

# Analyse de sensibilité et estimation de paramètres pour la modélisation hydrologique

*Potentiel et limitations des méthodes variationnelles*

W. Castaings\*

\*Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse  
*travaux effectués* au Laboratoire Jean Kuntzmann (MOISE, Grenoble)

sous la direction de  
F-X Le Dimet (PR-UJF, LJK), D. Dartus (PR-INPT,IMFT), G-M Saulnier (CR-CNRS,EDYTEM)

# Plan de l'exposé

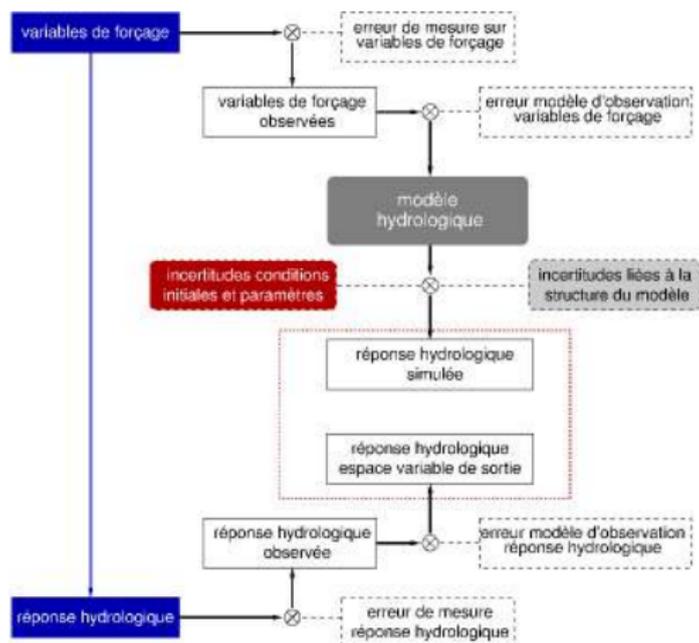
- 1 Introduction
- 2 Cadre théorique et implémentation pratique
- 3 Analyse de sensibilité différentielle
- 4 Estimation des paramètres par méthode de descente
- 5 Conclusions

# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Cadre théorique et implémentation pratique
- 3 Analyse de sensibilité différentielle
- 4 Estimation des paramètres par méthode de descente
- 5 Conclusions

# Comprendre, analyser et réduire les incertitudes

Modèles imparfaits contraints et forcés par des données incertaines



- **L'analyse de sensibilité, l'assimilation de données et la propagation d'incertitudes** sont des problématiques clés et largement inter-dépendantes

# Cadre d'étude et objectifs visés

## Objectif

Évaluation du **potentiel** et des **limitations** des méthodes variationnelles pour la modélisation hydrologique

## Méthodes variationnelles

- **Formulation théorique** et **approximation** numérique de nombreux problèmes liés à la **modélisation** des processus **physiques**
- Principales applications en sciences de l'environnement: **assimilation de données**, **analyse de sensibilité**, modes d'amplification des erreurs pour la **prévision d'ensemble**, stratégies d'**observation adaptatives**

## Problématiques explorées

- **Analyse de sensibilité**
- **Estimation de paramètres** par méthode de **descente**

# Approche méthodologique

## Objectif

Évaluation du **potentiel** et des **limitations** des méthodes variationnelles pour la modélisation hydrologique

## Modèles hydrologiques

- Choix de structures de modèles simples et très courantes
- Opposition en termes de **paradigme de la modélisation** (approches réductionniste et systémique)
- Opposition en termes de **fonctionnement hydrologique** (ruissellement par dépassement de la capacité d'infiltration ou sur zones contributives d'aire variable)

# MARINE I

## Modélisation de l'Anticipation du Ruissellement et des Inondations pour des événements Extrêmes

- Modèle de prévention/prévision des **crues éclair** développé au sein de l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT)
- Approche **réductionniste** représentant le ruissellement par refus d'infiltration (*Estupina-Borrell, Dartus et al, 2004*)
- Représentation **mécaniste** basée sur équations de conservation à l'échelle de la parcelle (de 0.25 à 4 hectares)
- Modèle **événementiel** et spatialement **distribué**

### Ruissellement de surface

#### Onde Cinématique

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{s^{1/2}}{n} \frac{\partial uh^{5/3}}{\partial x} = r - i$$

### Infiltration

#### Green & Ampt

$$i = K \left( \frac{\psi \eta (1 - \theta)}{I} + 1 \right)$$

# MARINE II

## Modélisation de l'Anticipation du Ruissellement et des Inondations pour des événements Extrêmes

- Application à un sous-bassin du Thoré amont ( $25\text{km}^2$ ) soumis à des pluies diluviennes en Novembre 1999 (événement non jaugé).



- pluies estimées par re-analyse des observations radar-précipitations du réseau ARAMIS de Météo France

# Modèles basés sur le concept TOPMODEL I

## TOPgraphy based watershed MODEL

- Concept initié par les Universités de Leeds & Lancaster, largement enrichi par la communauté des hydrologues, notamment au LTHE, maintenant à EDYTEM
- Approche **systemique** décrivant le ruissellement sur zones contributives saturées
- Équation de conservation à l'échelle du bassin versant, notion d'**indice de similarité hydrologique** (*Beven & Kirkby, 1979*), approche **semi-distribuée**
- Représentation **pragmatique** des **écoulements latéraux de sub-surface** ( $T_0$ ,  $m$ ) sans description explicite de la géométrie et du profil d'humidité

## TOPSIMPL

- Modèle de crue **événementiel** (*Saulnier et al, 2004*)
- Transfert du **ruissellement** par H.U. (identifié par la DPFT de *Duband et al, 1993*)
- **Interception** et **évapotranspiration** par modèle réservoir (*Inter, SrMax*)

# Modèles basés sur le concept TOPMODEL II

## TOPgraphy based watershed MODEL

- Concept initié par les Universités de Leeds & Lancaster, largement enrichi par la communauté des hydrologues, notamment au LTHE, maintenant à EDYTEM
- Approche **systemique** décrivant le ruissellement sur zones contributives saturées
- Équation de conservation à l'échelle du bassin versant, notion d'**indice de similarité hydrologique** (*Beven & Kirkby, 1979*), approche **semi-distribuée**
- Représentation **pragmatique** des **écoulements latéraux de sub-surface** ( $T_0$ ,  $m$ ) sans description explicite de la géométrie et du profil d'humidité

## TOPAMMA

- Modèle **continu** de bilan hydrologique (*Lelay et al, 2005*)
- Transfert du **ruissellement** par H.U. géomorphologique ( $V_h$ ,  $V_r$ )
- Neutralisation de la pluie et reprise évaporatoire à partir de l'**évapotranspiration** potentielle (ETP)
- Limitation de la **zone active** pour les écoulements latéraux de subsurface ( $d_0$ )
- **Percolation** vers une nappe de socle non connectée ( $K_{0v}$ )

# Modèles basés sur le concept TOPMODEL III

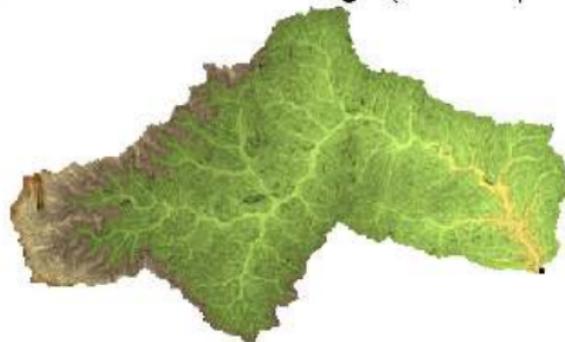
## TOPgraphy based watershed MODEL

- TOPSIMPL sur Vogüe (640km<sup>2</sup>)



- 22 évènements observés  
*précipitations obtenues par krigeage de données ponctuelles, débits à l'exutoire*

- TOPAMMA sur la Donga (586km<sup>2</sup>)



- Chronique de 5 ans d'observations  
*précipitations, débit, variables climatiques permettant l'estimation de l'évapotranspiration potentielle*

# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Cadre théorique et implémentation pratique**
- 3 Analyse de sensibilité différentielle
- 4 Estimation des paramètres par méthode de descente
- 5 Conclusions

# Approche variationnelle

Cadre déterministe pour l'analyse et le contrôle de systèmes naturels ou industriels

## Modèle direct

- $x$  variable d'état
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  paramètres
- Une fois  $\alpha$  fixé,  $x$  est déterminé de façon unique par

$$M(x, \alpha) = 0$$

## Fonction réponse

- $F$ , fonction scalaire de la variable d'état  $x$  (i.e  $x(\alpha)$ ) et des paramètres  $\alpha$

$$F(x, \alpha)$$

- Sensibilité locale (en  $\bar{\alpha}$ ) de  $F$  aux paramètres  $\alpha$ : gradient de  $F$  par rapport à  $\alpha$

$$[\nabla_{\alpha} F_{\bar{\alpha}}]^T = \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial \alpha_n} \right) \right]_{\bar{\alpha}}$$

# Approximation des dérivées

## Approximation différences finies

$$\text{Ex.} \quad \left[ \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \right]_{\bar{\alpha}} \approx \frac{F(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_i + \varepsilon, \dots, \bar{\alpha}_n) - F(\bar{\alpha})}{\varepsilon}$$

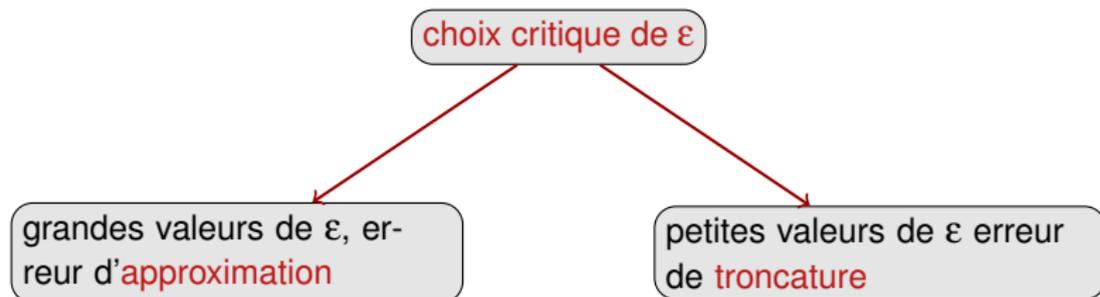
- plusieurs évaluations du modèle, i.e. implémentation évidente

# Approximation des dérivées

## Approximation différences finies

$$\text{Ex. } \left[ \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \right]_{\bar{\alpha}} \approx \frac{F(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_i + \varepsilon, \dots, \bar{\alpha}_n) - F(\bar{\alpha})}{\varepsilon}$$

- plusieurs évaluations du modèle, i.e. implémentation évidente



# Approximation des dérivées

## Approximation différences finies

$$\text{Ex. } \left[ \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \right]_{\bar{\alpha}} \approx \frac{F(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_i + \varepsilon, \dots, \bar{\alpha}_n) - F(\bar{\alpha})}{\varepsilon}$$

- plusieurs évaluations du modèle, i.e. implémentation évidente

- perturbation  $\varepsilon$  dans chacune des directions de  $\mathbb{R}^n$

⇒ dépendance linéaire du coût de calcul par rapport à  $n$

# Approximation des dérivées

## Approximation différences finies

$$\text{Ex. } \left[ \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \right]_{\bar{\alpha}} \approx \frac{F(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_i + \varepsilon, \dots, \bar{\alpha}_n) - F(\bar{\alpha})}{\varepsilon}$$

- plusieurs évaluations du modèle, i.e. implémentation évidente

☞ choix critique de  $\varepsilon$

☞ coût de calcul

☞ **Dérivation analytique** permet de s'affranchir de  $\varepsilon$

# Analyse différentielle directe

- Dérivée directionnelle de  $F$  au point  $\bar{\alpha}$  dans la direction  $\delta\alpha$

$$\delta F(\delta\alpha, \bar{\alpha}) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \cdot \delta\alpha$$

$$\delta F(\bar{\alpha}, \delta\alpha) = \langle \nabla_{\alpha} F_{\bar{\alpha}}, \delta\alpha \rangle$$

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \right]_{\bar{\alpha}} = \langle \nabla_{\alpha} F_{\bar{\alpha}}, u_i \rangle$$

- $\delta x$  solution de

$$\frac{\partial M}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{\partial M}{\partial \alpha} \cdot \delta\alpha = 0 \quad \text{Tangent linear model (TLM)}$$

- ➡ Résolution TLM pour chacune des directions  $\delta\alpha$

# Méthode de l'état adjoint

- Si  $p$  est solution du système

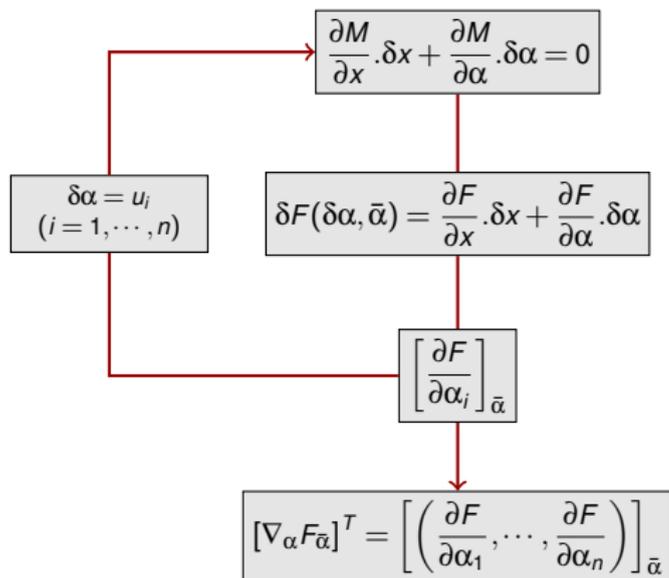
$$\left[ \frac{\partial M}{\partial x} \right]^T \cdot p - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \text{Adjoint model (ADM)}$$

alors

$$\nabla_{\alpha} F_{\bar{\alpha}} = \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \left[ \frac{\partial M}{\partial \alpha} \right]^T \cdot p$$

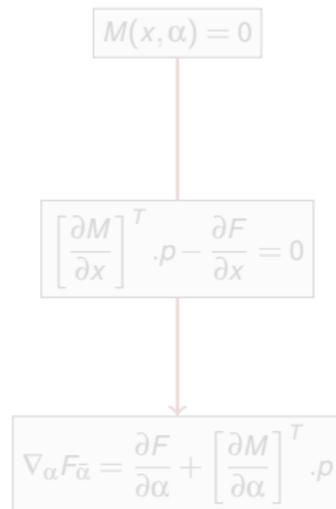
# Forward/Adjoint en bref

## Forward SA



pas de  $\epsilon$ , cout de calcul **dépendant de  $n$**

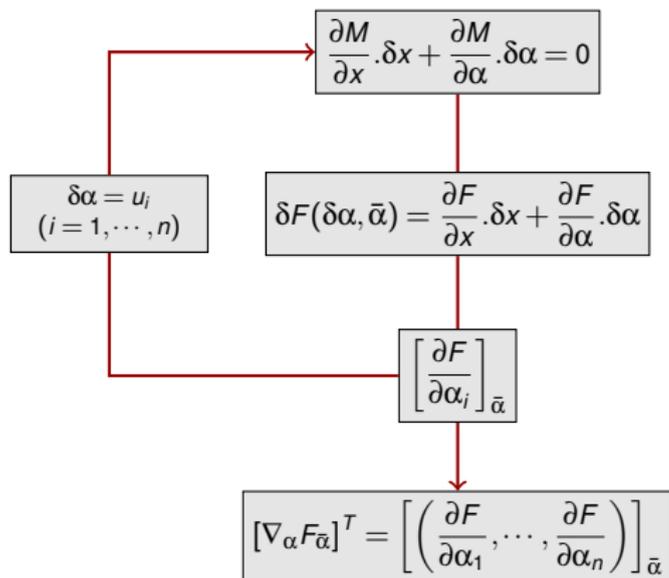
## Adjoint SA



pas de  $\epsilon$ , cout de calcul **indépendant de  $n$**

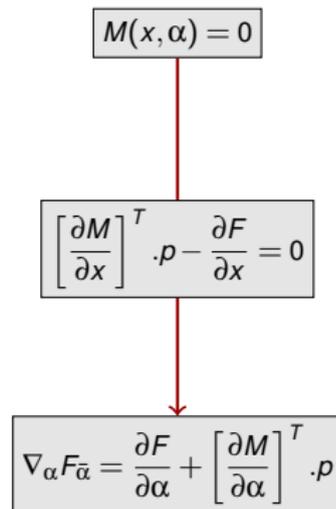
# Forward/Adjoint en bref

## Forward SA



pas de  $\varepsilon$ , cout de calcul **dépendant de  $n$**

## Adjoint SA



pas de  $\varepsilon$ , cout de calcul **indépendant de  $n$**

# Analyse d'une réponse vectorielle I

- Ex. On considère l'opérateur vectoriel  $G : \alpha \xrightarrow{M} x \xrightarrow{F} Q(t)$

- $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$  les paramètres du modèle
- $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_p)$  les valeurs nominales correspondantes
- $Q(t) = (Q(t_1), Q(t_2), \dots, Q(t_n))$  la réponse à l'exutoire

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \xrightarrow{G} \begin{pmatrix} Q(t_1) \\ Q(t_2) \\ \vdots \\ Q(t_n) \end{pmatrix}$$

## Objectif

- Calcul des dérivées de  $Q(t)$ , la chronique de débits simulés par rapport aux paramètres  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$

## Analyse d'une réponse vectorielle II

- Matrice **jacobienne** de la transformation  $G$  en  $\bar{\alpha}$

$$Jac_G(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \alpha_p} \\ \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \alpha_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \alpha_p} \end{pmatrix}_{\alpha=\bar{\alpha}}$$

### Principe de calcul

- Approche **directe** (TLM) ( $p < n$ ):
  - Calcul colonne par colonne (**linéarisation**)
- Approche **inverse** (ADM) ( $p \gg n$ ):
  - Calcul ligne par ligne
  - **Dérivation** puis **transposition**, notion d'opérateur **adjoint**)

# Analyse d'une réponse vectorielle III

- Variations sur la chronique de débit simulée résultant d'une perturbation sur  $\alpha_1$

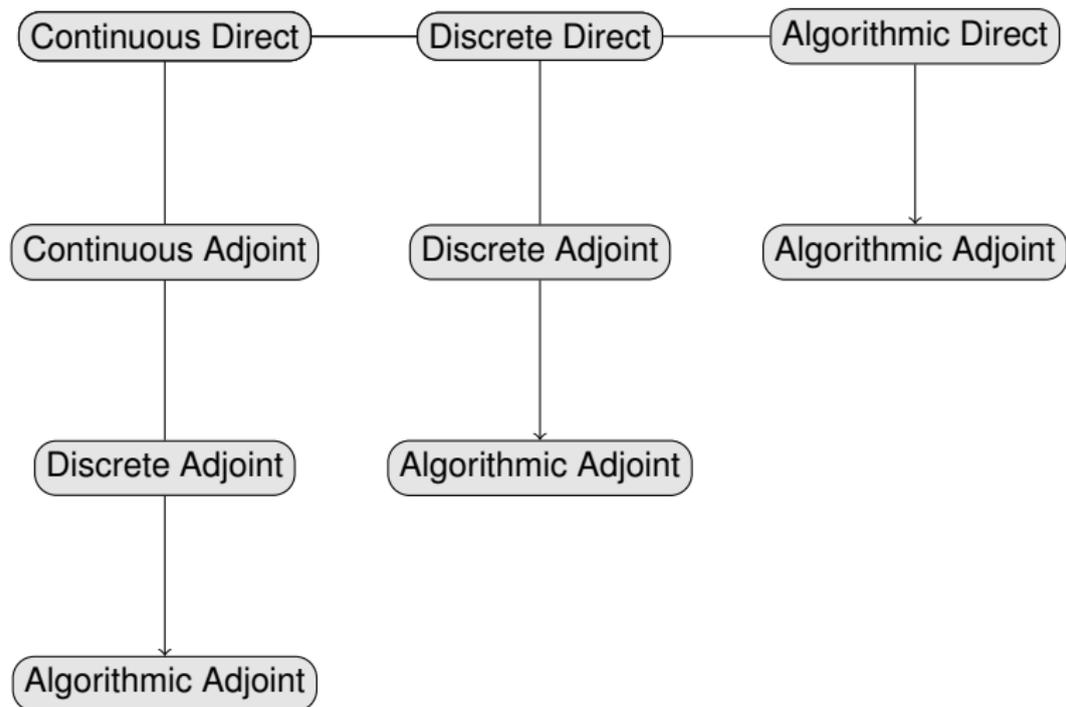
$$Jac_G(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \alpha_p} \\ \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \alpha_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \alpha_p} \end{pmatrix}_{\alpha = \bar{\alpha}}$$

# Analyse d'une réponse vectorielle IV

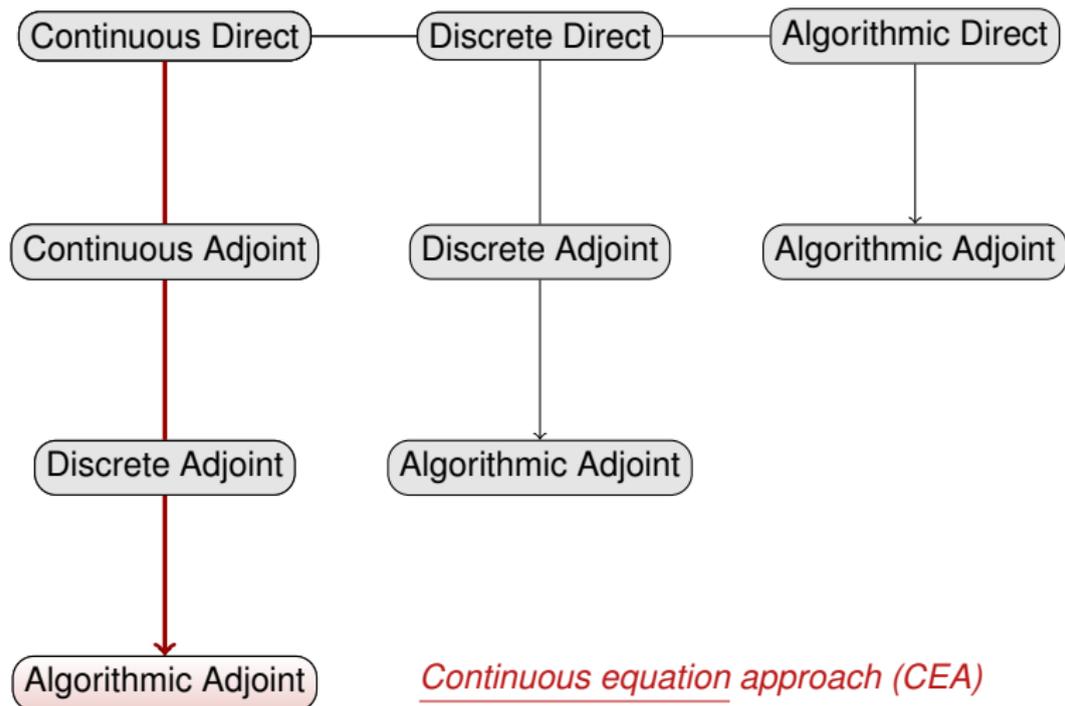
- Variations sur un aspect de la prévision (i.e  $Q(t_1)$ ) résultant de perturbations sur tous les  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, p$ )

$$Jac_G(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \alpha_p} \\ \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \alpha_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \alpha_p} \end{pmatrix}_{\alpha=\bar{\alpha}}$$

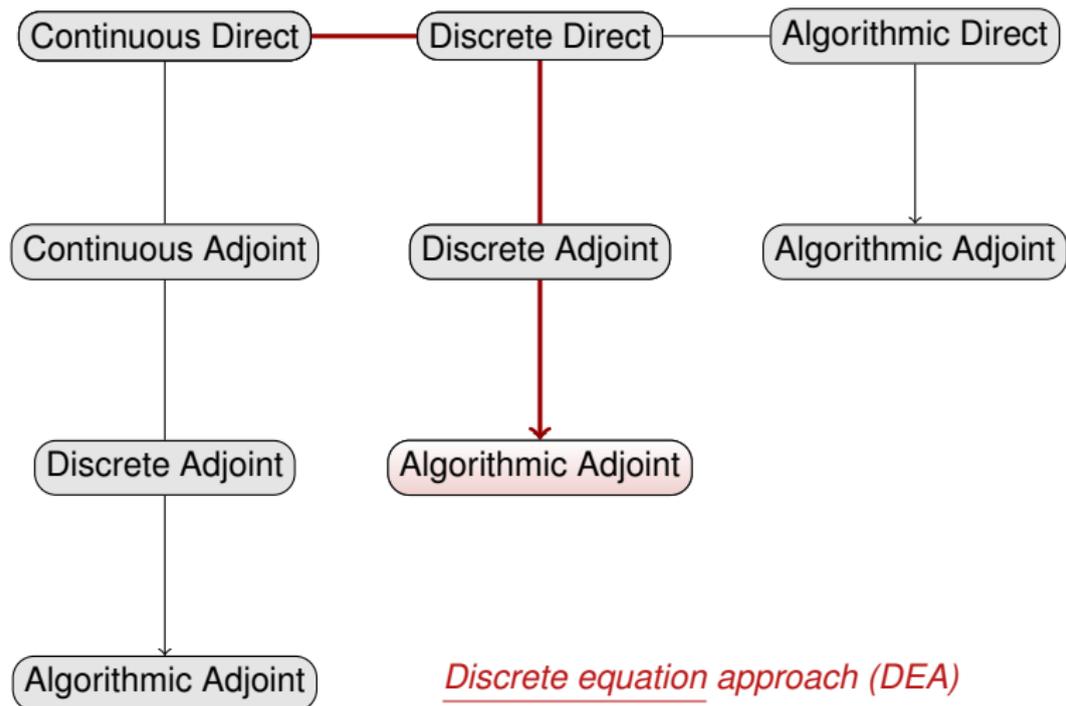
# Stratégies d'implémentation



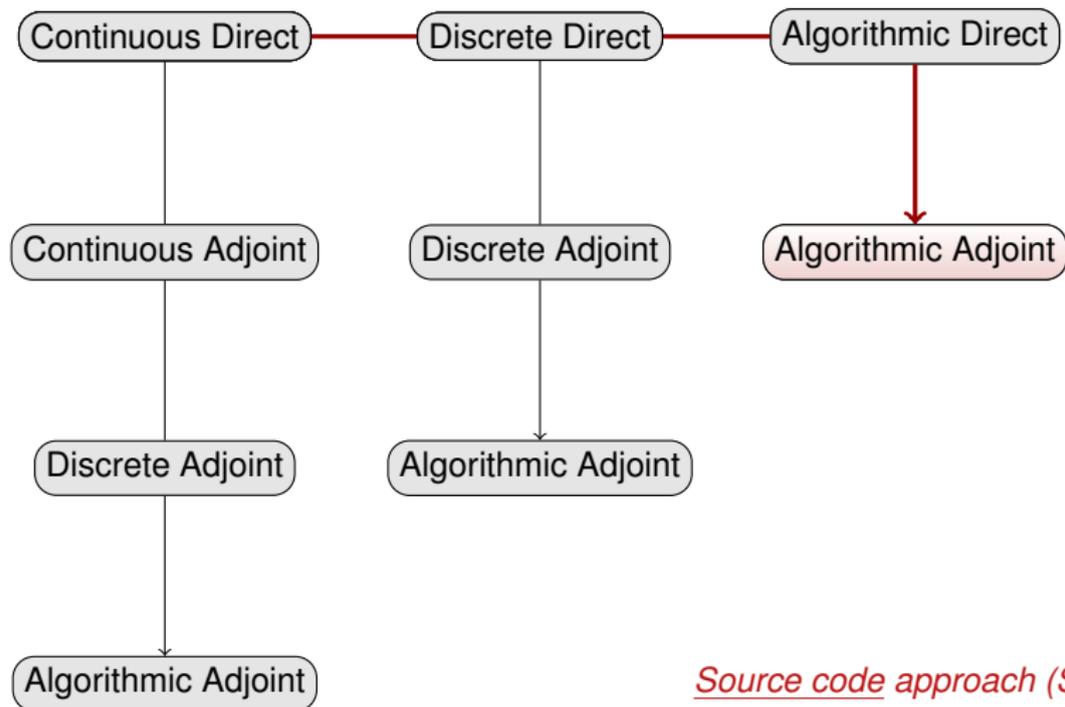
# Stratégies d'implémentation



# Stratégies d'implémentation



# Stratégies d'implémentation



Source code approach (SCA)

☞ Approche **discrete/algorithmique** généralement préférable

### Quelques difficultés et limitations

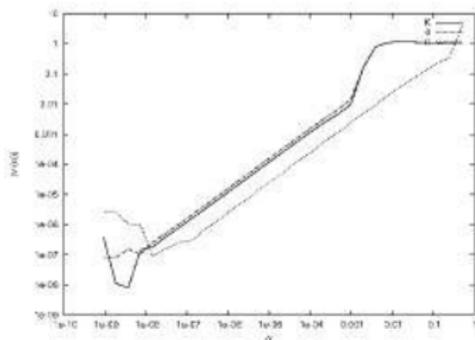
- Expertise et efforts substantiels, apport des outils de **différentiation algorithmique** (AD)

EX.  TADENADE de INRIA/TROPICS (*Hascoët et al.* 2003)

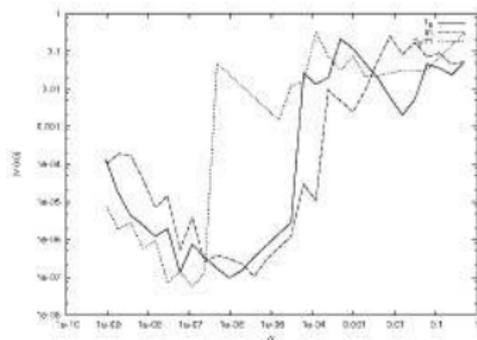
- **Différentiabilité** de la relation  $\alpha$  et  $Q(t)$ 
  - Pas de consensus sur le traitement des **points de non-différentiabilité** (**seuils** de fonctionnement)
  - AD, points de non-différentiabilité reportés dans TLM et ADM, dérivées valides au sein d'un **flot de contrôle**

$$v(\varepsilon) = 1 - \frac{F(\alpha + \varepsilon\delta\alpha) - F(\alpha)}{\varepsilon\langle\nabla F(\alpha), \delta\alpha\rangle}$$

MARINE



TOMAMMA



- Evaluation du *domaine de validité* des dérivées (Araya-Polo, 2006)

# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Cadre théorique et implémentation pratique
- 3 Analyse de sensibilité différentielle**
- 4 Estimation des paramètres par méthode de descente
- 5 Conclusions

# Mesures d'importance et normalisation

$$s_i^* = \frac{\partial F(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_i} \frac{\bar{\alpha}_i}{\bar{F}}$$

*Valeurs nominales*

$$S_i^\sigma = \frac{\partial F(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_i} \frac{\sigma_{\alpha_i}}{\sigma_{F(\alpha)}}$$

*Propriétés statistiques*

👉 Normalisation par valeurs nominales (non-linéarité et domaine de validité des dérivés)

# Sensibilité d'aspects de $Q(t)$ aux paramètres de MARINE I

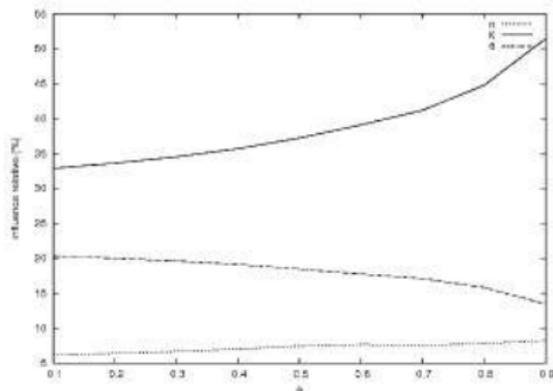
Méthode de l'état adjoint pour paramétrisation totalement distribuée, BV Thoré amont (25km<sup>2</sup>)

Influence relative (en %)

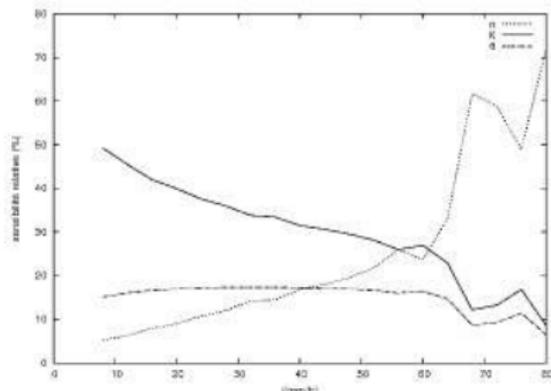
**Volume d'écoulement**  
**Débit de pointe**

$\eta, \theta, \psi$	$K$	$n$
18.26	36.67	8.53
4.40	7.83	78.94

Sensibilité du **volume d'écoulement**:  
influence de l'humidité initiale



Sensibilité du **débit de pointe**:  
influence du scénario de pluie



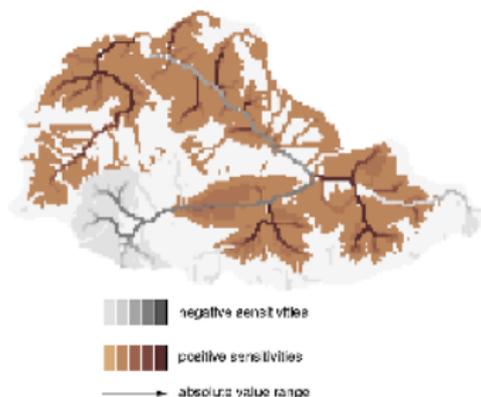
# Sensibilité d'aspects de $Q(t)$ aux paramètres de MARINE II

Méthode de l'état adjoint pour paramétrisation totalement distribuée, BV Thoré amont ( $25\text{km}^2$ )

Sensibilité du débit de pointe au frottement: **variabilité spatiale et corroboration**

## Opérations et influence sur le débit de pointe:

- variation de +10% sur le frottement -4.5%
- +10% où la sensibilité est négative -5.9%
- +10% où la sensibilité est positive +1.5%



# Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de MARINE I

Analyse de sensibilité **directe** pour **paramétrisation versants/réseau**, décomposition en valeurs singulières (SVD), BV Thoré amont (25km<sup>2</sup>)

- Vecteurs de base

$$V_1 \text{ tq } \begin{cases} V_1(x) = 1 & \text{si } x \in \text{versants} \\ V_1(x) = 0 & \text{si } x \in \text{réseau} \end{cases} \quad \text{et } V_2 \text{ tq } \begin{cases} V_2(x) = 0 & \text{si } x \in \text{versants} \\ V_2(x) = 1 & \text{si } x \in \text{réseau} \end{cases}$$

## Expression dans la base réduite



$$\begin{aligned} K &= K_v V_1 + K_r V_2 \\ n &= n_v V_1 + n_r V_2 \\ \theta &= \theta_v V_1 + \theta_r V_2 \end{aligned}$$

# Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de MARINE II

Analyse de sensibilité **directe** pour **paramétrisation versants/réseau**, décomposition en valeurs singulières (SVD), BV Thoré amont (25km<sup>2</sup>)

$$F'(\alpha) = \left( \begin{array}{cccccc} \frac{\partial Q(t_1)}{\partial K_r} & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial K_v} & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial n_r} & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial n_v} & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \theta_r} & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \theta_v} \\ \frac{\partial Q(t_2)}{\partial K_r} & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial K_v} & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial n_r} & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial n_v} & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \theta_r} & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \theta_v} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Q(t_r)}{\partial K_r} & \frac{\partial Q(t_r)}{\partial K_v} & \frac{\partial Q(t_r)}{\partial n_r} & \frac{\partial Q(t_r)}{\partial n_v} & \frac{\partial Q(t_r)}{\partial \theta_r} & \frac{\partial Q(t_r)}{\partial \theta_v} \end{array} \right)_{\alpha=\bar{\alpha}}$$

# Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de MARINE III

Analyse de sensibilité **directe** pour **paramétrisation versants/réseau**, décomposition en valeurs singulières (SVD), BV Thoré amont (25km<sup>2</sup>)

- Vecteurs de base

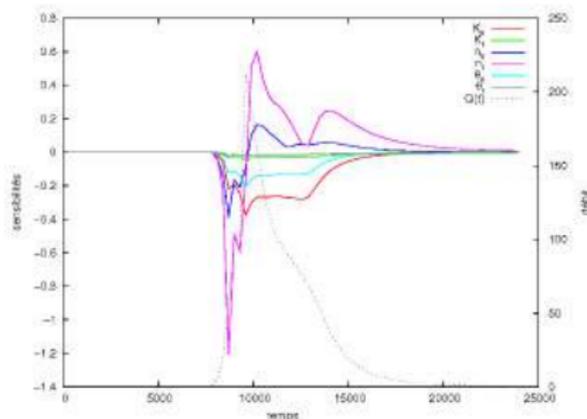
$$V_1 \text{ tq } \begin{cases} V_1(x) = 1 & \text{si } x \in \text{versants} \\ V_1(x) = 0 & \text{si } x \in \text{réseau} \end{cases} \quad \text{et } V_2 \text{ tq } \begin{cases} V_2(x) = 0 & \text{si } x \in \text{versants} \\ V_2(x) = 1 & \text{si } x \in \text{réseau} \end{cases}$$

## Expression dans la base réduite



$$\begin{aligned} K &= K_v V_1 + K_r V_2 \\ n &= n_v V_1 + n_r V_2 \\ \theta &= \theta_v V_1 + \theta_r V_2 \end{aligned}$$

## Sensibilité directe multi-directionnelle



# Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de MARINE IV

Analyse de sensibilité **directe** pour **paramétrisation versants/réseau**, décomposition en valeurs singulières (SVD), BV Thoré amont (25km<sup>2</sup>)

## Définition: SVD de $\mathbf{A}$

- Factorisation de la forme  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$
- **Valeurs singulières** dans  $\mathbf{S}$  (matrice diagonale): **spectre singulier**, importance relative des vecteurs singuliers correspondants
- Colonnes de  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$ : **vecteurs singuliers** dans l'espace des **observations** et des **paramètres**

# Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de MARINE V

Analyse de sensibilité **directe** pour **paramétrisation versants/réseau**, décomposition en valeurs singulières (SVD), BV Thoré amont (25km<sup>2</sup>)

## Informations tirées de la SVD de $Jac_G(\alpha)$

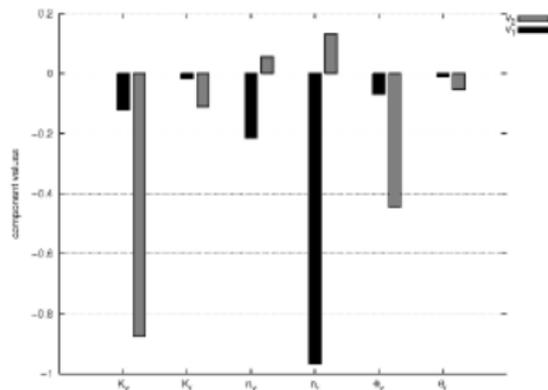
- Paramètres d'autant plus faciles à estimer que la proportion de **valeurs singulières significatives** est importante (matrice **S**)
- **Paramètres influents** sur la réponse hydrologique, ceux ayant une chance d'être identifiés lors de la résolution du **problème inverse** (matrice **V**)
- Part de l'hydrogramme où les **observations** sont susceptibles de bien **contraindre des paramètres** (matrice **U**)
- **Interprétation physique** des vecteurs singuliers (directions orthogonales) dans leurs espaces respectifs (matrices **U** et **V**)

# Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de MARINE VI

Analyse de sensibilité **directe** pour **paramétrisation versants/réseau**, décomposition en valeurs singulières (SVD), BV Thoré amont ( $25\text{km}^2$ )

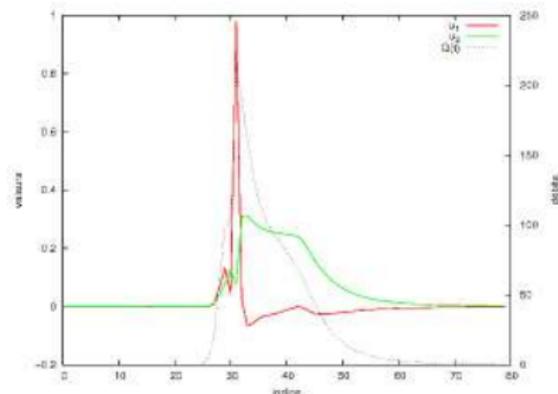
## Espace des **paramètres**

composantes des 1<sup>ier</sup> et 2<sup>ime</sup> vecteurs singuliers



## Espace des **observations**

composantes des 1<sup>ier</sup> et 2<sup>ime</sup> vecteurs singuliers



84.4 et 12.2 % de variabilité

# Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de MARINE I

Méthode de l'état adjoint pour paramétrisation totalement distribuée, décomposition en valeurs singulières (SVD), BV Thoré amont (25km<sup>2</sup>)

- $K, n$  et  $\theta$  spatialement distribués
- $x_1, \dots, x_s$ , indices correspondant aux différences localisations spatiales de la discrétisation

$$\text{Jac}_G(K, n, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q(t_1)}{\partial K(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial K(x_s)} & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial n(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial n(x_s)} & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \theta(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \theta(x_s)} \\ \frac{\partial Q(t_2)}{\partial K(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial K(x_s)} & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial n(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial n(x_s)} & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \theta(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \theta(x_s)} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Q(t_i)}{\partial K(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_i)}{\partial K(x_s)} & \frac{\partial Q(t_i)}{\partial n(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_i)}{\partial n(x_s)} & \frac{\partial Q(t_i)}{\partial \theta(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_i)}{\partial \theta(x_s)} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Q(t_{n-1})}{\partial K(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_{n-1})}{\partial K(x_s)} & \frac{\partial Q(t_{n-1})}{\partial n(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_{n-1})}{\partial n(x_s)} & \frac{\partial Q(t_{n-1})}{\partial \theta(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_{n-1})}{\partial \theta(x_s)} \\ \frac{\partial Q(t_n)}{\partial K(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial K(x_s)} & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial n(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial n(x_s)} & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \theta(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \theta(x_s)} \end{pmatrix}$$

# Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de MARINE II

Méthode de l'état adjoint pour paramétrisation totalement distribuée, décomposition en valeurs singulières (SVD), BV Thoré amont (25km<sup>2</sup>)

- $K, n$  et  $\theta$  spatialement distribués
- $x_1, \dots, x_{n_x}$ , indices correspondant aux différences localisations spatiales de la discrétisation
- SVD des sous-matrices correspondant à chacun des paramètres

$$\text{Jac}_G(K, n, \theta) = \begin{pmatrix}
 \frac{\partial Q(t_1)}{\partial K(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial K(x_n)} & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial n(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial n(x_n)} & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \theta(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_1)}{\partial \theta(x_n)} \\
 \frac{\partial Q(t_2)}{\partial K(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial K(x_n)} & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial n(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial n(x_n)} & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \theta(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_2)}{\partial \theta(x_n)} \\
 \vdots & \vdots \\
 \frac{\partial Q(t_i)}{\partial K(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_i)}{\partial K(x_n)} & \frac{\partial Q(t_i)}{\partial n(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_i)}{\partial n(x_n)} & \frac{\partial Q(t_i)}{\partial \theta(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_i)}{\partial \theta(x_n)} \\
 \vdots & \vdots \\
 \frac{\partial Q(t_{n-1})}{\partial K(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_{n-1})}{\partial K(x_n)} & \frac{\partial Q(t_{n-1})}{\partial n(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_{n-1})}{\partial n(x_n)} & \frac{\partial Q(t_{n-1})}{\partial \theta(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_{n-1})}{\partial \theta(x_n)} \\
 \frac{\partial Q(t_n)}{\partial K(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial K(x_n)} & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial n(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial n(x_n)} & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \theta(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \theta(x_n)} \\
 \frac{\partial Q(t_n)}{\partial K(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial K(x_n)} & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial n(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial n(x_n)} & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \theta(x_1)} & \dots & \frac{\partial Q(t_n)}{\partial \theta(x_n)}
 \end{pmatrix}$$

# Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de MARINE III

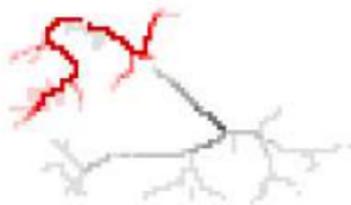
Méthode de l'état adjoint pour paramétrisation totalement distribuée, décomposition en valeurs singulières (SVD), BV Thoré amont (25km<sup>2</sup>)

Analyse des vecteurs singuliers dans l'espace des paramètres:

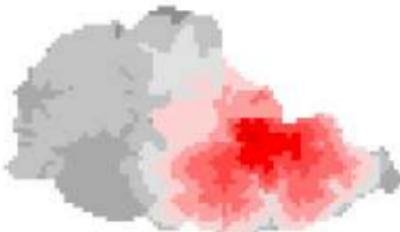
1<sup>ier</sup> vecteur singulier pour  $n$



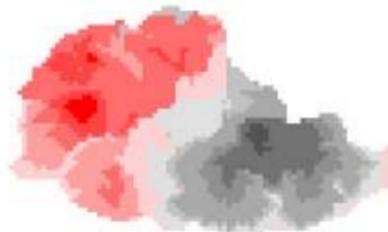
2<sup>ime</sup> vecteur singulier pour  $n$



1<sup>ier</sup> vecteur singulier pour  $K$



2<sup>ime</sup> vecteur singulier pour  $K$



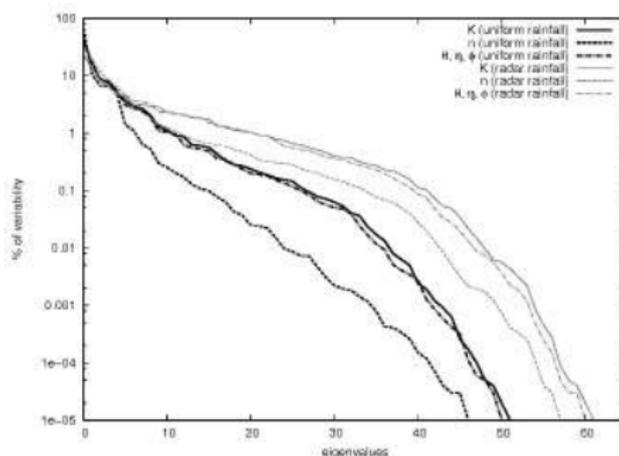
*composantes positives en dégradé de rouge, négatives en dégradé de gris*

# Sensibilité de $Q(t)$ aux paramètres de MARINE IV

Méthode de l'état adjoint pour paramétrisation totalement distribuée, décomposition en valeurs singulières (SVD), BV Thoré amont (25km<sup>2</sup>)

## Analyse du spectre singulier:

- Complexité d'une **paramétrisation identifiable** (i.e nb de  $dd/$  identifiables de façon stable)
- Analyse du **contenu informatif** des différents épisodes de pluie



# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Cadre théorique et implémentation pratique
- 3 Analyse de sensibilité différentielle
- 4 Estimation des paramètres par méthode de descente**
- 5 Conclusions

# Calibration des paramètres

## Critère de performance et algorithme d'optimisation

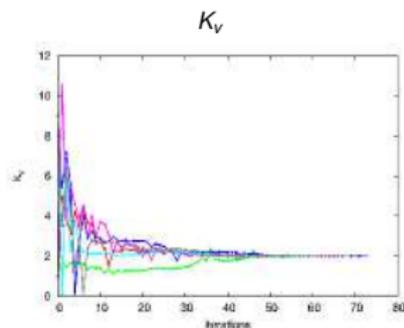
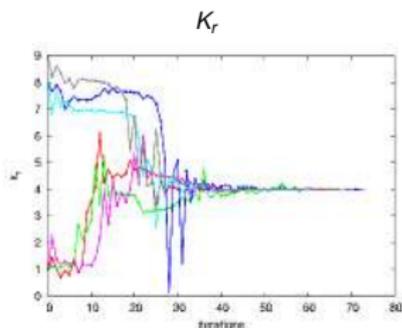
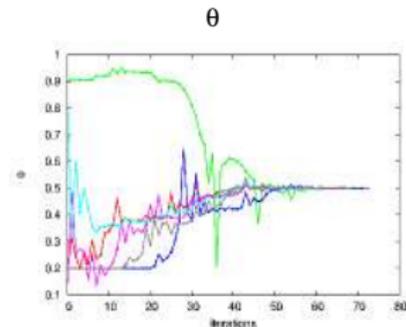
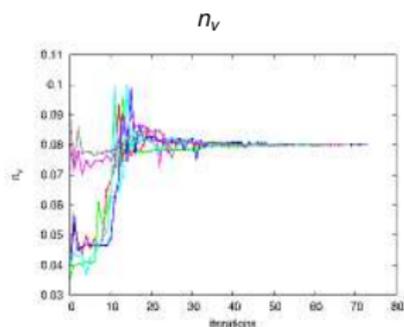
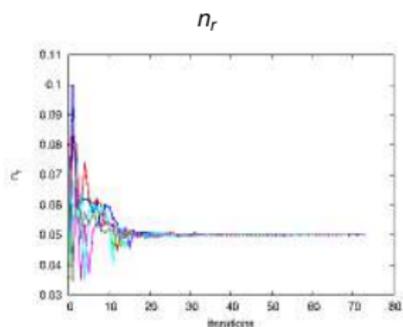
### Efficiencie de Nash

$$N = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Q_{obs}(t_i) - Q_{calc}(t_i))^2}{\sum_{i=1}^n (Q_{obs}(t_i) - \overline{Q_{obs}(t_i)})^2}$$

- Objectif: maximisation de  $N$  ( $\in ]-\infty, 1]$ ) pour réduire l'écart aux observations
- Méthode de l'état **adjoint**: capacité à évaluer le gradient du critère de performance (précision machine) pour un **coût de calcul indépendant du nombre de paramètres**
- N2QN1, algorithme de type **quasi-newton** avec **contraintes de bornes** (*Lemaréchal et al*, 2004 - INRIA/ESTIME)

# Calibration des paramètres de MARINE (1)

Convergence avec paramétrisation versants/réseau (BV Thoré amont (25km<sup>2</sup>), ajustement aux observations synthétiques avec efficacité de Nash)



## Calibration des paramètres de MARINE (2)

Tentative de **régularisation** par décomposition en valeurs singulières tronquée (**TSVD**) (BV Thoré amont (25km<sup>2</sup>), **observations synthétiques**)

- Génération d'**observations synthétiques** avec paramètres spatialement distribués (frottement dépendant de l'occupation des sols, conductivité hydraulique variant avec la distance au réseau)
- Calibration avec **paramétrisations** de **complexité croissante**, base réduite avec vecteurs singuliers de la SVD

	$p_K$	$p_n$	$p_\theta$	<b>Nash</b>	$1/\kappa(H)$
$P_1$	1	1	1	0.908	0.965E-08
$P_2$	2	2	1	0.938	0.217E-11
$P_{SV70}$	4	2	1	0.968	0.889E-08
$P_{SV80}$	6	3	1	0.978	0.947E-08
$P_{SV90}$	9	5	1	0.986	0.242E-16

$P_1$  unique facteur multiplicatif,  $P_2$  paramétrisation versants/réseau

$P_{SVX}$  paramétrisation décrite par vecteurs singuliers expliquant X % de variabilité

$p_K, p_n, p_\theta$  nombre de *ddl* pour les paramètres respectifs

$\kappa(H)$  conditionnement de la quasi-hessienne à la dernière itération

## Calibration des paramètres de MARINE (2)

Tentative de **régularisation** par décomposition en valeurs singulières tronquée (**TSVD**) (BV Thoré amont (25km<sup>2</sup>), **observations synthétiques**)

- Génération d'**observations synthétiques** avec paramètres spatialement distribués (frottement dépendant de l'occupation des sols, conductivité hydraulique variant avec la distance au réseau)
- Calibration avec **paramétrisations de complexité croissante**, base réduite avec vecteurs singuliers de la SVD

	$p_K$	$p_n$	$p_\theta$	<b>Nash</b>	$1/\kappa(H)$
$P_1$	1	1	1	0.908	0.965E-08
$P_2$	2	2	1	0.938	0.217E-11
$P_{SV70}$	4	2	1	<b>0.968</b>	<b>0.889E-08</b>
$P_{SV80}$	6	3	1	<b>0.978</b>	<b>0.947E-08</b>
$P_{SV90}$	9	5	1	0.986	0.242E-16

- **Amélioration** de l'**efficience** de Nash avec complexité croissante
- **Meilleur conditionnement** avec TSVD car les vecteurs de base déterminés par le **contenu informatif** des observations

## Calibration des paramètres de MARINE (3)

Tentative de régularisation par décomposition en valeurs singulières tronquée (TSVD) (BV Thoré amont (25km<sup>2</sup>), observations synthétiques)

### Points à approfondir ...

- L'amélioration des performances n'est pas nécessairement accompagnée de valeurs estimées plus proches des valeurs de référence
- Nécessité d'intégrer de l'**information a priori** en recherchant un **compromis** entre **stabilité** et **flexibilité**
- Combinaison avec une approche de type **Tikhonov** et analyse du spectre singulier pour déterminer la **pénalisation appropriée**

$$J(\mathbf{x}, \alpha) = \int_0^T \left[ (\varphi(\mathbf{x}, \alpha) - z)^T \mathbf{C}_z^{-1} (\varphi(\mathbf{x}, \alpha) - z) \right] dt$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} (\alpha - \alpha_{\text{prior}})^T \mathbf{C}_{\alpha_{\text{prior}}}^{-1} (\alpha - \alpha_{\text{prior}})$$

# Calibration multi-épisodes des paramètres de TOPSIMPL I

Problème inverse bien posé, convergence efficace et précision assurée, BV Vogüé 640km<sup>2</sup>

Efficience de Nash

$$N = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Q_{obs}(t_i) - Q_{calc}(t_i))^2}{\sum_{i=1}^n (Q_{obs}(t_i) - \overline{Q_{obs}(t_i)})^2}$$

Coefficient de détermination

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ \left( Q_{obs}(t_i) - \overline{Q_{obs}(t_i)} \right) \left( Q_{calc}(t_i) - \overline{Q_{calc}(t_i)} \right) \right]^2}{\sum_{i=1}^n \left( Q_{obs}(t_i) - \overline{Q_{obs}(t_i)} \right)^2 \sum_{i=1}^n \left( Q_{calc}(t_i) - \overline{Q_{calc}(t_i)} \right)^2}$$

# Calibration multi-épisodes des paramètres de TOPSIMPL II

Problème inverse bien posé, convergence efficace et précision assurée, BV Vogüé 640km<sup>2</sup>

- Validation et comparaison de performances: algorithme de **quasi-newton (QN)** / échantillonnage de **Monte Carlo (MC)** (10000 réalisations)

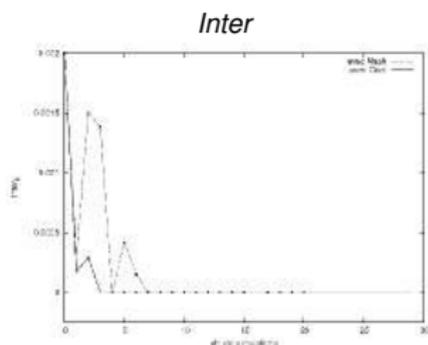
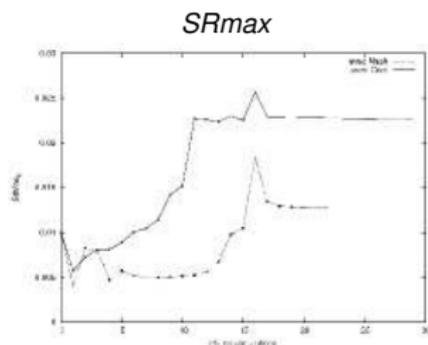
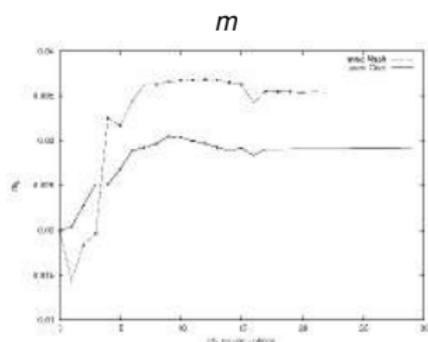
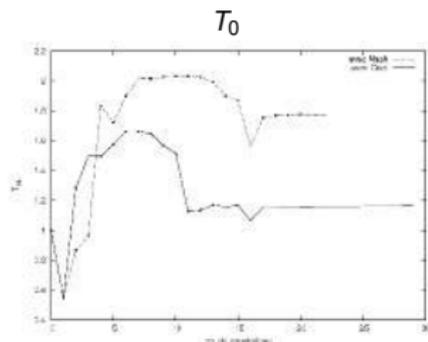
<b>QN</b>	Value	$T_0(\text{m}^2\text{h}^{-1})$	$m(\text{m})$	<b>SRMax(m)</b>	<b>Inter(mh<sup>-1</sup>)</b>
<b>Nash</b>	0.817	1.77	0.0353	0.0128	0.
<b>R2</b>	0.827	1.16	0.0291	0.0225	0.

<b>MC</b>	Value	$T_0(\text{m}^2\text{h}^{-1})$	$m(\text{m})$	<b>SRMax(m)</b>	<b>Inter(mh<sup>-1</sup>)</b>
<b>Nash</b>	0.797	1.23	0.035	0.006	0.0001
<b>R2</b>	0.820	0.83	0.022	0.030	7.8E-5

# Calibration multi-épisodes des paramètres de TOPSIMPL III

Problème inverse bien posé, convergence efficace et précision assurée, BV Vogüé 640km<sup>2</sup>

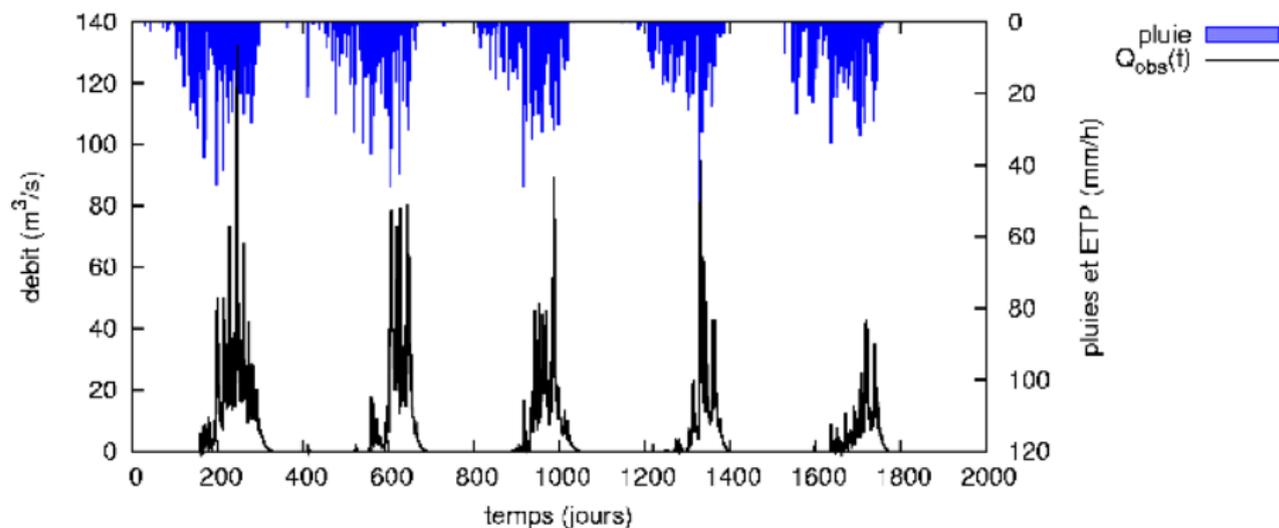
- Rapidité de la convergence de la méthode de descente



# Analyse post-optimale pour TOPAMMA I

Analyse critique de la définition d'un jeu de paramètres vraisemblable, BV Donga (586km<sup>2</sup>)

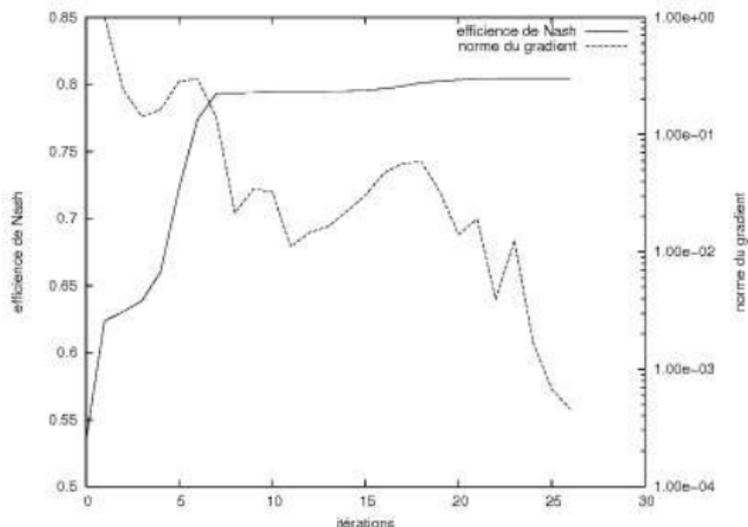
## Observations sur la période 1998-2002



# Analyse post-optimale pour TOPAMMA II

Analyse critique de la définition d'un jeu de paramètres vraisemblable, BV Donga (586km<sup>2</sup>)

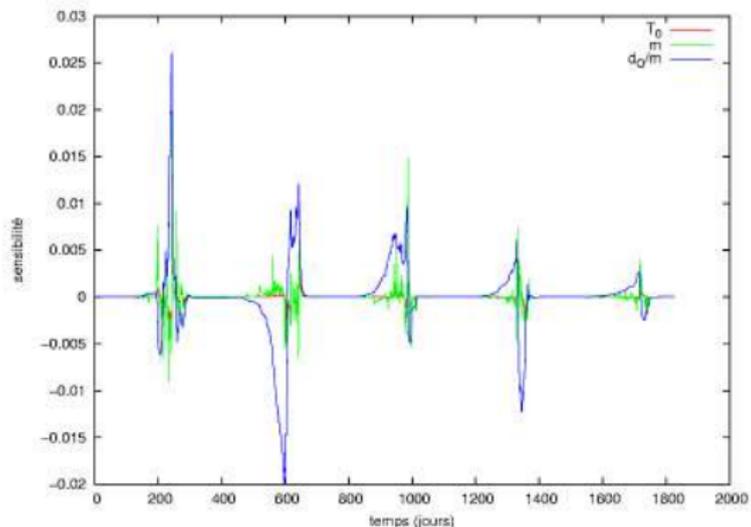
Evolution de l'efficacité et de la norme du gradient au cours des itérations



# Analyse post-optimale pour TOPAMMA III

Analyse critique de la définition d'un jeu de paramètres vraisemblable, BV Donga (586km<sup>2</sup>)

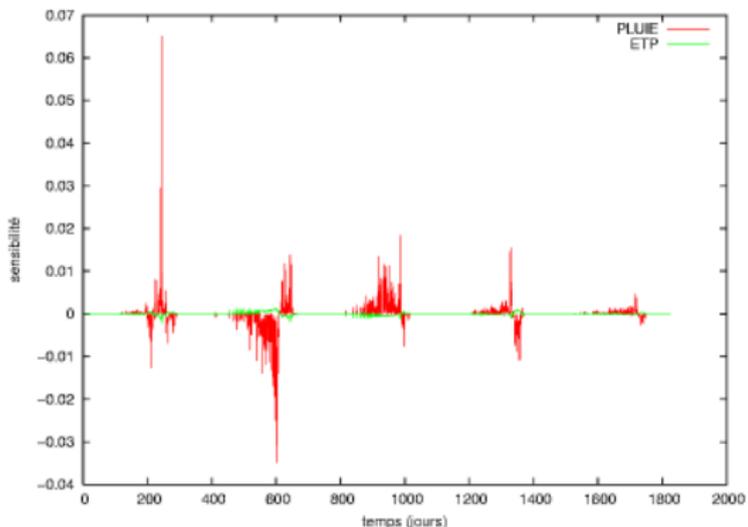
## Évolution temporelle de la sensibilité du critère de Nash aux paramètres



# Analyse post-optimale pour TOPAMMA IV

Analyse critique de la définition d'un jeu de paramètres vraisemblable, BV Donga (586km<sup>2</sup>)

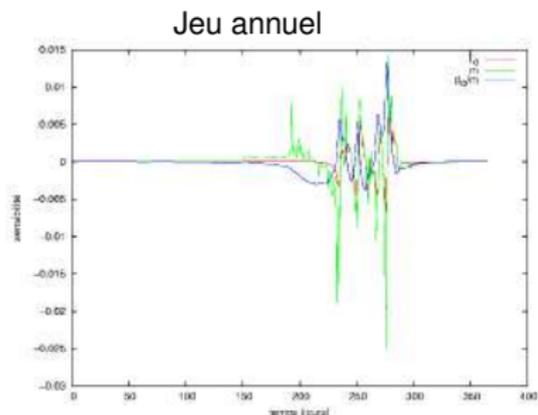
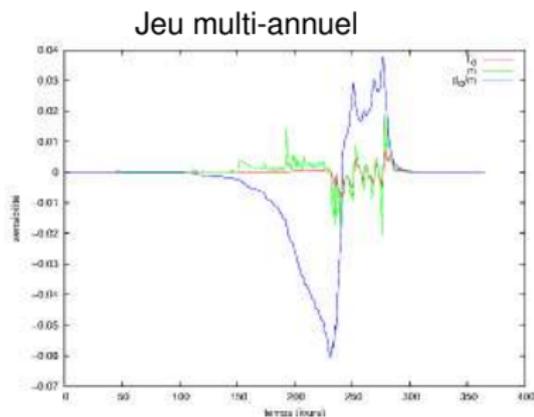
Évolution temporelle de la sensibilité du critère de Nash aux variables de forçage



# Analyse post-optimale pour TOPAMMA V

Analyse critique de la définition d'un jeu de paramètres vraisemblable, BV Donga (586km<sup>2</sup>)

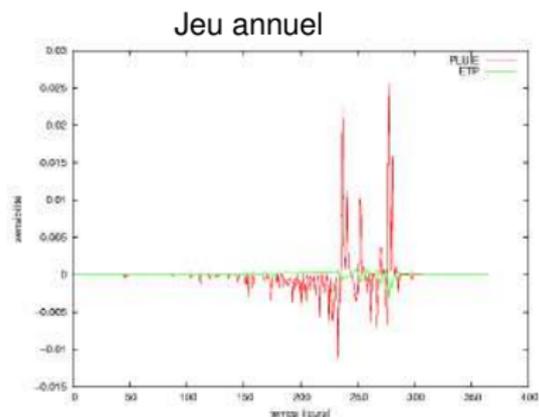
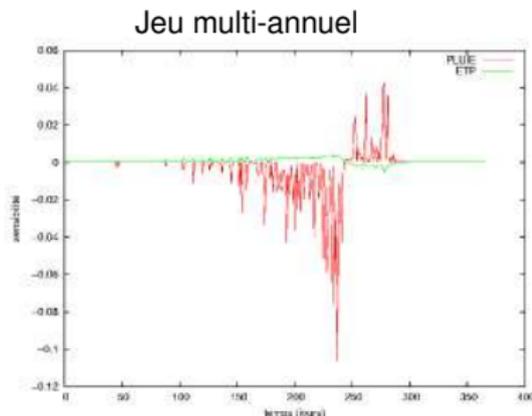
Évolution temporelle de la sensibilité du critère de Nash aux paramètres: année 1999



# Analyse post-optimale pour TOPAMMA VI

Analyse critique de la définition d'un jeu de paramètres vraisemblable, BV Donga (586km<sup>2</sup>)

Évolution temporelle de la sensibilité du critère de Nash aux variables de forçage :  
année 1999

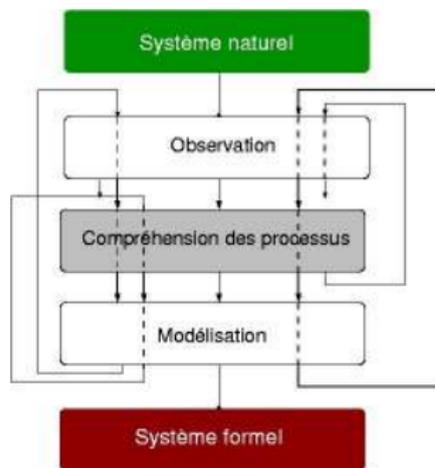


# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Cadre théorique et implémentation pratique
- 3 Analyse de sensibilité différentielle
- 4 Estimation des paramètres par méthode de descente
- 5 Conclusions**

# Intérêt pour la **modélisation** hydrologique

Outil d'analyse à exploiter au cours du processus conduisant à la représentation des processus



- **Analyse approfondie** de la physique décrite dans les modèles hydrologiques, corroboration/validation des **hypothèses de fonctionnement**
- Étape importante du **développement du modèle MARINE**, approfondir avec données réelles, bassins de taille plus importante (travaux en cours à l'IMFT)
- Révision de la **structure** de **TOPAMMA** pour corriger le **biais** sur le bilan hydrologique dépendant de la climatologie des précipitations
- Analyse de la **modélisation hydrologique distribuée** sur la région Cévennes-Vivarais (N-TOPMODELS sur maillage hydrologique)

# Applicabilité des méthodes variationnelles

- Pertinence des dérivées calculées par **différentiation algorithmique**, même dans le cas d'une physique dont la représentation comporte des seuils de fonctionnement
- Évaluation objective et systématique du **domaine de validité des dérivées**, par ex. à l'aide de l'approche proposée par *Araya-Polo*, (2006)
- Modifier la formulation des systèmes basés sur TOPMODEL pour **assurer la dérivabilité** par rapport à toutes les variables de contrôle (paramètres de U.H. géomorphologique ou indice de similarité hydrologique)

# Comprendre analyser et réduire les incertitudes pour la prévision hydrologique

- Remise en question du **dogme** motivant l'emploi de méthodes **probabilistes/évolutionnaires** pour l'estimation des paramètres
- **Combiner** les avantages des méthodes **déterministes et stochastiques** pour l'analyse de systèmes hydrologiques (variété de bassin versants et de régimes de précipitations)
- Mise à jour de l'**état initial** par **assimilation variationnelle de données**, fenêtre d'assimilation et description des processus
- Description du **sous-espace** altérant l'**incertitude prédictive**, potentiel pour la propagation d'incertitudes dans les chaînes de prévision hydro-météorologiques (**prévision d'ensemble**)

# Modes d'amplification des erreurs sur les précipitations

Sensibilité de  $q(t)$  à  $\zeta$  (coefficient correctif spatialement distribué)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{s^{1/2}}{n} \frac{\partial uh^{5/3}}{\partial x} = \zeta r - i$$

1<sup>er</sup> vecteur singulier de  $\zeta$

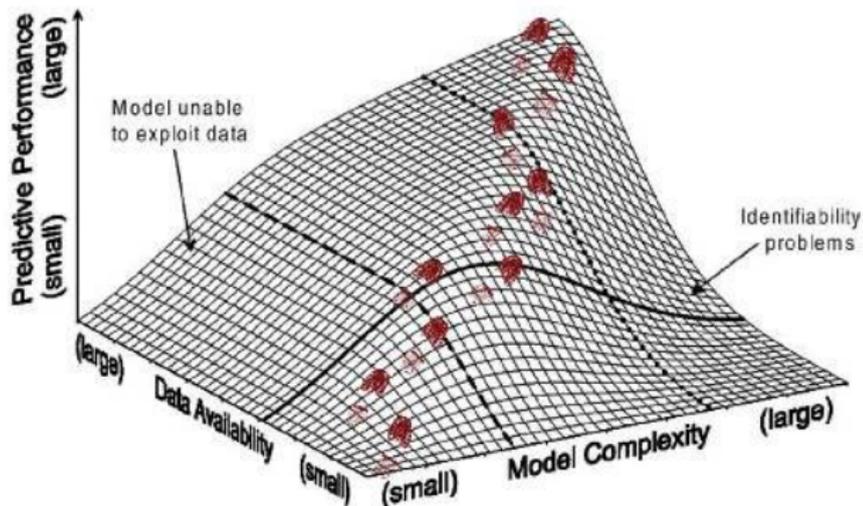


2<sup>ème</sup> vecteur singulier de  $\zeta$



composantes positives en dégradé de rouge, négatives en dégradé de gris

# Merci de votre attention ...



# Q?