

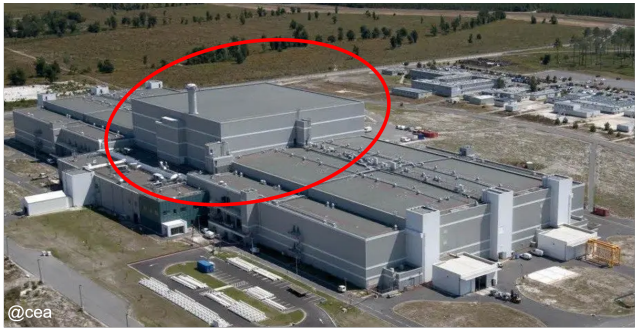
Apprendre en grande dimension avec peu d'images : régression et analyse de sensibilité pour Rayleigh-Taylor

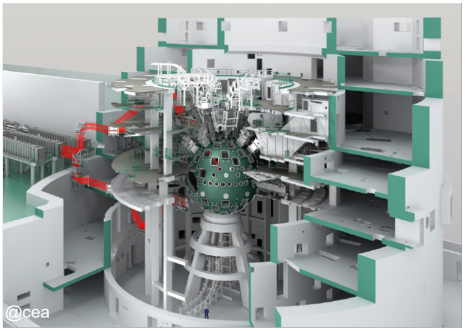
ETICS 2026

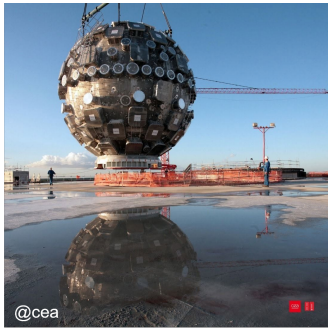
C. Haberstich, I. Abraham, C. Cannamela
CEA / DAM / DIF, F-91297, Arpajon, France
cecile.haberstich@cea.fr

La fusion par confinement inertiel

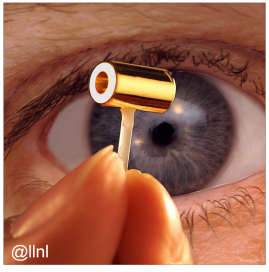
Recréer sur Terre les conditions de la fusion nucléaire

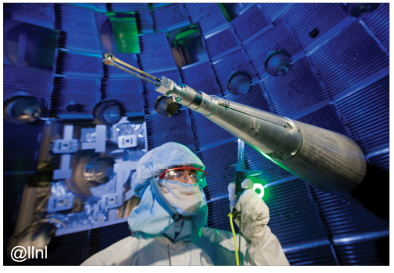


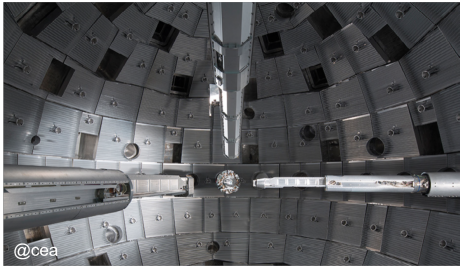








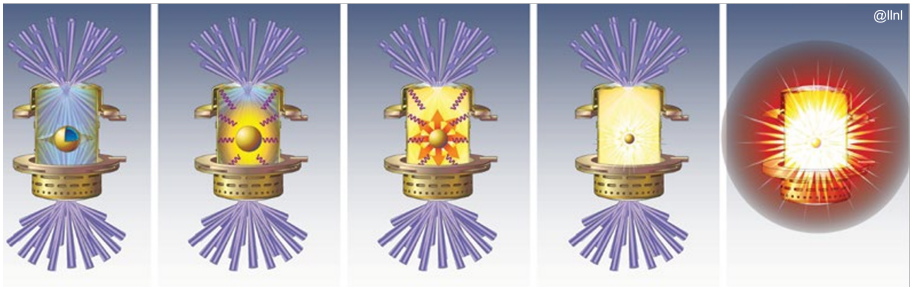




La fusion par confinement inertiel

Comprimer pour fusionner

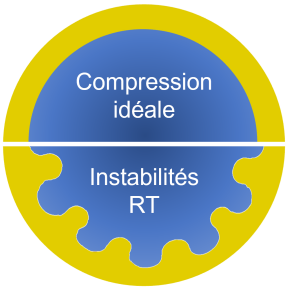
- **Principe : Comprimer** très rapidement une petite **cible de combustible** à l'aide de puissants **lasers** afin d'atteindre, pendant un temps très court, les **conditions nécessaires à la fusion**.



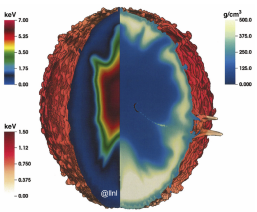
1. Les faisceaux laser entrent par les trous de la cavité et chauffent ses parois internes à **très haute température**.
2. Un plasma se forme et émet un intense **rayonnement X**.
3. Les rayons X vaporisent la paroi de la capsule, **accélérant** ainsi le **combustible** vers l'intérieur.
4. En se comprimant, le combustible atteint des **pressions et des températures extrêmes**, propices à la fusion.
5. La **fusion s'amorce** au centre et se propage dans le combustible, libérant de l'énergie.

La fusion par confinement inertiel

Un des nombreux défis : les instabilités de Rayleigh-Taylor



- Les instabilités de **Rayleigh–Taylor** apparaissent lorsqu'un **fluide dense est accéléré** vers un fluide moins dense (phase de compression).
- Elles résultent de l'**amplification de petites perturbations initiales** :
  - les micro-imperfections de surface de la cible ;
  - les accélérations non uniformes liées aux variations du rayonnement X.





@Stanford University

- **Maîtriser ces instabilités** est essentiel pour atteindre la fusion.

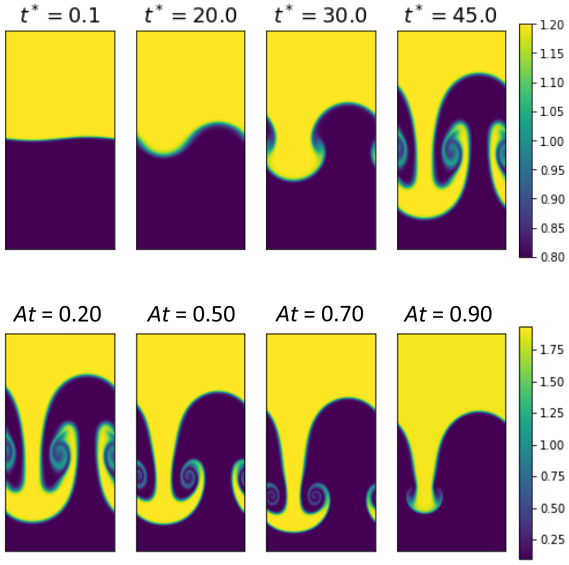
Le problème d'apprentissage

Apprendre un scalaire à partir de champs 2D

- L'évolution de l'instabilité dépend notamment du **nombre d'Atwood**

$$At = \frac{\rho_{\text{lourd}} - \rho_{\text{leger}}}{\rho_{\text{lourd}} + \rho_{\text{leger}}},$$

- Différentes valeurs de At conduisent à des **dynamiques et configurations différentes**.
- Le champ de densité x est **adimensionné**.
- **Objectif :** apprendre l'Atwood à partir de la **morphologie** du champ : taille des structures, degré de mélange, asymétrie bulles/spikes, etc.



Le problème d'apprentissage

Les contraintes

- Le nombre d'Atwood doit être **stable aux petites déformations et translations** ;
- **Faible nombre de simulations :** $N \approx 100$

  $\rightarrow$ Les approches classiques type CNN ne sont pas adaptées.

Approche envisagée

On cherche une représentation des données telle que :

- les **structures à différentes échelles** soient capturées ;
- la représentation de la physique est **parcimonieuse** ;
- suffisamment d'information est conservée pour **distinguer les régimes physiques**.

  $\rightarrow$ **Scattering Wavelet Transform [Bruna, Mallat]**.

[Bruna, Mallat] J. Bruna, S. Mallat - Invariant scattering convolution networks. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence 35 (8), 1872-1886, 2013.

Sommaire

1 Transformée en ondelettes

2 Scattering Wavelet Transform et apprentissage

3 Vers l'analyse de sensibilité...

1. Transformée en ondelettes

Transformée en ondelettes

Famille d'ondelettes

- Une **ondelette** $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ est une oscillation **localisée** en temps, de **moyenne nulle** :

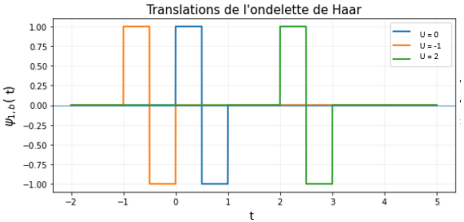
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\, dt = 0.$$

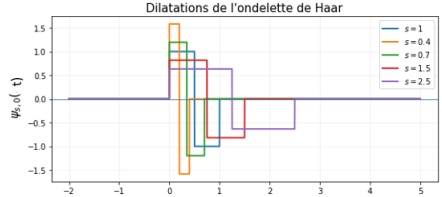
- On engendre une **famille** par **translation** ($u \in \mathbb{R}$) et **dilatation** ($s \in \mathbb{R}^{+\star}$) :

$$\psi_{s,u}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\, \psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$$

→ t : variable temporelle (ou spatiale) ;
→ $s > 0$: **échelle** :
s grand ⇒ ondelette étalée, lente ;
s petit ⇒ ondelette resserrée, rapide ;
→ u : **position** : l'ondelette est centrée en u ;







Transformée en ondelettes

Analyser un signal à toutes les échelles, à toutes les positions

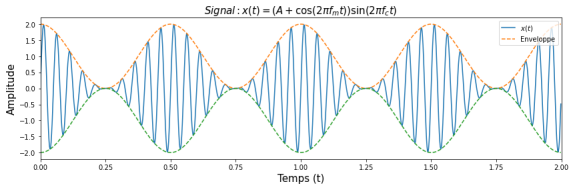
- Pour $x \in L^2(\mathbb{R})$, la transformée en ondelettes continue $Wx(s,u)$ est la **projection du signal** sur cette famille :

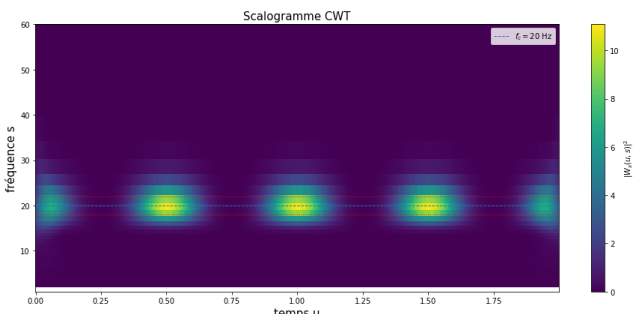
$$\langle x, \psi_{s,u} \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \bar{\psi}\left(\frac{t-u}{s}\right) dt$$

- **Convolution** : $Wx(s,u) = (x \star \bar{\psi}_s)(u)$

  avec $\bar{\psi}_s(u) = \frac{1}{\sqrt{s}} \bar{\psi}(-u/s)$.

- $Wx(s,u)$ mesure la **présence d'une structure** de taille s autour de la position u.



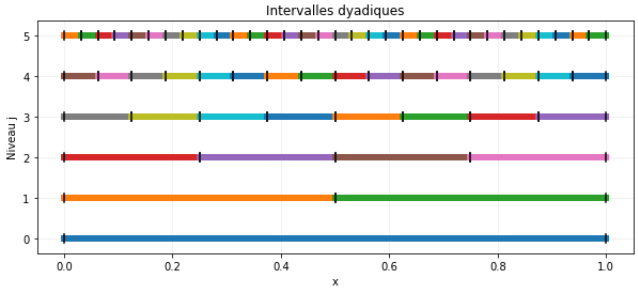


Transformée en ondelettes

Discrétisation

- En pratique, le signal est échantillonné.
- Idée : ne retenir qu'une famille **dénombrable**, échantillonnée sur la **grille dyadique**

$$s = 2^j, \qquad u = 2^j k, \qquad j, k \in \mathbb{Z}.$$



- Pour un bon choix d'ondelette, $\{\phi_{J,k}\}_k \cup \{\psi_{j,k}\}_{j \leq J,\, k}$ est une **base orthonormée** de $L^2(\mathbb{R})$: décomposition **exacte**.
- Le signal se sépare en une **approximation** et des **détails** :

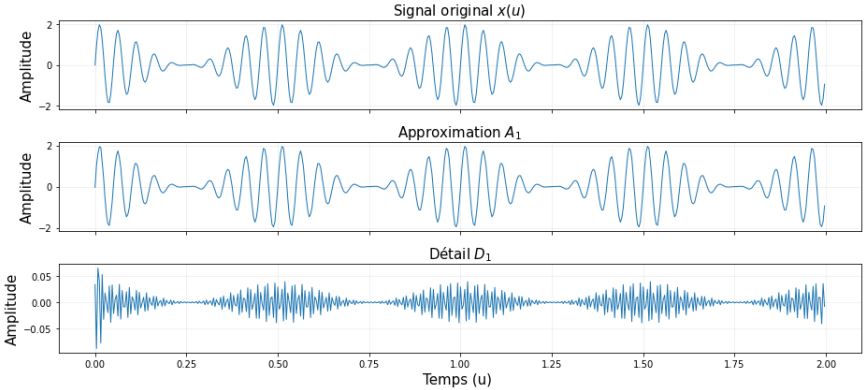
$$x = \underbrace{\sum_k \langle x, \phi_{J,k} \rangle \, \phi_{J,k}}_{\text{approximation à l'échelle } 2^J} + \underbrace{\sum_{j \leq J} \sum_k \langle x, \psi_{j,k} \rangle \, \psi_{j,k}}_{\text{détails}}$$

.

Transformée en ondelettes

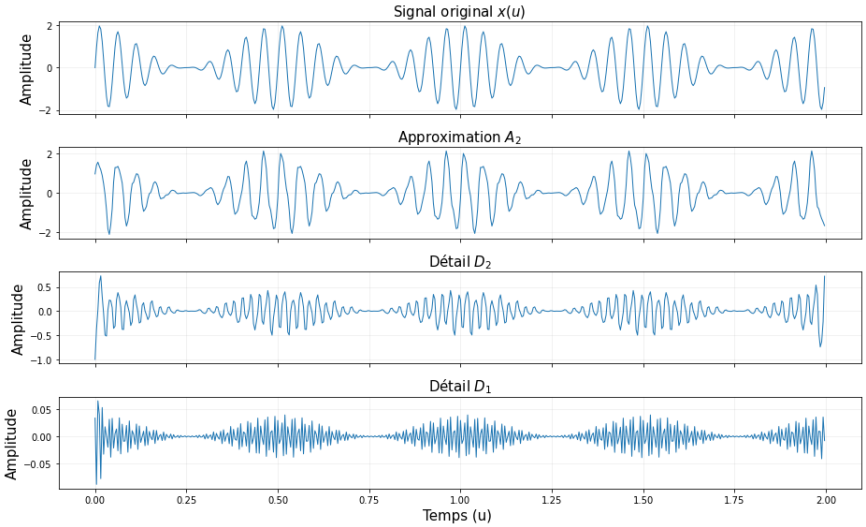
Nombre de niveaux de décomposition : J niveaux

- A chaque niveau, l'approximation est séparée en une approximation plus grossière + détails.
- Chaque niveau correspond à une **bande de fréquences** :
  - niveaux fins : **détails**, hautes fréquences ;
  - niveaux grossiers : **structures globales**, basses fréquences.
- Plus J est grand : approximation plus grossière, et davantage d'échelles décrites par les détails.



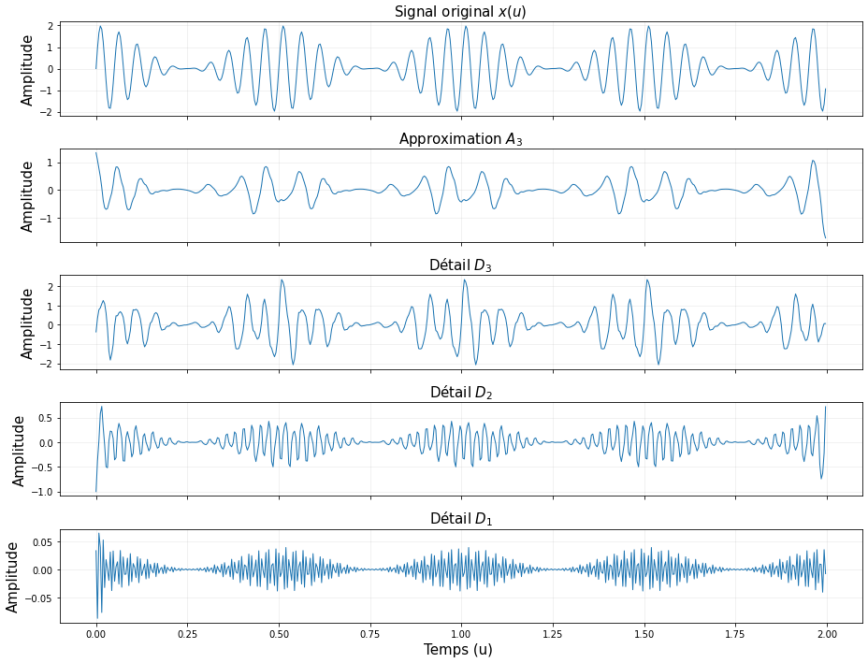
Transformée en ondelettes

Nombre de niveaux de décomposition : $J = 2$ niveaux



Transformée en ondelettes

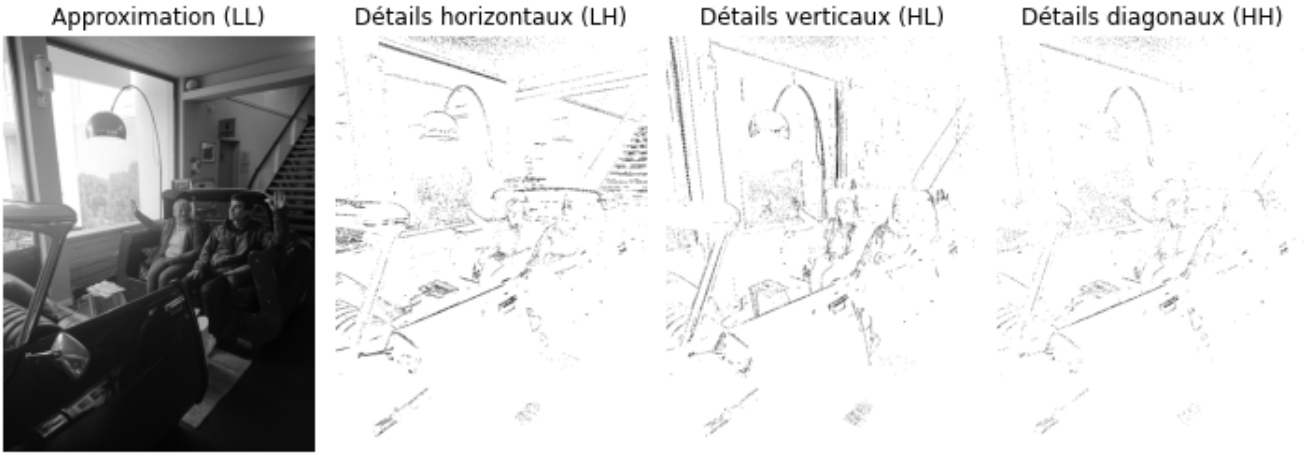
Nombre de niveaux de décomposition : $J = 3$ niveaux



Transformée en ondelettes

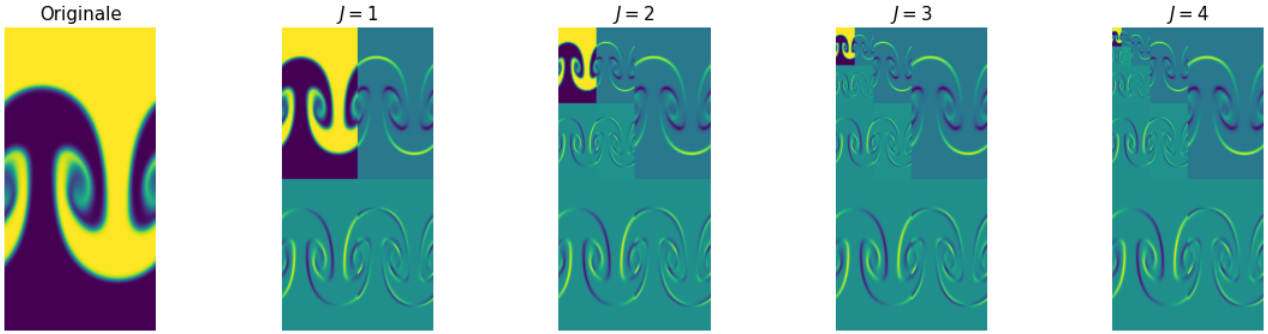
En 2D

- Lorsque l'on passe en 2D, on prend la base **tensorisée**.
- Restreint les orientations à **trois directions** : horizontale, verticale et diagonale.



Transformée en ondelettes

Représentation parcimonieuse des images RT



Ondelettes 2D non tensorisées

- L'ondelette mère $\psi(\mathbf{u})$ engendre une famille par **dilatation** 2^j et **rotation** d'angle θ :

$$\psi_{j,\theta}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2^j}\,\psi\Big(\frac{r_{-\theta}\,\mathbf{u}}{2^j}\Big)$$

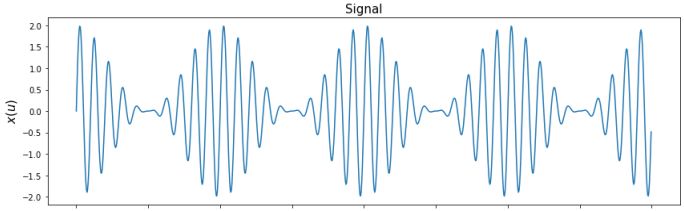
- L'image $x(\mathbf{u})$ est convoluée avec une famille d'ondelettes $\psi_\lambda = \{\psi_{j,\theta}\}$, indexées par l' **échelle** j et l' **orientation** θ.

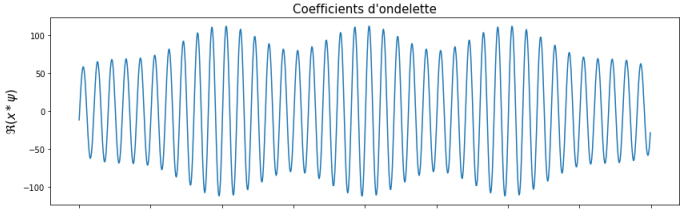
2. Scattering Wavelet Transform et apprentissage

Scattering Wavelet Transform [Bruna, Mallat]

1. Convolution avec les ondelettes : $x \star \psi_\lambda(\mathbf{u})$

- La convolution détecte les **structures locales** (contours, textures) en fonction de leur échelle et de leur orientation.





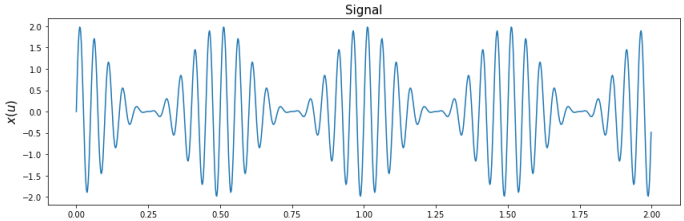
Scattering Wavelet Transform [Bruna, Mallat]

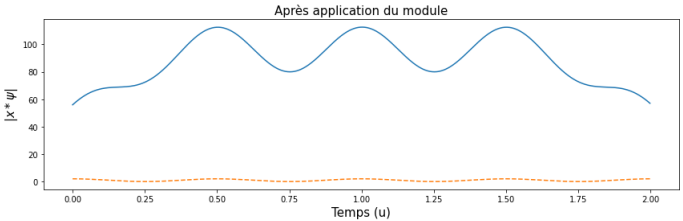
1. Convolution avec les ondelettes : $x \star \psi_\lambda(\mathbf{u})$

- La convolution détecte les **structures locales** (contours, textures) en fonction de leur échelle et de leur orientation.

2. Non-linéarité (module) : $|x \star \psi_\lambda(\mathbf{u})|$

- Le module supprime la phase de la réponse complexe et conserve son amplitude. Il rend ainsi la représentation plus **stable aux petites translations et déformations**.





Scattering Wavelet Transform [Bruna, Mallat]

1. Convolution avec les ondelettes : $x \star \psi_\lambda(\mathbf{u})$

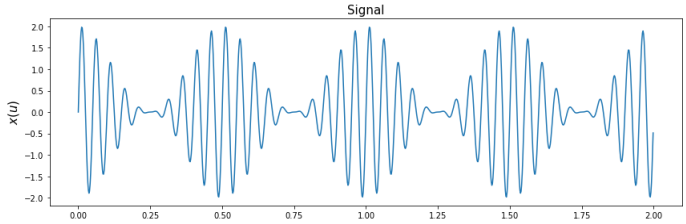
- La convolution détecte les **structures locales** (contours, textures) en fonction de leur échelle et de leur orientation.

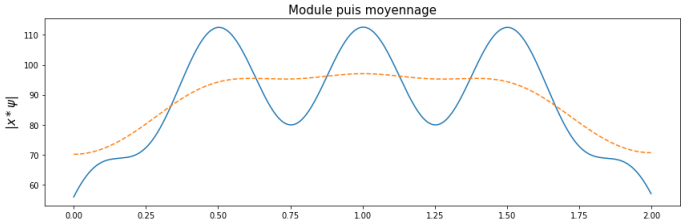
2. Non-linéarité (module) : $|x \star \psi_\lambda(\mathbf{u})|$

- Le module supprime la phase de la réponse complexe et conserve son amplitude. Il rend ainsi la représentation plus **stable aux petites translations et déformations**.

3. Moyennage par filtre passe-bas : $|x \star \psi_\lambda(\mathbf{u})| \star \phi_J(\mathbf{u})$

- Le filtre passe-bas ϕ_J moyenne les coefficients sur une fenêtre spatiale de taille 2^J. La représentation devient ainsi **localement invariante aux translations à l'échelle** 2^J.



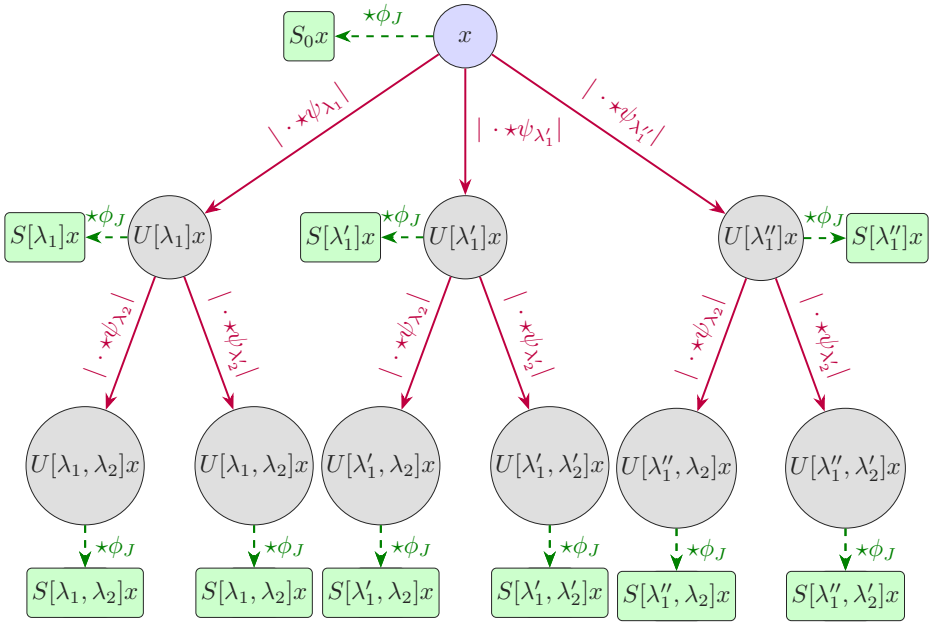


Scattering Wavelet Transform

Ordre 2

- Chaque $\boldsymbol{\lambda}$ définit une branche de la cascade, calculée indépendamment des autres.

- Ordre 0 : grandes échelles
- Ordre 1 : structures locales
- Ordre 2 : interactions entre structures.



Scattering Wavelet Transform

Ordre 2

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{512\times256}$

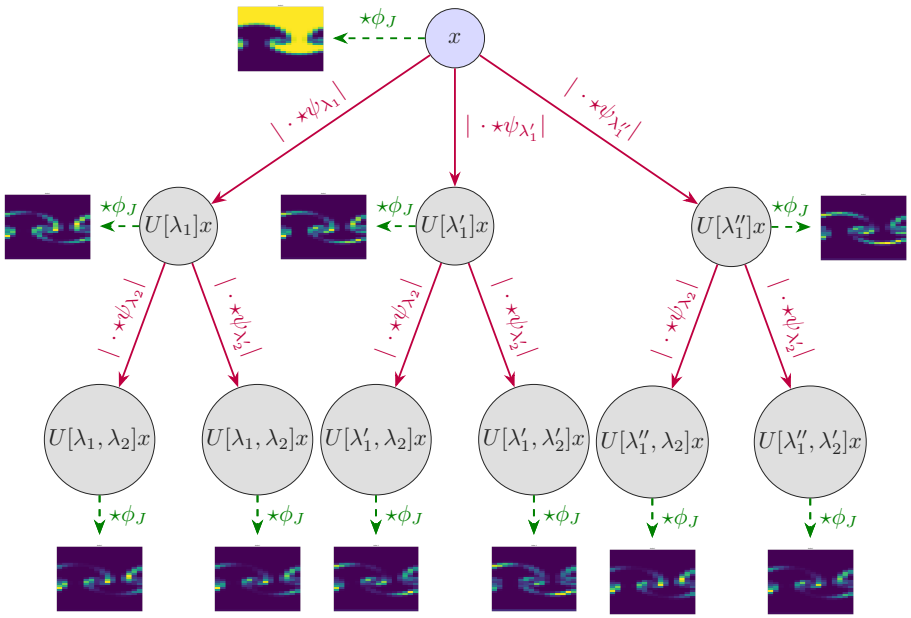
  pour $J = 4$: $\mathbf{x}_S \in \mathbb{R}^{417\times32\times16}$

- Chaque $\mathbf{x}_S = (\mathrm{x}_{S_i})_{i=1}^{n_S}$ est indexé par un triplet $i = (m, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u})$:

  $\rightarrow$ $m \in \{0, 1, 2\}$: ordre,

  $\rightarrow$ $\boldsymbol{\lambda}$: chemin d'ondelettes (échelles et orientations parcourues),

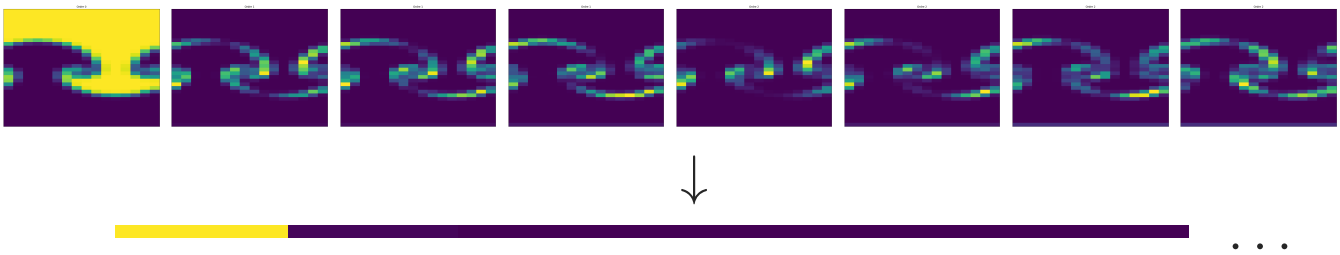
  $\rightarrow$ $\mathbf{u}$: position spatiale.



Apprentissage avec Scattering Wavelet Transform

Retour à notre problème d'apprentissage

$\mathbf{x}_S$ sert d'entrée à l'apprentissage $\rightarrow$ On remplace nos images par un vecteur.

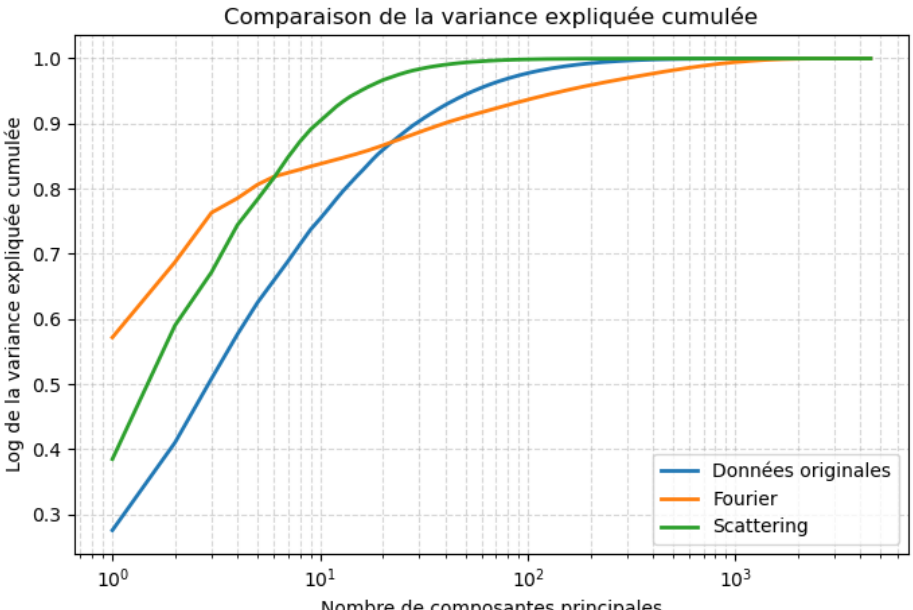


Régression linéaire sur les pixels x_S de taille N x 417 x 32 x 16 $\approx$ 2 millions de pixels [Hirn, 2017].

[Hirn, 2017] M. Hirn, S. Mallat, N. Poilvert - Wavelet scattering regression of quantum chemical energies. Multiscale Modeling and Simulation 2017.

Apprentissage avec Scattering Wavelet Transform

Réduction de dimension par ACP



Apprentissage avec Scattering Wavelet Transform

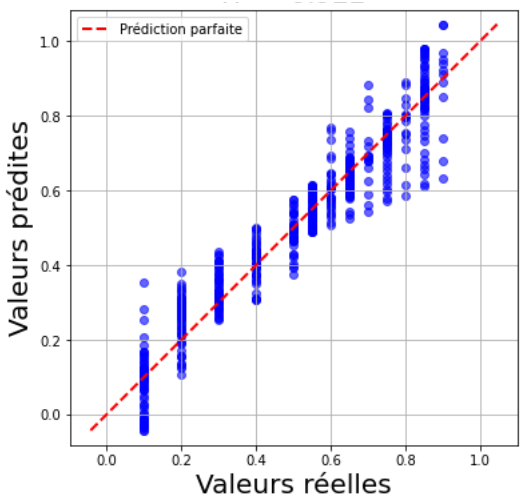
Résultats sur la BDD Rayleigh-Taylor

- Ensemble d'apprentissage 151 échantillons et ensemble de test : 605 échantillons
- SWT : $J = 6$ et nombre d'angles $= 8$.
- ACP : nombre de composantes principales : $K = 26$
- Prédiction de l'Atwood At par régression linéaire :

$$\hat{y} = \boldsymbol{g}^\top \mathbf{x}_S + \beta_0, \qquad \hat{y} = \sum_i g_i \mathrm{x}_{S_i} + \beta_0,$$

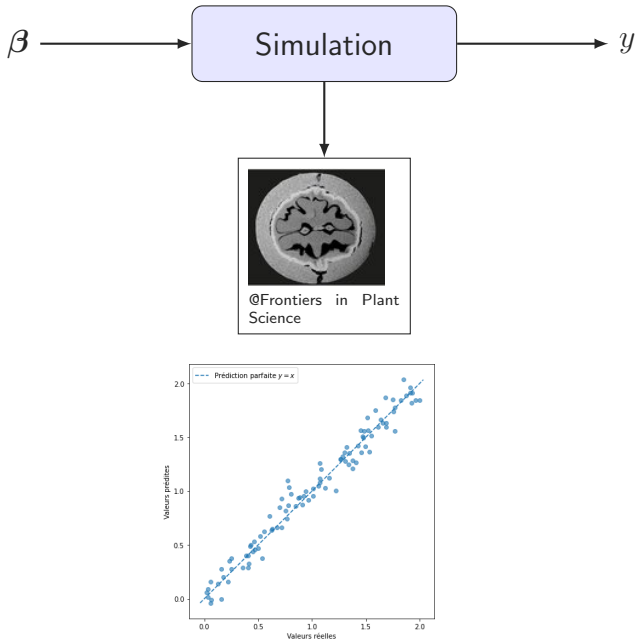
Apprentissage sur les vecteurs propres de l'ACP (pour simplifier on garde les notations des pixels).

- *Rappel : images adimensionnées et temps suffisamment développés.*



Apprentissage avec Scattering Wavelet Transform

Le vrai problème



- Méthode initialement appliquée à un **problème "fermé"**.
- La simulation complète pour obtenir le y final est très **coûteuse** ($\approx$ 30h).
- Il est possible d'obtenir des **images** I **au cours de la simulation ($\approx$ 10h)**.
- Dans le cas d'une **expérience** il est même **impossible** d'accéder à y.
- Ambition : être capable d'entraîner le modèle sur une base de données **simulées** et d'utiliser ce modèle pour des images **expérimentales**.

Conclusions

- La méthode **Scattering Wavelet Transform** permet d'**extraire des structures** stables aux petites translations et déformations.
- Ici, cette représentation est utilisée pour faire de la **régression**.
- Les SWT peuvent être vus comme des **CNN** sauf que les filtres ne sont pas appris ce sont des bases d'ondelettes.
- Permet de répondre à des problèmes avec **beaucoup moins de données** qu'avec un CNN car beaucoup moins de coefficients à apprendre.
- Prochaine étape : remplacer la régression linéaire par un **modèle plus complexe**.
- Pour notre problème initial, on anticipe une future question des physiciens : **à quelles "informations" le modèle est-il sensible** ?
- Difficultés : **grande dimension et entrées corrélées** : partie qui suit est plus exploratoire...

3. Vers l'analyse de sensibilité...

Vers l'analyse de sensibilité...

Cartes de sensibilité locales

On a prédit l'Atwood At par régression linéaire sur les pixels issus du scattering x_{S_i} :

$$\hat{y} = \boldsymbol{g}^\top \mathbf{x}_S + \beta_0, \qquad \hat{y} = \sum_i g_i \mathrm{x}_{S_i} + \beta_0,$$

D'où

$$\nabla_{\mathbf{x}_S} \hat{y} = \mathbf{g} \quad \text{i.e.} \quad g_i = \frac{\partial \hat{y}}{\partial \mathrm{x}_{S_i}}$$

g_i est la sensibilité du modèle au pixel $\mathrm{x}_{S_i}, \forall i = (m, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u})$.

Pour chaque ordre, à quelles parties de l'image, le modèle est-il le plus sensible ?

Vers l'analyse de sensibilité...

Pour chaque ordre, à quelles parties de l'image, le modèle est-il le plus sensible ?

Dans l'espace scattering :

$$\hat{y} \;=\; \beta_0 + \sum_i g_i \mathrm{x}_{S_i}, \qquad g_i = \frac{\partial \hat{y}}{\partial \mathrm{x}_{S_i}}$$

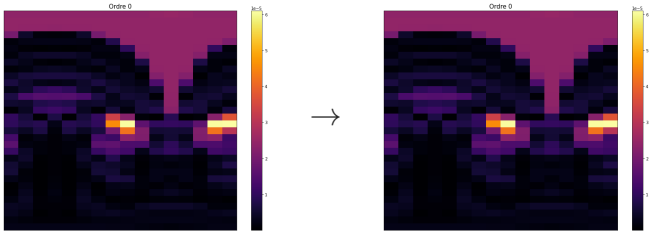
Sensibilité absolue : on définit, pour chaque $i = (m, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u})$

$$c_i^{\mathsf{abs}} \;=\; |g_i|$$

Cartes associées

A l'ordre 0

$$C_0^{\mathsf{abs}}(\mathbf{u}) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}} c^{\mathsf{abs}}_{(0,\boldsymbol{\lambda},\mathbf{u})}.$$



Vers l'analyse de sensibilité...

Pour chaque ordre, à quelles parties de l'image, le modèle est-il le plus sensible ?

Dans l'espace scattering :

$$\hat{y} \;=\; \beta_0 + \sum_i g_i \mathrm{x}_{S_i}, \qquad g_i = \frac{\partial \hat{y}}{\partial \mathrm{x}_{S_i}}$$

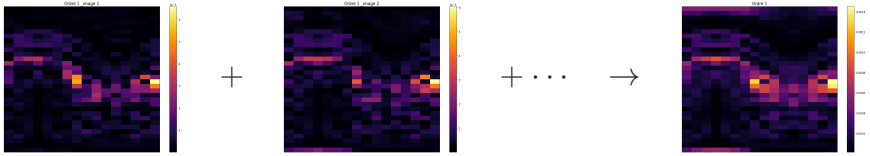
Sensibilité absolue : on définit, pour chaque $i = (m, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u})$

$$c_i^{\mathsf{abs}} \;=\; |g_i|$$

Cartes associées

A l'ordre 1

$$C_1^{\mathsf{abs}}(\mathbf{u}) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}} c^{\mathsf{abs}}_{(1,\boldsymbol{\lambda},\mathbf{u})}.$$



Vers l'analyse de sensibilité...

Pour chaque ordre, à quelles parties de l'image, le modèle est-il le plus sensible ?

Dans l'espace scattering :

$$\hat{y} \;=\; \beta_0 + \sum_i g_i \mathrm{x}_{S_i}, \qquad g_i = \frac{\partial \hat{y}}{\partial \mathrm{x}_{S_i}}$$

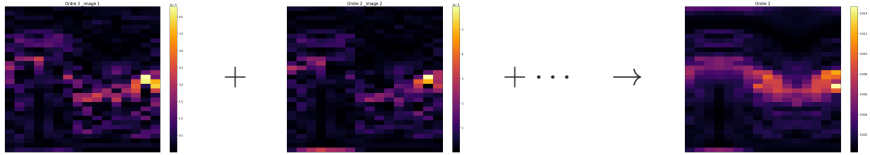
Sensibilité absolue : on définit, pour chaque $i = (m, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u})$

$$c_i^{\mathsf{abs}} \;=\; |g_i|$$

Cartes associées

A l'ordre 2

$$C_2^{\mathsf{abs}}(\mathbf{u}) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}} c^{\mathsf{abs}}_{(2,\boldsymbol{\lambda},\mathbf{u})}.$$



Vers l'analyse de sensibilité...

Résultats



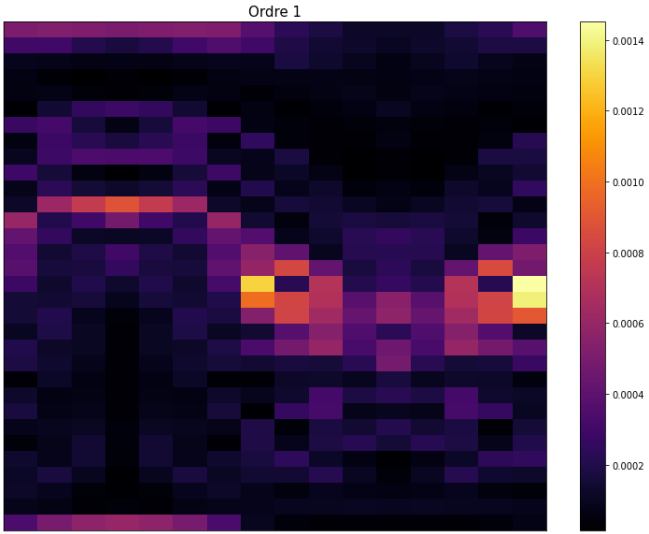
- Choix de conserver $J = 4$ car $J = 6$ donne des cartes trop grossières.

Ordre 0 :

- Zone la plus importante la structure de l'instabilité.

Vers l'analyse de sensibilité...

Résultats

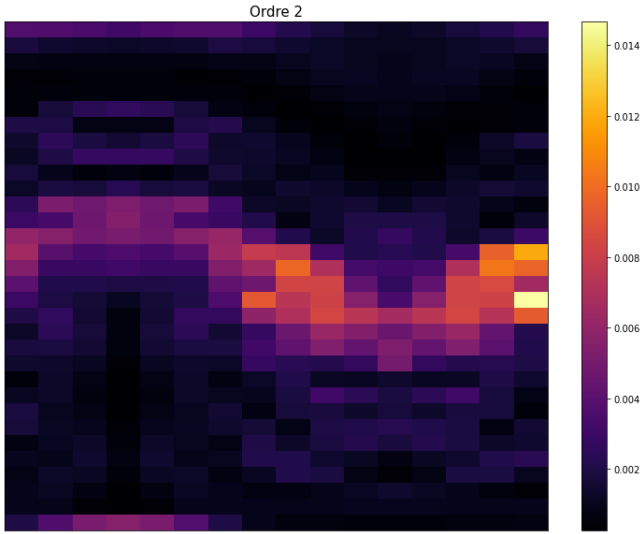


- Choix de conserver $J = 4$ car $J = 6$ donne des cartes trop grossières.

  Ordre 1 :
- Zone la plus importante l'interface

Vers l'analyse de sensibilité...

Résultats



- Choix de conserver $J = 4$ car $J = 6$ donne des cartes trop grossières.

Ordre 2 :

- Zone la plus importante l'interface

Perspectives

- Attention à l'interprétation d'indices de sensibilité locaux en très grande dimension ($\approx 10^6$) et sur des entrées corrélées.
- Les cartes dépendent de la qualité de prédiction du modèle.
- Si la question est **quelles parties de l'image expliquent la variabilité de l'Atwood ?** $\rightarrow$ cartes de HSIC croisées avec des cartes de p-valeurs ajustées (travaux avec C. Cannamela).
- Aujourd'hui question : à quelles parties de l'image le modèle est-il le plus sensible ?

  $\rightarrow$ Travaux futurs identifier les fréquences et les angles auquel le modèle est le plus sensible
  $\rightarrow$ analyse physique.

- Comment expliquer la variabilité de y à partir du modèle ? (Décomposition de la variance SRC, comparaison avec les indices de Shapley ?)
- Quelle partie de l'image a mené à cette prédiction ? Analyse locale d'une image $g_i(s_i(x) - \mu_i)$? ($\rightarrow$ Gradcam)
- Quid de ces pistes lorsque le métamodèle est plus complexe ?

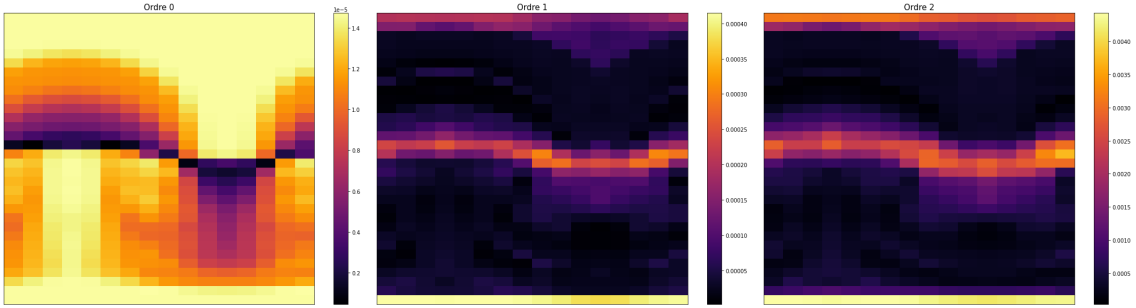
Références

[Bruna, 2013] J. Bruna, S. Mallat - Invariant scattering convolution networks. IEEE transactons on pattern analysis and machine intelligence 35 (8), 1872-1886, 2013.

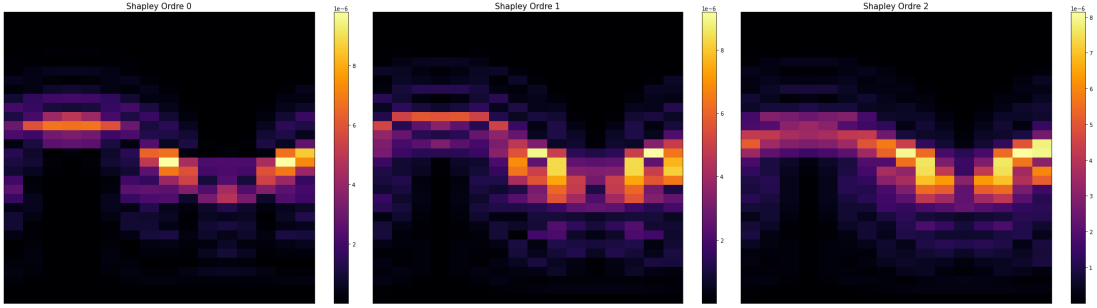
[Hirn, 2017] M. Hirn, S. Mallat, N. Poilvert - Wavelet scattering regression of quantum chemical energies. Multiscale Modeling and Simulation 2017 .

[Thévenin, 2024] S. Thévenin. Contribution of machine learning to the modeling of turbulent mixing. Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay. theses.fr/2024UPAST126

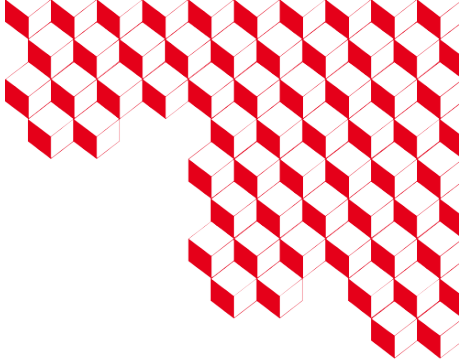
Autres résultats : sans la normalisation



Autres résultats : Shapley







C. Haberstich
CEA DAM Île-de-France
Bruyères-le-Châtel
91297 Arpajon cedex
cecile.haberstich@cea.fr