \end{cases}$$

Notre objectif est de calculer A_η^* de manière approchée sans résoudre un problème stochastique, ceci pour une classe bien précise de matériaux.

2.2 Cas particulier du mélange aléatoire de matériaux périodiques

On suppose dorénavant que A_η s'écrit sous la forme :

$$A_\eta(y,\omega) = A_{per}(y) + b_\eta(y,\omega) C_{per}(y)$$

où A_{per} et C_{per} sont deux tenseurs périodiques déterministes et b_η est un champ scalaire aléatoire $\mathbb{Z}^3$-stationnaire ergodique. A_{per} caractérise le matériau périodique de référence, qui se voit perturbé par le matériau périodique C_{per}. On fait les hypothèses suivantes :

- A_{per} est borné et coercif sur $\mathbb{R}^3$;
- b_η est borné indépendamment de η sur $\mathbb{R}^3 \times \Omega$, C_{per} est borné sur $\mathbb{R}^3$, et ces bornes sont telles que A_η soit coercif sur $\mathbb{R}^3 \times \Omega$;
- $\|b_\eta\|_{L^2(\Omega;L^\infty(Q))} \underset{\eta\to 0}{\to} 0$.

Les deux premières hypothèses sont nécessaires pour que le problème d'homogénéisation soit bien posé. La troisième est au contraire un choix de modélisation qui exprime que b_η représente une perturbation petite en probabilité.

2.3 Résultat

Soit $m_\eta = \|b_\eta\|_{L^2(\Omega;L^\infty(Q))}$. $\dfrac{b_\eta}{m_\eta}$ est borné dans $L^2(\Omega;L^\infty(Q))$, donc converge vers un $b_0 \in L^2(\Omega;L^\infty(Q))$ pour la topologie faible.

En adaptant la preuve de la section 3 de [1] on obtient

$$\boxed{\forall i \in [\![1,3]\!],\ A_\eta^* e_i = A_{per}^* e_i + m_\eta \int_Q \mathbb{E}(b_0) C_{per}(\nabla w_i^0 + e_i) + m_\eta \int_Q A_{per} \nabla v_i^0 + o(m_\eta)}$$

où A_{per}^* est le tenseur homogénéisé de A_{per}, les w_i^0 sont les correcteurs périodiques usuels associés à A_{per}, et les v_i^0 vérifient

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_{per}\nabla v_i^0) = \operatorname{div}(\mathbb{E}(b_0) C_{per}(\nabla w_i^0 + e_i)) \ \text{ dans } Q \\ v_i^0 \ \ Q-\text{périodique} \end{cases}$$

On peut donc calculer A_η^* à l'ordre 1 en m_η en résolvant un petit nombre de problèmes elliptiques purement déterministes (six exactement) sur la cellule de périodicité Q.

2.4 Extensions

Nous avons estimé la petitesse de la perturbation b_η dans l'espace $L^2(\Omega;L^\infty(Q))$. Notre approche s'étend, moyennant une plus grande complexité technique, aux espaces $L^p(\Omega;L^\infty(Q))$ avec $p > 1$. Du fait des propriétés topologiques particulières de $L^1(\Omega;L^\infty(Q))$, le cas $p = 1$ ne semble pas relever de la même démarche. Nous travaillons actuellement sur ce point.

Références

[1] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, *Stochastic homogenization and random lattices*, J. Math. Pures Appl. 88 (2007) 34-63.

[2] G.C. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan, *Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients* in J. Fritz, J.L. Lebowitz, D. Szasz (Eds.), Proceed of Colloq. on Random Fields, Rigorous Results in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, North-Holland, Amsterdam (1981) 835-873.

[3] V.V. Yurinskii, *Averaging of symmetric diffusion in random medium*, Sibirskii Mat. Zh. 27 (4) (1986) 167-180.