

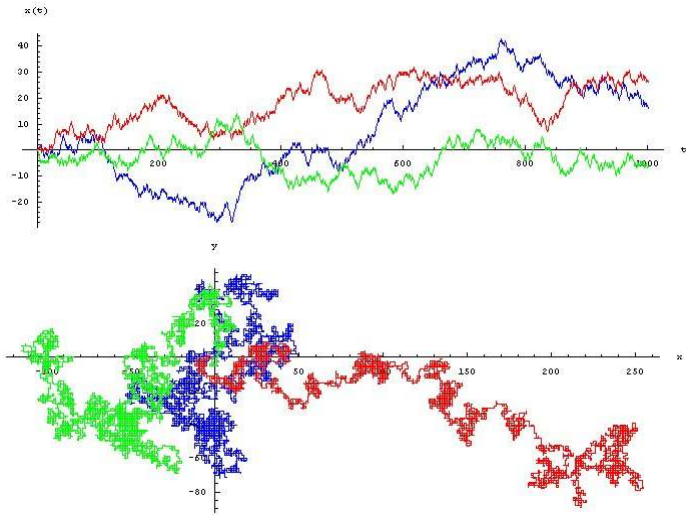
Régularité de processus aléatoires

Erick Herbin

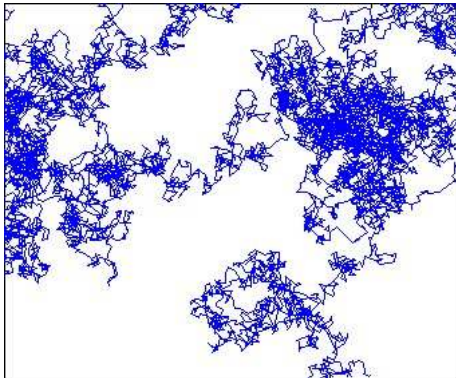
École Centrale Paris

Journées du GDR MASCOT NUM
IHP 19 mars 2009

Marche aléatoire sur \mathbb{Z} et \mathbb{Z}^2



Marche aléatoire simple sur $\epsilon\mathbb{Z}^2$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$



L'approche par le bruit blanc

Le **bruit blanc** sur \mathbb{R} est défini comme le processus gaussien $\mathbb{W} = \{\mathbb{W}(A); A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ de moyenne nulle et de fonction de covariances $\Sigma(A, B) = \lambda(A \cap B)$.

L'approche par le bruit blanc

Le **bruit blanc** sur \mathbb{R} est défini comme le processus gaussien $\mathbb{W} = \{\mathbb{W}(A); A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ de moyenne nulle et de fonction de covariances $\Sigma(A, B) = \lambda(A \cap B)$.

- (i.) Pour tous $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ disjoints, $\mathbb{W}(A)$ et $\mathbb{W}(B)$ sont indépendants.

L'approche par le bruit blanc

Le **bruit blanc** sur \mathbb{R} est défini comme le processus gaussien $\mathbb{W} = \{\mathbb{W}(A); A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ de moyenne nulle et de fonction de covariances $\Sigma(A, B) = \lambda(A \cap B)$.

- (i.) Pour tous $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ disjoints, $\mathbb{W}(A)$ et $\mathbb{W}(B)$ sont indépendants.
- (ii.) Pour tous $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
 $\mathbb{W}(A \cup B) = \mathbb{W}(A) + \mathbb{W}(B) - \mathbb{W}(A \cap B)$ p.s.
- (iii.) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'ensembles de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ disjoints deux à deux et telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < \infty$, alors on a

$$\mathbb{W} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{W}(A_n) \quad \text{p.s.}$$

Le processus isonormal

Le **processus isonormal** de \mathbb{R} est défini comme le processus gaussien $W = \{W(f); f \in L^2(\mathbb{R})\}$ de moyenne nulle et de fonction de covariances

$$\forall h_1, h_2 \in L^2(\mathbb{R}); \quad E[W(h_1)W(h_2)] = \int_{\mathbb{R}} h_1(u)h_2(u) du.$$

De plus, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et toutes $f, g \in L^2(\mathbb{R})$,

$$W(\alpha f + \beta g) = \alpha W(f) + \beta W(g) \quad \text{p.s.}$$

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); \quad W(A) = W(\mathbb{1}_A).$$

Mouvement brownien

Le **mouvement brownien** est un processus gaussien $B = \{B_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ de moyenne nulle et de fonction de covariances

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+; \quad E[B_s B_t] = s \wedge t.$$

Mouvement brownien

Le **mouvement brownien** est un processus gaussien $B = \{B_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ de moyenne nulle et de fonction de covariances

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+; \quad E[B_s B_t] = s \wedge t.$$

- Représentation de Centsov :
 $B_t = \mathbb{W}([0, t]) = W(\mathbb{1}_{[0,t]}) = \int_{[0,t]} \mathbb{W}(ds).$
- Intégrale de Wiener : pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, on peut définir

$$\int f(s) dB_s = \int f(s) \mathbb{W}(ds) = W(f)$$
$$\int_{[0,t]} f(s) dB_s = \int_{[0,t]} f(s) \mathbb{W}(ds) = W(\mathbb{1}_{[0,t]} f).$$

Premières propriétés

- Autosimilarité : $\forall a > 0$,

$$\{B_{at}; t \in \mathbb{R}_+\} \stackrel{(d)}{=} \{a^{1/2} B_t; t \in \mathbb{R}_+\}.$$

- Indépendance des accroissements : $\forall 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, les v.a. $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ sont indépendantes.
- Stationnarité des accroissements : Plus précisément, $\forall s, t \in \mathbb{R}_+$ tels que $s < t$, la loi de la v.a. $B_t - B_s$ est gaussienne centrée de variance $t - s$.
- Continuité : Thm. de Kolmogorov-Centsov
- Autres : martingale, processus de Markov, variations infinies sur tout intervalle, ...

Mouvement brownien fractionnaire (Mandelbrot - Van Ness 1968)

- B^H est un processus gaussien centré de covariance

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+; \quad E \left[B_s^H B_t^H \right] = \frac{1}{2} \left[s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H} \right]$$

- Représentation à moyenne mobile

$$B_t^H = \int_{-\infty}^0 \left[(t - u)^{H-\frac{1}{2}} - (-u)^{H-\frac{1}{2}} \right] \cdot \mathbb{W}(du) \\ + \int_0^t (t - u)^{H-\frac{1}{2}} \cdot \mathbb{W}(du)$$

- Représentation harmonisable

$$B_t^H = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{H+\frac{1}{2}}} \cdot \widehat{\mathbb{W}}(d\xi)$$

Propriétés fractales

- Stationnarité des accroissements

$$\left\{ B_{t+h}^H - B_h^H; t \in \mathbb{R}_+ \right\} \stackrel{(d)}{=} \left\{ B_t^H - B_0^H; t \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

- Autosimilarité

$$\left\{ B_{at}^H; t \in \mathbb{R}_+ \right\} \stackrel{(d)}{=} \left\{ a^H B_t^H; t \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

Propriétés fractales

- Stationnarité des accroissements

$$\left\{ B_{t+h}^H - B_h^H; t \in \mathbb{R}_+ \right\} \stackrel{(d)}{=} \left\{ B_t^H - B_0^H; t \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

- Autosimilarité

$$\left\{ B_{at}^H; t \in \mathbb{R}_+ \right\} \stackrel{(d)}{=} \left\{ a^H B_t^H; t \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

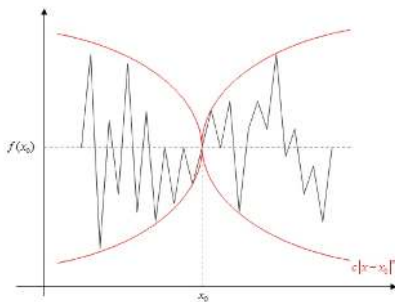
Caractérisation

Le mouvement brownien fractionnaire est l'unique processus gaussien autosimilaire et à accroissements stationnaires.

Régularité höldérienne

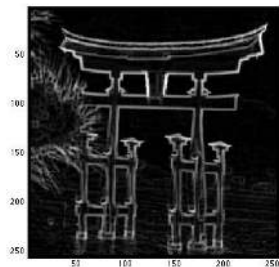
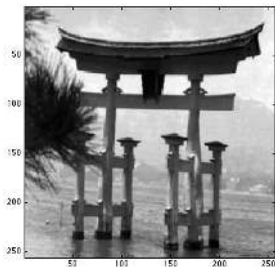
Exposant de Hölder ponctuel

- Comparaison de $f(x) - f(x_0)$ avec $|x - x_0|^\alpha$
- Plus $\alpha(x_0)$ est grand, plus le signal est lisse et plus $\alpha(x_0)$ est petit, plus le signal est irrégulier

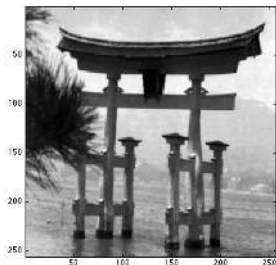


Exposant de Hölder ponctuel

Exemple de détection de contour



Exposant de Hölder ponctuel



Exemple d'interpolation

- bicubique
- avec régularité



Régularité höldérienne du fBm

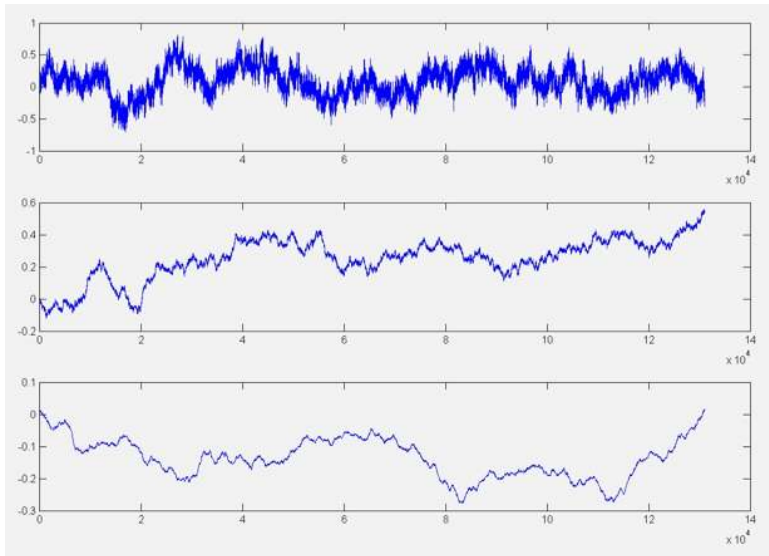
$$\tilde{\alpha}_{B^H}(t_0) = \sup \left\{ \alpha : \limsup_{\rho \rightarrow 0} \sup_{s, t \in B(t_0, \rho)} \frac{|B_t^H - B_s^H|}{|t - s|^\alpha} < \infty \right\}$$

$$\alpha_{B^H}(t_0) = \sup \left\{ \alpha : \limsup_{\rho \rightarrow 0} \sup_{s, t \in B(t_0, \rho)} \frac{|B_t^H - B_s^H|}{\rho^\alpha} < \infty \right\}$$

Les exposants de Hölder ponctuel et local vérifient

$$\alpha(t_0) = \tilde{\alpha}(t_0) = H \quad \text{p.s.} \quad \forall t_0$$

Trajectoires de fBm pour $H = 0.2$, $H = 0.5$ et $H = 0.7$



2 définitions du mouvement brownien multifractionnaire

- Représentation à moyenne mobile (Peltier et Levy-Vehel 1995)

$$X_t = \int_{-\infty}^0 \left[(t-u)^{H(t)-\frac{1}{2}} - (-u)^{H(t)-\frac{1}{2}} \right] \cdot \mathbb{W}(du) \\ + \int_0^t (t-u)^{H(t)-\frac{1}{2}} \cdot \mathbb{W}(du)$$

où $H : \mathbb{R}_+ \rightarrow]0, 1[$ est höldérienne.

- Représentation harmonisable (Benassi, Jaffard et Roux 1998)

$$X_t = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{H(t)+\frac{1}{2}}} \cdot \widehat{\mathbb{W}}(d\xi)$$

Définitions équivalentes à une fonction déterministe multiplicative près.

Autres représentations du mBm

- Le mBm est un processus gaussien de moyenne nulle et de fonction de covariances

$$E[X_s X_t] = D(H(s) + H(t)) \left[|s|^{H(s)+H(t)} + |t|^{H(s)+H(t)} - |t-s|^{H(s)+H(t)} \right]$$

où D est une fonction déterministe connue.

-

$$X_t = \int_{\mathbb{R}} \left[|t-u|^{H(t)-\frac{1}{2}} - |u|^{H(t)-\frac{1}{2}} \right] \mathbb{W}(du)$$

Régularité höldérienne du mBm

L'exposant de Hölder local de X en t_0 est

$$\tilde{\alpha}_X(t_0) = \tilde{\alpha}_H(t_0) \wedge H(t_0) \quad \text{p.s.}$$

et l'exposant de Hölder ponctuel de X en t_0 est

$$\alpha(t_0) = \alpha_H(t_0) \wedge H(t_0) \quad \text{p.s.}$$

- Si H est régulière, la régularité de X en t_0 vaut $H(t_0)$
- Si H est irrégulière, la régularité de X est celle de H

Propriétés fractales

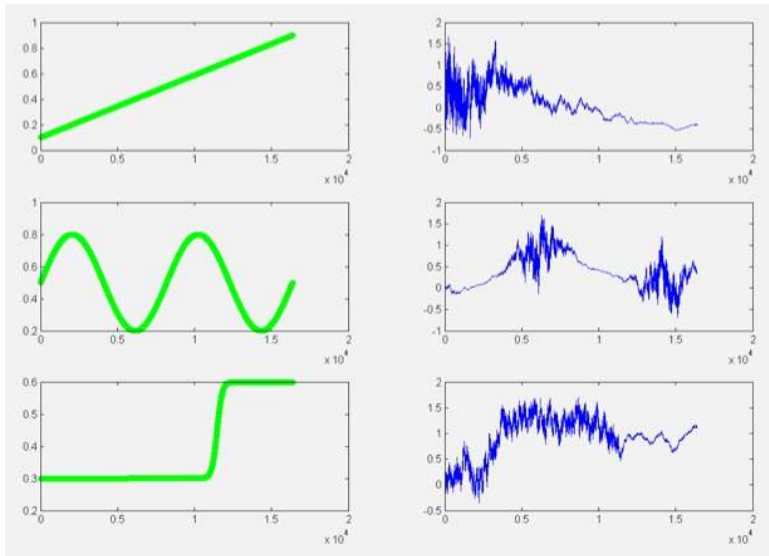
Autosimilarité asymptotique locale

Pour $t_0 \in \mathbb{R}_+$, la loi du processus

$$Y^\alpha(\rho) = \left\{ Y_u^\alpha(\rho) = \frac{X_{t_0+\rho u} - X_{t_0}}{\rho^\alpha}; u \in \mathbb{R}_+^N \right\}$$

converge faiblement lorsque $\rho \rightarrow 0$ si $\alpha = H(t_0)$ et $H(t_0) < \alpha_H(t_0)$
Alors, la loi limite est celle d'un fBm de paramètre $H(t_0)$.

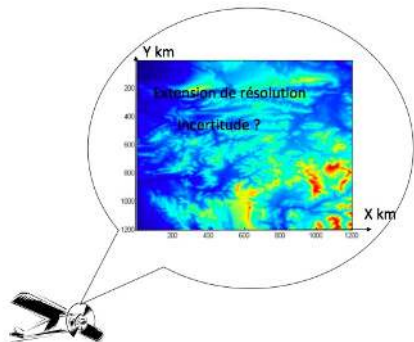
Trajectoires de mBm pour différentes fonctions de régularité



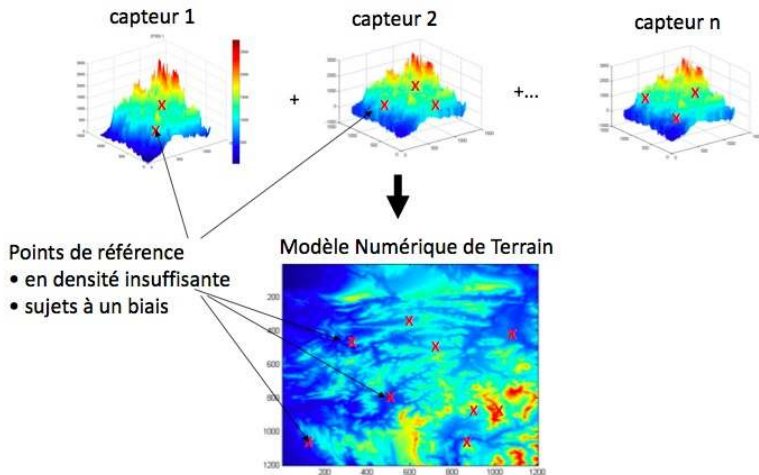
Utilisation en cartographie

L'incertitude en (x, y, z) provient

- de l'échantillonnage discret
- des erreurs de mesure (bruit)
- des paramètres de conversion entre systèmes de coordonnées



Fusion de MNT



Modèle probabiliste des erreurs

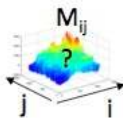
Deux représentations de terrain

- 1 Un MNT de petite résolution, dont les données sont sûres
 - Grille de référence
- 2 Un MNT de bonne résolution, moins précis mais avec une bonne dynamique
 - Représentativité des fluctuations

Modèle probabiliste des erreurs

Deux représentations de terrain

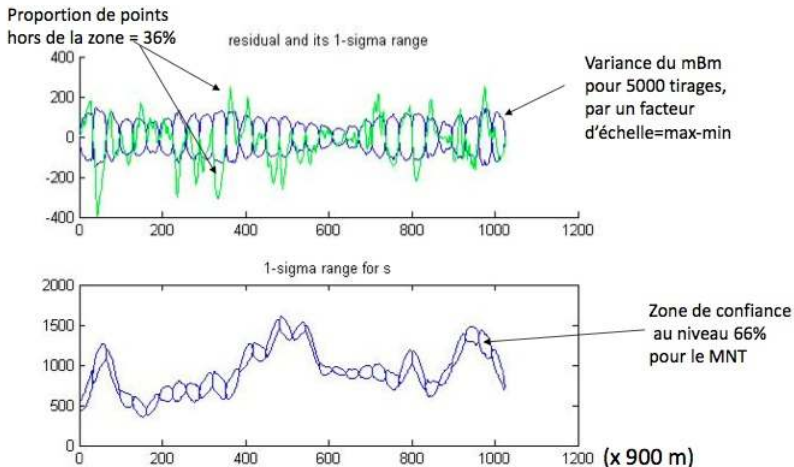
- 1 Un MNT de petite résolution, dont les données sont sûres
 - Grille de référence
- 2 Un MNT de bonne résolution, moins précis mais avec une bonne dynamique
 - Représentativité des fluctuations



Processus de fusion

- On cherche à "interpoler" entre les points du 1er, en utilisant la régularité du 2nd
- On utilise un modèle probabiliste d'erreurs superposé à une interpolation lisse

Utilisation d'un pont brownien multifractionnaire



Régularité locale et intégration / dérivation

Constat

α_f n'est pas stable sous l'action d'opérateur intégro-différentiels

Exemple :

$$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{où } \gamma > \delta + 1 \text{ et } \delta > 0.$$
$$x \mapsto x^\gamma \sin \frac{1}{x^\delta}$$

On a

$$\begin{cases} \alpha_f(0) = \gamma \\ f'(x) \sim x^{\gamma-\delta-1} \cos \frac{1}{x^\delta} \quad \mathcal{V}(0) \end{cases} \Rightarrow \alpha_{f'}(0) = \gamma - \delta - 1$$

— Comment prédire la valeur de $\alpha_{f'}$ à partir de α_f ?

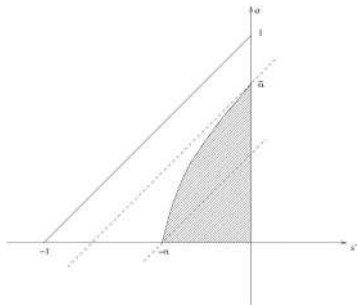
\Rightarrow **analyse 2-microlocale** (J.M. Bony, théorie des EDP).

Définition des espaces $2-\mu$ (Kolwankar - Lévy Véhel - Seuret)

Dans le triangle

$$\left. \begin{array}{l} 0 < s + s' < 1 \\ s < 1 \\ s' < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 < \sigma < 1 + s' \\ -1 < s' < 0 \end{array} \right.$$

où $\sigma = s + s'$,



$$\varphi \in C_{t_0}^{s, s'} \Leftrightarrow \limsup_{\rho \rightarrow 0} \sup_{t, u \in B(t_0, \rho)} \frac{|\varphi(t) - \varphi(u)|}{\|t - u\|^{s+s'} \rho^{-s'}} < \infty$$

Propriétés de $C_{t_0}^{s,s'}$

- $\{(s, s') : \varphi \in C_{t_0}^{s,s'}\}$ est convexe
- l'application

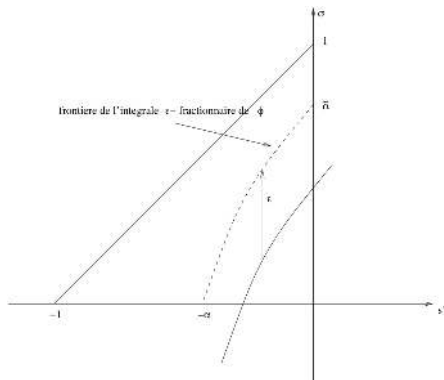
$$s' \mapsto \sigma_{t_0}(s') = \sup \left\{ \sigma : \limsup_{\rho \rightarrow 0} \sup_{t, u \in B(t_0, \rho)} \frac{|\varphi(t) - \varphi(u)|}{\|t - u\|^\sigma \rho^{-s'}} < \infty \right\}$$

est continue

-

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}_+^N, \forall s' < 0; \quad \tilde{\alpha}(t_0) \leq \sigma_{t_0}(s') - s' \leq \alpha(t_0)$$

Exemple : frontière 2- μ l des dérivées et intégrations fractionnaires de φ ?



— L'exposant ponctuel de φ' peut être obtenue à partir de la frontière 2- μ l de φ .

Cas stochastique (H. - Lévy Véhel 2008)

Pour tout $X = \{X_t; t \in \mathbb{R}_+^N\}$ continu, on définit **les exposants de Hölder local et ponctuel** en $t_0 \in \mathbb{R}_+^N$

$$\tilde{\alpha}_X(t_0) = \sup \left\{ \alpha : \limsup_{\rho \rightarrow 0} \sup_{s, t \in B(t_0, \rho)} \frac{|X_t - X_s|}{\|t - s\|^\alpha} < \infty \right\}$$
$$\alpha_X(t_0) = \sup \left\{ \alpha : \limsup_{\rho \rightarrow 0} \sup_{s, t \in B(t_0, \rho)} \frac{|X_t - X_s|}{\rho^\alpha} < \infty \right\}$$

Cas stochastique (H. - Lévy Véhel 2008)

Pour tout $X = \{X_t; t \in \mathbb{R}_+^N\}$ continu, on définit **les exposants de Hölder local et ponctuel** en $t_0 \in \mathbb{R}_+^N$

$$\tilde{\alpha}_X(t_0) = \sup \left\{ \alpha : \limsup_{\rho \rightarrow 0} \sup_{s, t \in B(t_0, \rho)} \frac{|X_t - X_s|}{\|t - s\|^\alpha} < \infty \right\}$$
$$\alpha_X(t_0) = \sup \left\{ \alpha : \limsup_{\rho \rightarrow 0} \sup_{s, t \in B(t_0, \rho)} \frac{|X_t - X_s|}{\rho^\alpha} < \infty \right\}$$

et **l'exposant 2-microlocal** ($s'; \sigma_{t_0}(s')$) en $t_0 \in \mathbb{R}_+^N$

$$\sigma_{t_0}(s') = \sup \left\{ \sigma; \limsup_{\rho \rightarrow 0} \sup_{s, t \in B(t_0, \rho)} \frac{|X_t - X_s|}{\|t - s\|^\sigma \rho^{-s'}} < \infty \right\}$$

Cas stochastique (H. - Lévy Véhel 2008)

Pour tout $X = \{X_t; t \in \mathbb{R}_+^N\}$ continu, on définit **les exposants de Hölder local et ponctuel** en $t_0 \in \mathbb{R}_+^N$

$$\tilde{\alpha}_X(t_0) = \sup \left\{ \alpha : \limsup_{\rho \rightarrow 0} \sup_{s, t \in B(t_0, \rho)} \frac{|X_t - X_s|}{\|t - s\|^\alpha} < \infty \right\}$$
$$\alpha_X(t_0) = \sup \left\{ \alpha : \limsup_{\rho \rightarrow 0} \sup_{s, t \in B(t_0, \rho)} \frac{|X_t - X_s|}{\rho^\alpha} < \infty \right\}$$

et **l'exposant 2-microlocal** ($s'; \sigma_{t_0}(s')$) en $t_0 \in \mathbb{R}_+^N$

$$\sigma_{t_0}(s') = \sup \left\{ \sigma; \limsup_{\rho \rightarrow 0} \sup_{s, t \in B(t_0, \rho)} \frac{|X_t - X_s|}{\|t - s\|^\sigma \rho^{-s'}} < \infty \right\}$$

$\Rightarrow \tilde{\alpha}_X(t_0)$, $\alpha_X(t_0)$ et $\sigma_{t_0}(s')$ sont des variables aléatoires. Sous certaines hypothèses, ces exposants ont des valeurs presque sûres.

Minoration de la frontière 2-microlocale

Prop :

Soit $X = \{X_t; t \in \mathbb{R}_+^N\}$ un processus cadlag. Si pour t_0 , il existe $C > 0$ et $\rho_0 > 0$ telles que

$$\forall 0 < \rho < \rho_0, \forall t, u \in B(t_0, \rho); \quad E[X_t - X_u]^\eta \leq C \|t - u\|^{N+\mu} \rho^{-\nu}$$

avec $\nu > 0$, $\mu > 0$ et $\nu > 0$.

Alors,

$$\sigma_{t_0} \left(\frac{\nu}{\eta} \right) \geq \frac{\mu}{\eta} \quad \text{p.s.}$$

Frontière 2-microlocale de processus gaussiens

Soit $X = \{X_t; t \in \mathbb{R}_+^N\}$ un processus gaussien centré continu.
On définit

- l'exposant de Hölder local **déterministe**

$$\tilde{\alpha}(t_0) = \sup \left\{ \sigma; \limsup_{\rho \rightarrow 0} \sup_{s, t \in B(t_0, \rho)} \frac{E[X_t - X_s]^2}{\|t - s\|^{2\sigma}} < \infty \right\}$$

Frontière 2-microlocale de processus gaussiens

Soit $X = \{X_t; t \in \mathbb{R}_+^N\}$ un processus gaussien centré continu.
On définit

- l'exposant de Hölder local **déterministe**

$$\tilde{\alpha}(t_0) = \sup \left\{ \sigma; \limsup_{\rho \rightarrow 0} \sup_{s, t \in B(t_0, \rho)} \frac{E[X_t - X_s]^2}{\|t - s\|^{2\sigma}} < \infty \right\}$$

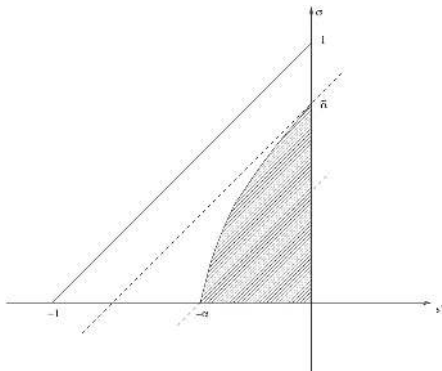
- la fonction 2-microlocale **déterministe** $s' \mapsto \sigma_{t_0}(s')$

$$\sigma_{t_0}(s') = \sup \left\{ \sigma; \limsup_{\rho \rightarrow 0} \sup_{s, t \in B(t_0, \rho)} \frac{E[X_t - X_s]^2}{\|t - s\|^{2\sigma} \rho^{-2s'}} < \infty \right\}$$

Frontière 2- μ presque sûre en un point

Thm :

Soit $X = \{X_t; t \in \mathbb{R}_+^N\}$ un processus gaussien centré continu.
 $\forall t_0 \in \mathbb{R}_+^N$, la frontière 2- μ en t_0 de la trajectoire de X est presque sûrement égale au graphe de $s' \mapsto \sigma_{t_0}(s')$.



Frontière 2- μ presque sûre uniformément sur \mathbb{R}_+^N

Thm :

Soit $X = \{X_t; t \in \mathbb{R}_+^N\}$ un processus gaussien centré continu.
Presque sûrement,

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}_+^N; \quad \liminf_{u \rightarrow t_0} \tilde{\alpha}(u) \leq \tilde{\alpha}_X(t_0) \leq \limsup_{u \rightarrow t_0} \tilde{\alpha}(u)$$

En conséquence, si $t_0 \mapsto \tilde{\alpha}(t_0)$ est continue, on a presque sûrement

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}_+^N; \quad \tilde{\alpha}_X(t_0) = \tilde{\alpha}(t_0)$$

Corollaire :

sous les mêmes hypothèses, presque sûrement,

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}_+^N, \forall s' < 0; \quad \tilde{\alpha}(t_0) + s' \leq \sigma_{t_0}(s') \leq \limsup_{u \rightarrow t_0} \sigma_u(s')$$

Cas académique : fBm

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+; \quad E \left[B_t^H - B_s^H \right]^2 = |t - s|^{2H}$$

Cas académique : fBm

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+; \quad E \left[B_t^H - B_s^H \right]^2 = |t - s|^{2H}$$

Calcul facile :

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(t_0) &= H & \forall t_0 \in \mathbb{R}_+ \\ \sigma_{t_0}(s') &= H + s' & \forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \forall s' < 0 \end{aligned}$$

Cas académique : fBm

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+; \quad E \left[B_t^H - B_s^H \right]^2 = |t - s|^{2H}$$

Calcul facile :

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(t_0) &= H \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}_+ \\ \sigma_{t_0}(s') &= H + s' \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \forall s' < 0 \end{aligned}$$

Presque surement,

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \forall s' < 0; \quad \sigma_{t_0}(s') = H + s'$$

Cas académique : fBm

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+; \quad E \left[B_t^H - B_s^H \right]^2 = |t - s|^{2H}$$

Calcul facile :

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(t_0) &= H \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}_+ \\ \sigma_{t_0}(s') &= H + s' \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \forall s' < 0 \end{aligned}$$

Presque sûrement,

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \forall s' < 0; \quad \sigma_{t_0}(s') = H + s'$$

Conséquence : presque sûrement,

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}_+; \quad \tilde{\alpha}_{B^H}(t_0) = \alpha_{B^H}(t_0) = H$$

⇒ la régularité est constante le long de la trajectoire.

Mouvement brownien multifractionnaire

Equivalent asymptotique de la covariance du mBm ($\rho \rightarrow 0$)

$\forall s, t \in B(t_0, \rho);$

$$E[X_t - X_s]^2 \sim K(t_0) \cdot |t - s|^{2H(t_0)} + L(t_0) \cdot [H(t) - H(s)]^2$$

Mouvement brownien multifractionnaire

Equivalent asymptotique de la covariance du mBm ($\rho \rightarrow 0$)

$$\forall s, t \in B(t_0, \rho);$$

$$E[X_t - X_s]^2 \sim K(t_0) \cdot |t - s|^{2H(t_0)} + L(t_0) \cdot [H(t) - H(s)]^2$$

Questions :

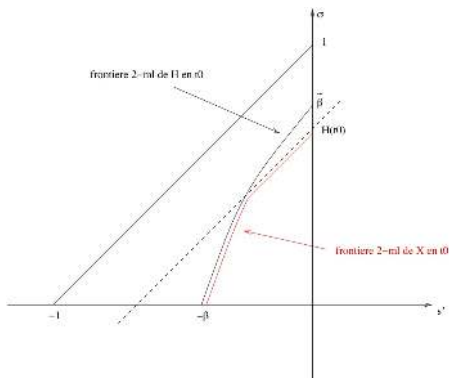
- Peut-on obtenir des valeurs presque sûres des exposants de Hölder, uniformément sur \mathbf{R}_+^N ?
- Quelle est la frontière 2- μ l du mBm ?

Prop :

$\forall t_0 \in \mathbb{R}_+$, la frontière 2- μ l du mBm en t_0 est presque sûrement

$$\forall s' < 0; \quad \sigma_{t_0}(s') = (H(t_0) + s') \wedge \beta_{t_0}(s')$$

où $s' \mapsto \beta_{t_0}(s')$ est la fonction 2-microlocale de H en t_0 .



Résultats presque surs, uniformément sur \mathbb{R}_+^N

Thm :

Si $t \mapsto \tilde{\beta}(t)$ est continue, alors

$$P \left\{ \forall t_0 \in \mathbb{R}_+; \quad \tilde{\alpha}(t_0) = H(t_0) \wedge \tilde{\beta}(t_0) \right\} = 1$$

Rq : Il n'y a pas de résultat similaire pour l'exposant ponctuel.

Thm :

Sous l'hypothèse $\forall t_0 \in \mathbb{R}_+; H(t_0) < \tilde{\beta}(t_0)$, on a

$$P \left\{ \forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \forall s' < 0; \quad \sigma_{t_0}(s') = H(t_0) + s' \right\} = 1$$

Intégrales de Wiener

Thm :

Soit $X = \{X_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ défini par

$$X_t = \int_0^t \eta(u) \cdot dB_u + \psi(t),$$

où η et ψ sont L^2 .

On pose $s' \mapsto \beta_{t_0}(s')$ et $s' \mapsto \gamma_{t_0}(s')$ les frontières $2 - \mu l$ de $\varphi : t \mapsto \int_0^t \eta^2$ et de ψ en t_0 .

Alors,

$$\sigma_{t_0}(s') = \frac{1}{2} \beta_{t_0}(2s') \wedge \gamma_{t_0}(s') \quad \text{p.s.}$$

Intégrales de Wiener

Exemple :

On fixe $\eta(t) = \sqrt{|t - t_0|^\gamma |\sin(|t - t_0|^{-\delta})|}$ et $\psi(t) = 0$.

Intégrales de Wiener

Exemple :

On fixe $\eta(t) = \sqrt{|t - t_0|^\gamma |\sin(|t - t_0|^{-\delta})|}$ et $\psi(t) = 0$.

$$\beta_{t_0}(s') = \frac{1}{\delta + 1} s' + \frac{\gamma}{\delta + 1} + 1 \Rightarrow \sigma_{t_0}(s') = \frac{1}{\delta + 1} s' + \frac{\gamma}{2\delta + 2} + \frac{1}{2} \quad \text{p.s.}$$

Intégrales de Wiener

Exemple :

On fixe $\eta(t) = \sqrt{|t - t_0|^\gamma |\sin(|t - t_0|^{-\delta})|}$ et $\psi(t) = 0$.

$$\beta_{t_0}(s') = \frac{1}{\delta + 1} s' + \frac{\gamma}{\delta + 1} + 1 \Rightarrow \sigma_{t_0}(s') = \frac{1}{\delta + 1} s' + \frac{\gamma}{2\delta + 2} + \frac{1}{2} \quad \text{p.s.}$$

On en déduit

- Exposant de Hölder ponctuel de X en t_0 : $(\gamma + \delta + 1)/2$
- Exposant de Hölder local de X en t_0 : $\gamma/(2 + 2\delta) + 1/2$.

Questions ?

- Régularité locale dans les modèles de substitution ?
- Intégration stochastique par rapport au mBm ?
- EDS dirigée par un processus multifractionnaire ?
- Quels phénomènes fluctuants sont-ils bien représentés par des processus multifractionnaires ?
- Processus Auto-Régulé Multifractionnaire ?