

Optimisation stochastique de treillis

J. Lebon[†]
Philippe Bouillard[†]
Rajan Filomeno Coelho[†]

jlebon@batir.ulb.ac.be
Philippe.Bouillard@ulb.ac.be
rfilemen@ulb.ac.be

[†] **Université Libre de Bruxelles, Service BATir**
Université Libre de Bruxelles
Service BATir - CP 194/2
avenue Roosevelt, 50
B-1050 BRUXELLES (Belgique)



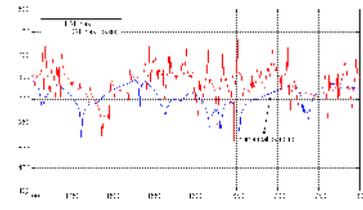
Méthodes de calculs mécaniques avancées:

“Formulation et développement de méthodes numériques efficaces pour un usage industriel fiable et efficace”

3 axes de recherche principaux:

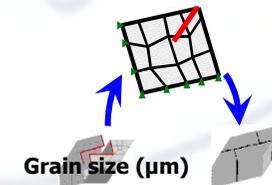
1- Dynamique structurale et acoustique: (*Philippe Bouillard, Arnaud Deraemaeker*)

- Méthode des éléments finis généralisés pour fréquences moyennes (méthodes sans maillage et d'ordre plus élevés)



2- Matériaux et mécanique structurale non linéaire: (*Thierry J. Massart, Peter Berke, Benoît Mercatoris*)

- Approches multi-échelles de la rupture, description des coques et des solides, incorporation d'incertitudes, multi-physique
- Effets de durcissement à l'échelle
- Aciers TRIP & plasticité au gradient
- Micromachines – films fins
- Effondrement progressif



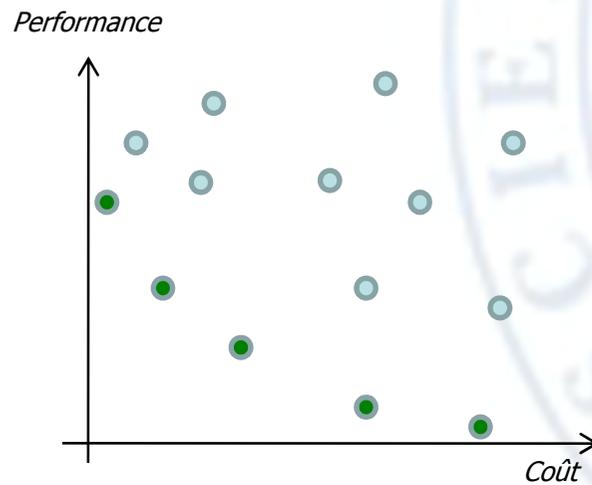


3- Méthodes de conception et d'optimisation structurale:

(*Rajan Filomeno Coelho, Philippe Bouillard*)

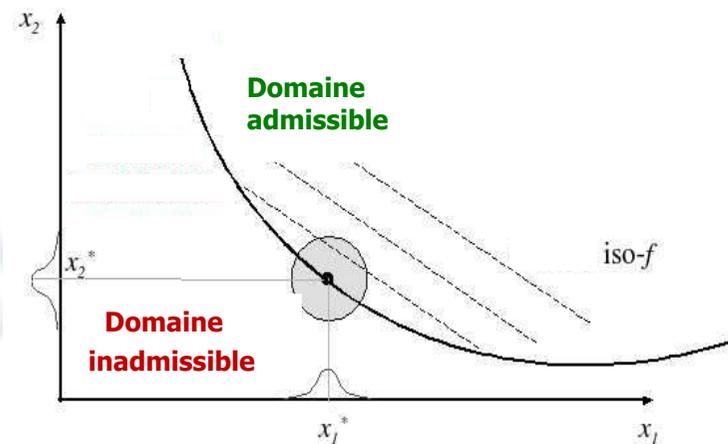
- Recherche de forme ou de topologie optimale selon plusieurs critères donnés,
- Recherche de caractérisation fine de la gamme de performance de structures
- Les applications industrielles nécessitent des études de type:

1- Prise en compte de plusieurs critères



Optimisation multicritère (Pareto)

2- Prise en compte d'Incertitudes



Optimisation robuste
Optimisation à contrainte fiable

- **Contexte de l'optimisation multicritère déterministe**

- Formulation déterministe du problème
- Détermination des solutions de PARETO
- Algorithme génétique de résolution du problème d'optimisation
- Un exemple d'optimisation de forme

- **Une formulation pour la prise en compte des incertitudes**

- Présentation de la formulation du problème d'optimisation
- Traitement des incertitudes (Collocation)
- Résultats pour l'optimisation de treillis

- **Conclusion et perspectives**

- **Contexte de l'optimisation multicritère**
 - Formulation déterministe du problème
 - Détermination des solutions de PARETO
 - Algorithme génétique de résolution du problème d'optimisation
 - Un exemple d'optimisation de forme

- **Une formulation pour la prise en compte des incertitudes**
 - Présentation de la formulation du problème d'optimisation
 - Traitement des incertitudes (Monte Carlo et Collocation)
 - Résultats pour l'optimisation de treillis

- **Conclusion et perspectives**

Optimisation mono-objectif vs multicritère déterministe

Formulation et solutions générales d'un problème d'optimisation mono-objectif (*C.T. Kelley, J. Nocedal, S. Wright, 1997*)

$$\min_{x \in \Omega} f(\bar{x})$$

Sous les contraintes:

$$\begin{cases} g_i(\bar{x}) \leq 0, & 1 \leq i \leq q \\ h_j(\bar{x}) = 0, & 1 \leq j \leq p \end{cases}$$

En général, solution unique (globale)

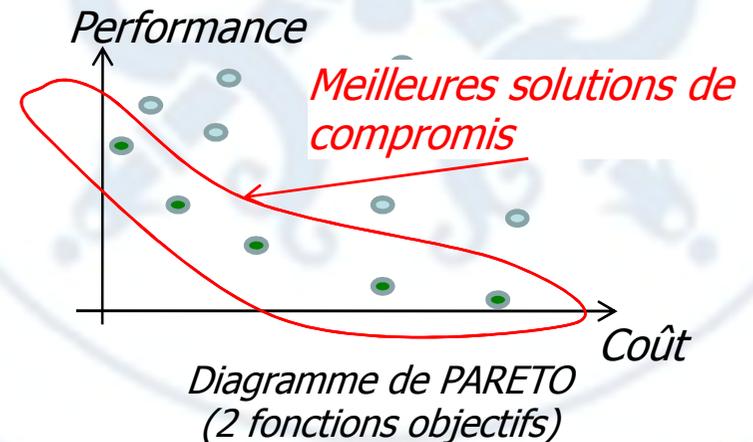
$$\forall \bar{x} \in \Omega, f(\bar{x}) \geq f(\bar{x}_g)$$

Formulation et solutions générales d'un problème d'optimisation multicritère (ou multiobjectif) (*C.A. Coello Coello, D.A. Van Veldhuizen, G.B. Lamont 2002*)

$$\min_{\bar{x} \in \Omega} \bar{f}(\bar{x}) = [f_1(\bar{x}) \quad f_2(\bar{x}) \quad \dots \quad f_k(\bar{x})]^T$$

Sous les contraintes:

$$\begin{cases} g_i(\bar{x}) \leq 0, & 1 \leq i \leq q \\ h_j(\bar{x}) = 0, & 1 \leq j \leq p \end{cases}$$



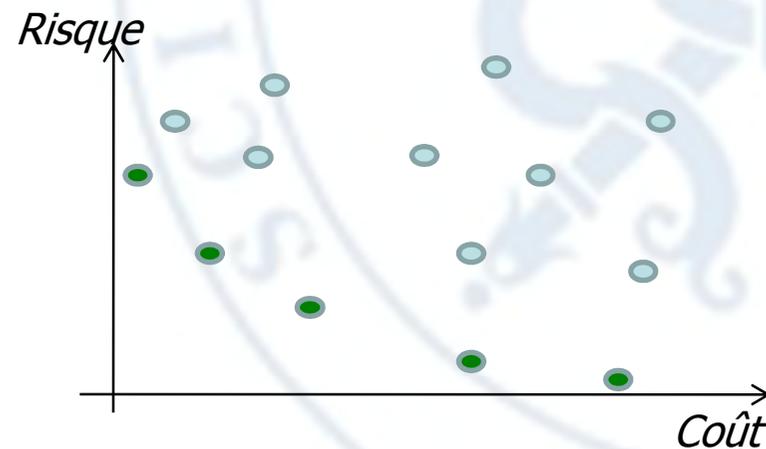
- **Contexte de l'optimisation multicritère**
 - Formulation déterministe du problème
 - Détermination des solutions de PARETO
 - Algorithme génétique de résolution du problème d'optimisation

- **Une formulation pour la prise en compte des incertitudes**
 - Présentation de la formulation du problème d'optimisation
 - Traitement des incertitudes (Monte Carlo et Collocation)
 - Résultats pour l'optimisation de treillis

- **Conclusion et perspectives**

(*Goldberg 1989*)

- Dominance faible de PARETO: Un vecteur \bar{u} domine un vecteur v au sens de PARETO, si et seulement si $\forall i \in \{1 \dots m\}, u_i \leq v_i$. On écrit alors $\bar{u} \succeq \bar{v}$.
- Ensemble de PARETO: c'est l'ensemble P^* de toutes les solutions non dominées, $P^* = \{\bar{x}^* \in \Omega \mid \nexists \bar{x} \in \Omega; \bar{f}(\bar{x}) \succeq \bar{f}(\bar{x}^*)\}$
- Diagramme de PARETO: c'est la représentation de l'ensemble de PARETO dans l'espace des fonctions objectifs.



Optimisation Multi-objectif
(Pareto)

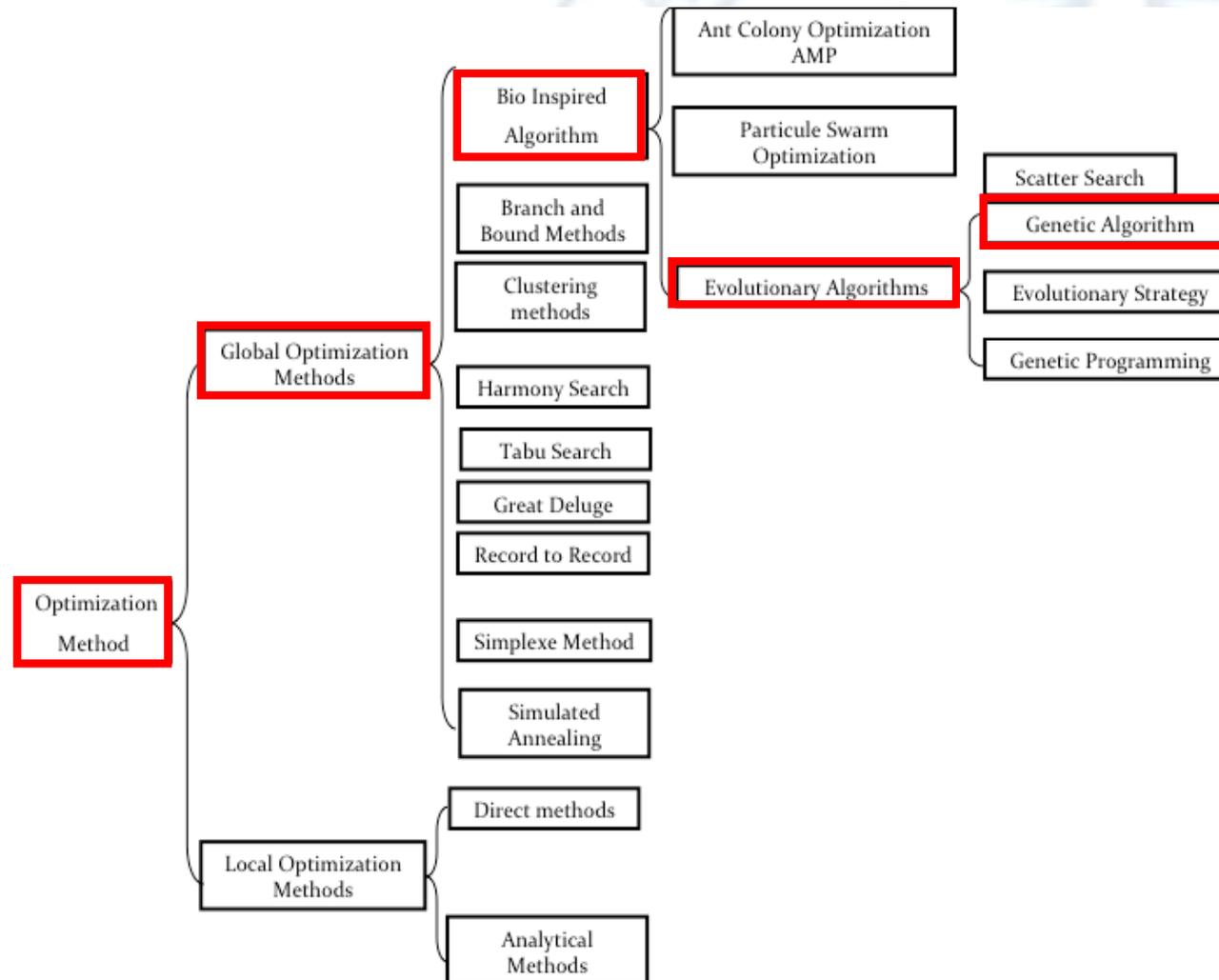
- **Contexte de l'optimisation multicritère**
 - Formulation déterministe du problème
 - Détermination des solutions de PARETO
 - **Algorithme génétique de résolution du problème d'optimisation**
 - Un exemple d'optimisation de forme

- **Une formulation pour la prise en compte des incertitudes**
 - Présentation de la formulation du problème d'optimisation
 - Traitement des incertitudes (Monte Carlo et Collocation)
 - Résultats pour l'optimisation de treillis

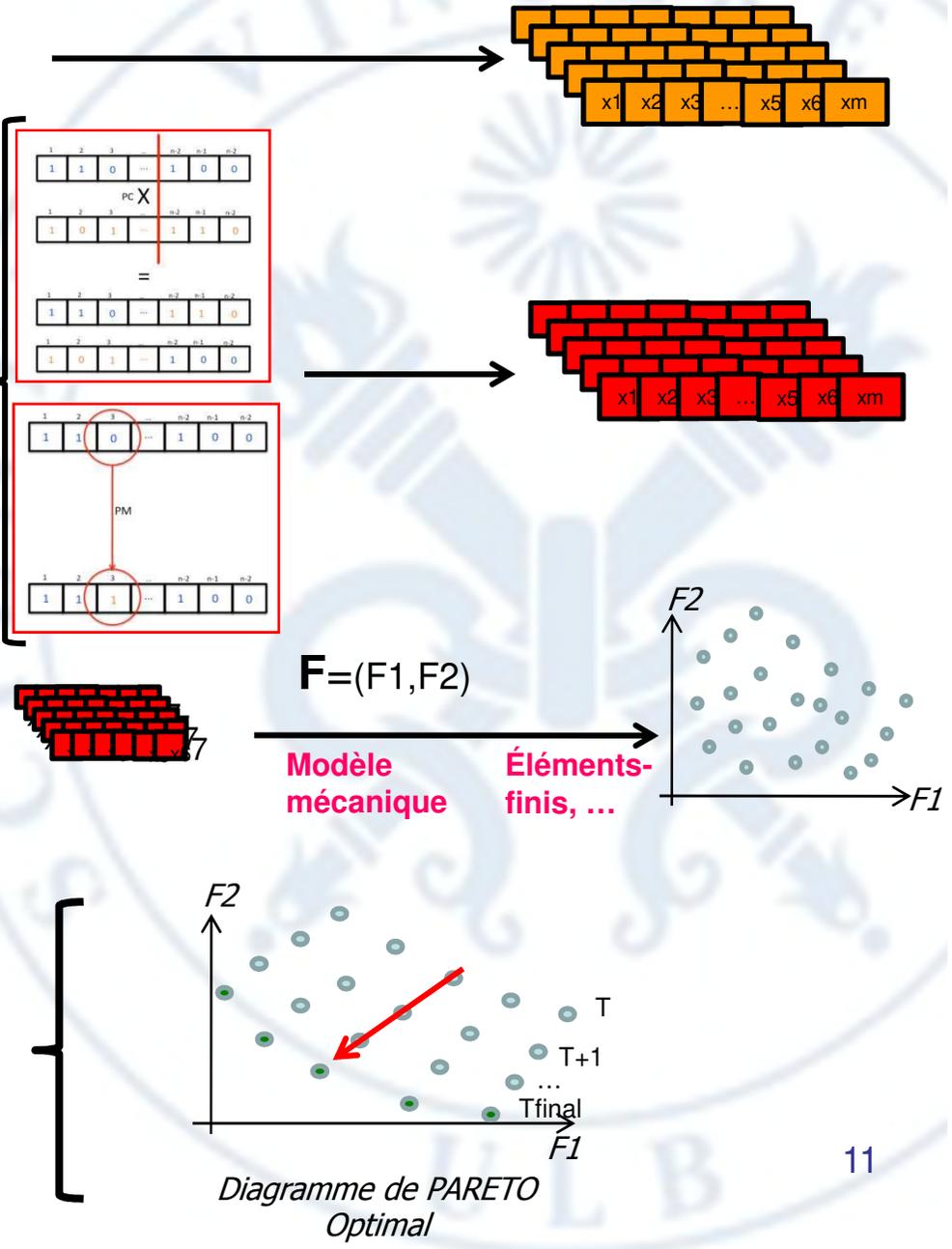
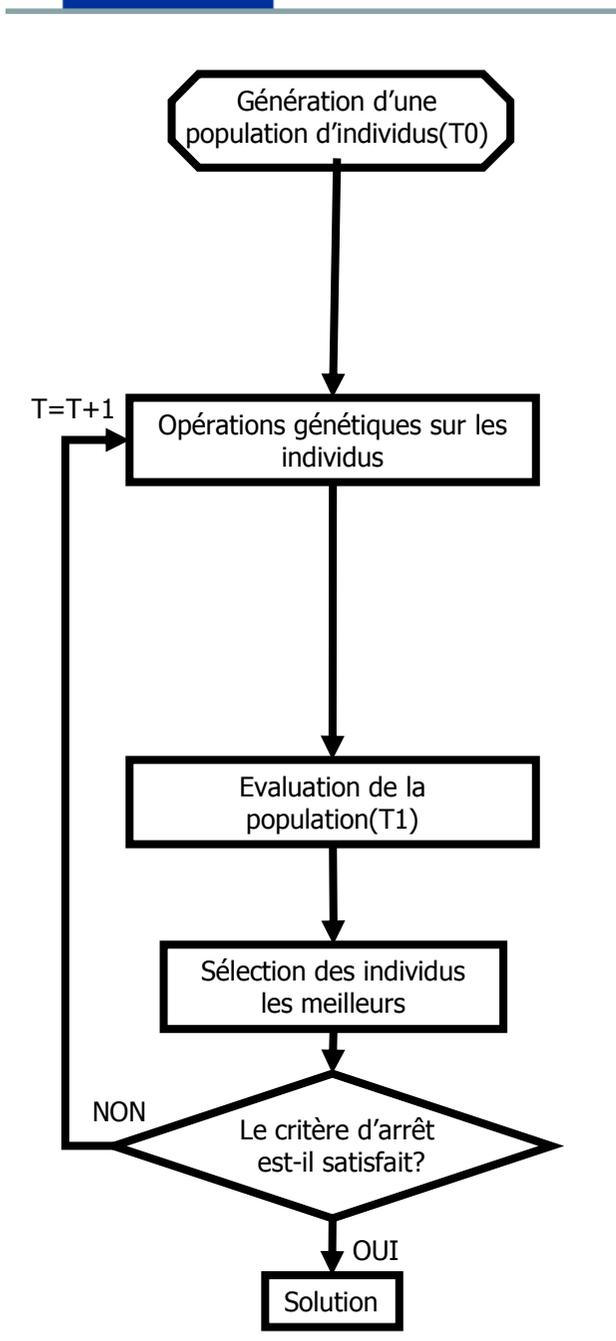
- **Conclusion et perspectives**

Algorithmes de résolution

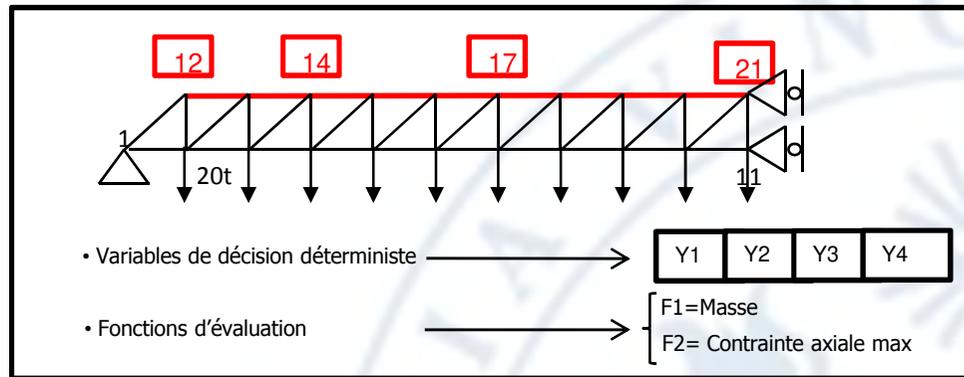
- Algorithmes de résolution globale faisant intervenir une population d'individus
 - Algorithmes évolutionnaires
 - Algorithmes génétiques (*Goldberg 1989*)



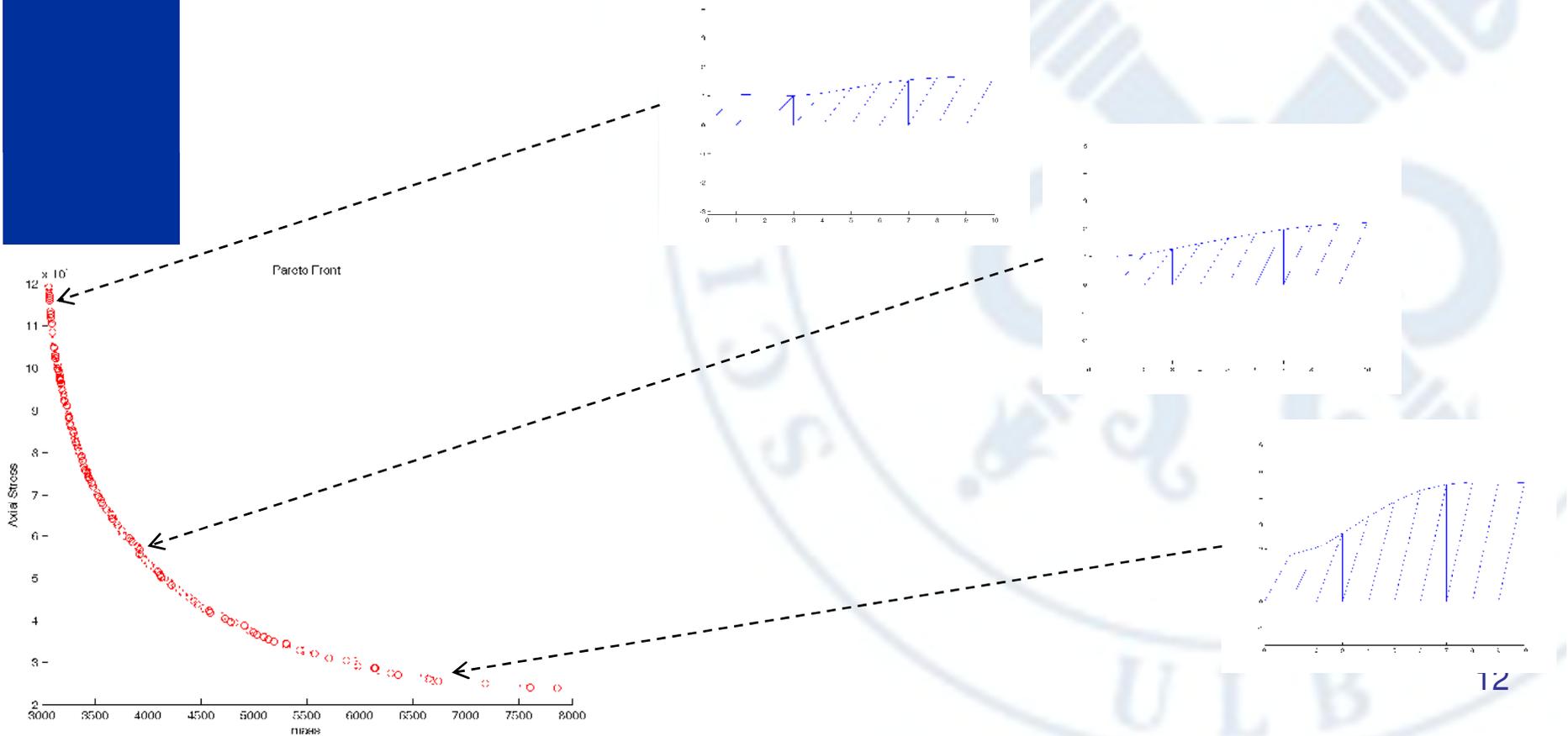
Algorithmes génétiques



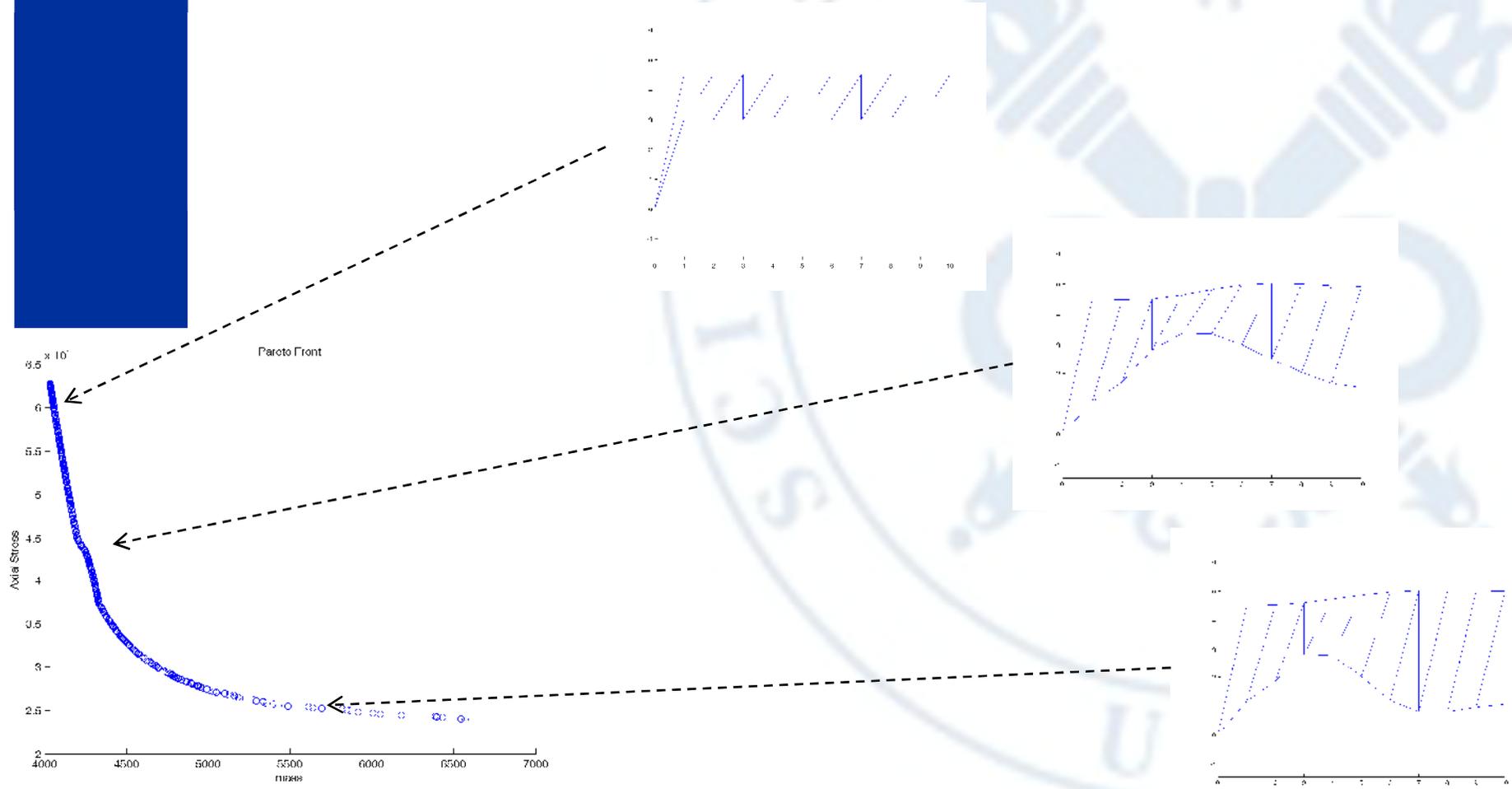
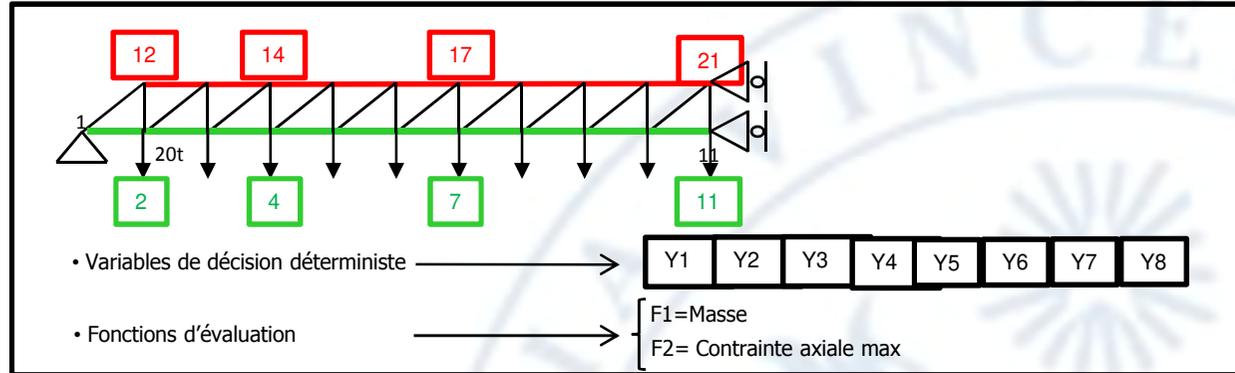
Optimisation structurale multicritère déterministe



(L.Gil , A.Andreu 2000)



Optimisation structurale multicritère déterministe



- **Contexte de l'optimisation multicritère**
 - Formulation déterministe du problème
 - Détermination des solutions de PARETO
 - Algorithme génétique de résolution du problème d'optimisation
 - Un exemple d'optimisation de forme

- **Une formulation pour la prise en compte des incertitudes**
 - Présentation de la formulation du problème d'optimisation
 - Traitement des incertitudes (Monte Carlo et Collocation)
 - Résultats pour l'optimisation de treillis

- **Conclusion et perspectives**

■ Motivations:

- Dans un contexte d'optimisation, l'ensemble de PARETO déterministe ne fournit pas que des solutions acceptables.

- Plusieurs écoles existent:

- 1- Reliability Based Design Optimisation (RBDO): qui vise à limiter les risques de rupture structurale sous conditions stochastiques.

(E. Nikolaidis , D.M. Ghiocel, S. Shinghal, 2005 ; K.Deb, D.Padmanabahn ,2007)

- 2- Robust Design Optimization (RDO): qui vise à étudier la sensibilité des réponses à des perturbations stochastiques.

(H.G. Beyer, B. Sendhoff, 2007)

- 3- Noisy optimization: Optimisation de fonctions bruitées

(Hughes, 2001)

Formulation pour la prise en compte des incertitudes en OM

(R.Filomeno Coelho, 2009)

$$\min_{\bar{x}, \bar{\eta}} \bar{\zeta} = [\zeta_1, \dots, \zeta_m]$$

sous les contraintes:

$$P_{\text{non-dominance}} \equiv P[\bar{f}(\bar{x}, \bar{\theta}) \succ \bar{\zeta}] \geq \alpha^{\bar{f}}$$

$$P_{\text{sécurité}} \equiv P[\bar{g}(\bar{x}, \bar{\theta}) \leq 0] \geq \alpha^{\bar{g}}$$

avec

$$\zeta_i = E[f_i(\bar{x}, \bar{\theta})] + \eta_i \sigma[f_i(\bar{x}, \bar{\theta})]$$

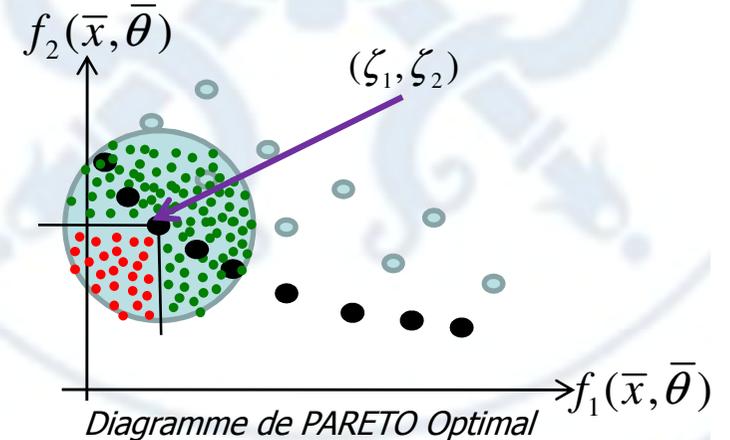
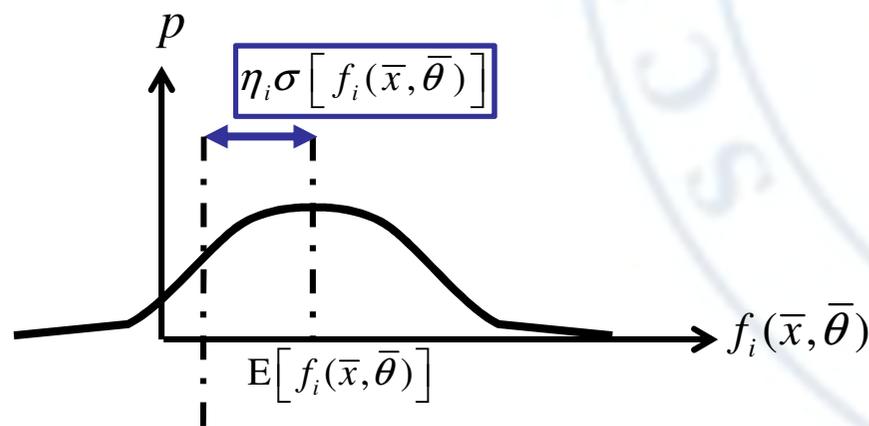
où

- \bar{f} est le vecteur des fonctions objectif, de taille m ;
- \bar{g} est le vecteur des fonctions contraintes, de taille c ;
- \bar{x} est le vecteur des variables de décision du problème déterministes de taille n ,
- $\bar{\theta}$ est le vecteur des variables stochastiques Gaussienne non corrélées de taille s .
- $E[\dots]$ et $\sigma[\dots]$ les opérateurs de moyenne et d'écart-type.

• Variables de décision déterministes

$$\begin{matrix} \boxed{X_1} & \boxed{X_2} & \dots & \boxed{X_n} \end{matrix} + \begin{matrix} \boxed{\eta_1} & \dots & \boxed{\eta_m} \end{matrix} = \begin{matrix} \overbrace{\boxed{X_1} \ \boxed{X_2} \ \dots \ \boxed{X_n}}^n \ \overbrace{\boxed{\eta_1} \ \dots \ \boxed{\eta_m}}^m \end{matrix}$$

• **P non-dominance** représente la probabilité que le front trouvé soit dominé à $\alpha^{\bar{f}}$ %.



$$\zeta_i = E[f_i(\bar{x}, \bar{\theta})] + \eta_i \sigma[f_i(\bar{x}, \bar{\theta})]$$

- **Contexte de l'optimisation multicritère**

- Formulation déterministe du problème
- Détermination des solutions de PARETO
- Algorithme génétique de résolution du problème d'optimisation
- Un exemple d'optimisation de forme

- **Une formulation pour la prise en compte des incertitudes**

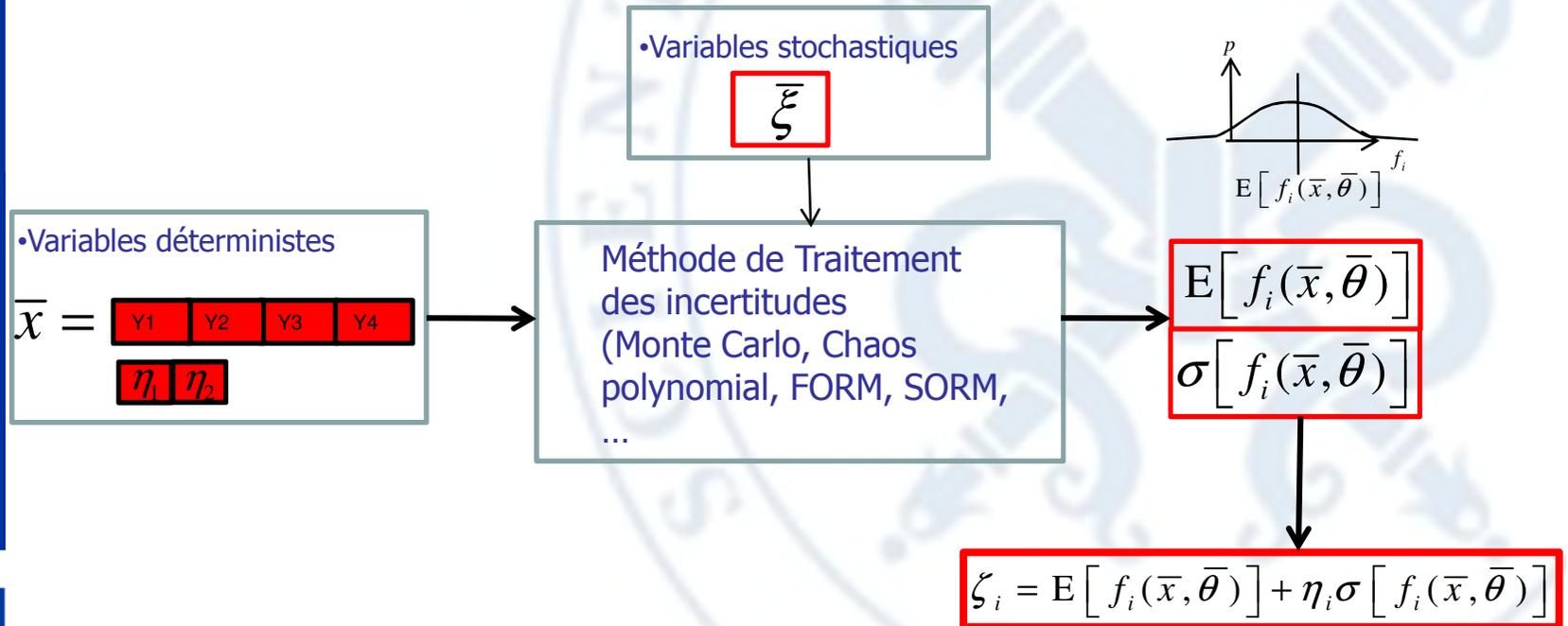
- Présentation de la formulation du problème d'optimisation
- **Traitement des incertitudes par Collocation**
- Résultats pour l'optimisation de treillis

- **Conclusion et perspectives**

Principe non intrusif de Traitement des incertitudes



Pour chaque individu:



Development des variables stochastiques en chaos polynomial

•Chaos polynomial à plusieurs variables

(Polynomes d'Hermite): *(Wiener 1938; Ghanem, Spanos, 1991)*

« Le chaos polynomial d'ordre N est constitué de tous les polynômes orthogonaux d'ordre N faisant intervenir toutes les combinaisons possibles de variables aléatoires » *(Berveiller, 2005)*

•Termes du chaos polynomial

$$\psi_k(\xi_1, \dots, \xi_m) = \prod_{j=1}^s H_{k_j}(\xi_j)$$

•Nombre de termes

$$P = \sum_{k=0}^N C_{M+k+1}^k = \frac{(M+N)!}{M!N!}$$

•Développement de la fonction aléatoire

$$\tilde{f}(\xi_1, \dots, \xi_m) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(\bar{\xi}) \gamma_j = f_{moy} + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(\bar{\xi}) \gamma_j \approx f_{moy} + \sum_{j=1}^{P-1} \psi_j(\bar{\xi}) \gamma_j$$

Chaos polynomial multivariable avec polynômes d'Hermite s = 2, n = 2 :

$\Psi_0(\bar{\xi}) = \psi_0(\xi_1)\psi_0(\xi_2) = 1;$

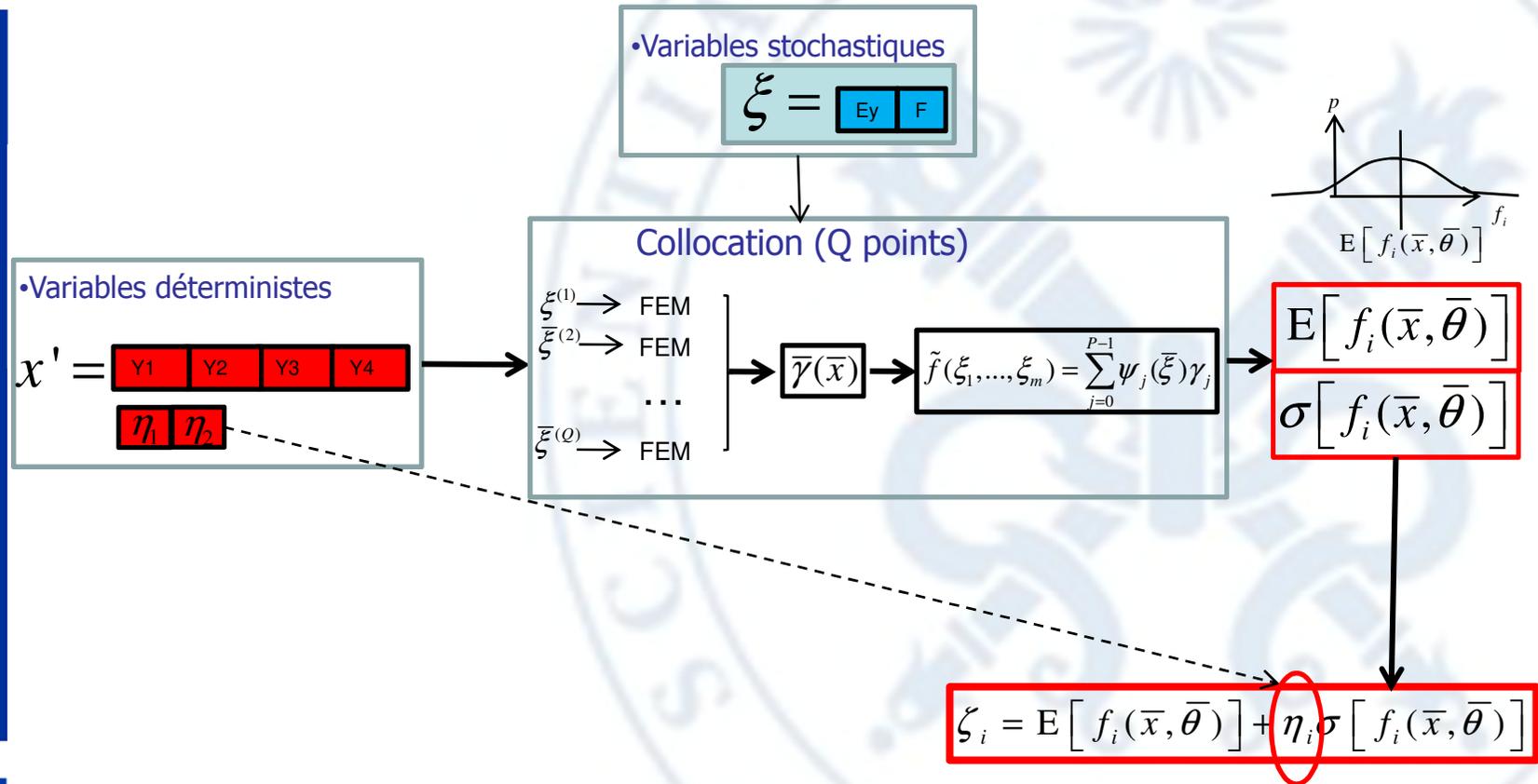
$\Psi_1(\bar{\xi}) = \psi_1(\xi_1)\psi_0(\xi_2) = \xi_1;$

$\Psi_2(\bar{\xi}) = \psi_0(\xi_1)\psi_1(\xi_2) = \xi_2;$

$\Psi_3(\bar{\xi}) = \psi_2(\xi_1)\psi_0(\xi_2) = \xi_1^2 - 1;$

$\Psi_4(\bar{\xi}) = \psi_1(\xi_1)\psi_1(\xi_2) = \xi_1\xi_2;$

$\Psi_5(\bar{\xi}) = \psi_0(\xi_1)\psi_2(\xi_2) = \xi_2^2 - 1;$



- **Contexte de l'optimisation multicritère**
 - Formulation déterministe du problème
 - Détermination des solutions de PARETO
 - Algorithme génétique de résolution du problème d'optimisation
 - Un exemple d'optimisation de forme

- **Une formulation pour la prise en compte des incertitudes**
 - Présentation de la formulation du problème d'optimisation
 - Traitement des incertitudes par Collocation
 - Résultats pour l'optimisation de treillis

- **Conclusion et perspectives**

Exemple de résultats

$$\min_{\bar{x}, \bar{\eta}} \bar{\zeta} = [\zeta_1, \dots, \zeta_m]$$

sous les contraintes:

$$P_{\text{non-dominance}} \equiv P[\bar{f}(\bar{x}, \bar{\theta}) \succ \bar{\zeta}] \geq \alpha^{\bar{f}}$$

$$P_{\text{sécurité}} \equiv P[\bar{g}(\bar{x}, \bar{\theta}) \leq 0] \geq \alpha^{\bar{g}}$$

avec

$$\zeta_i = E[f_i(\bar{x}, \bar{\theta})] + \eta_i \sigma[f_i(\bar{x}, \bar{\theta})]$$

• Treillis à 10 barres

• Variables de décision déterministe

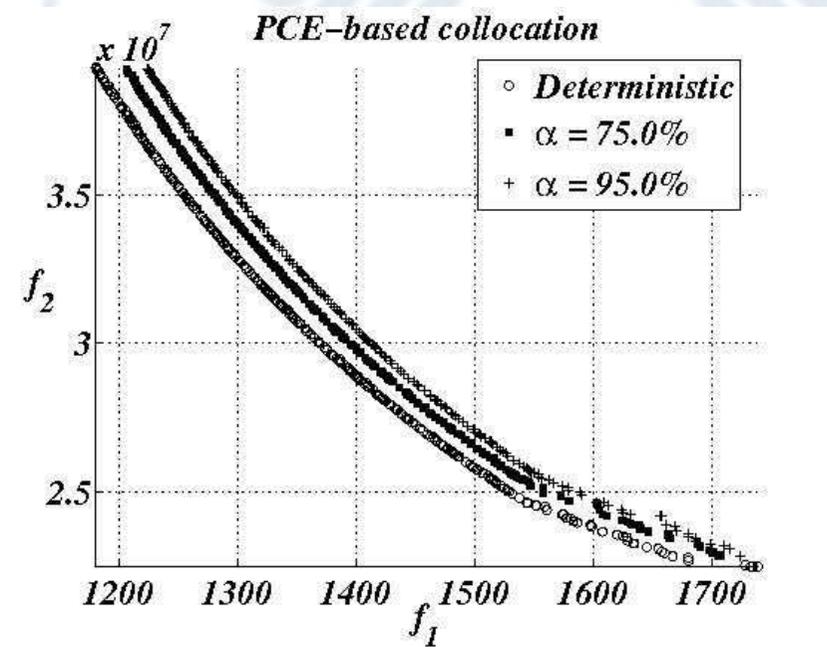
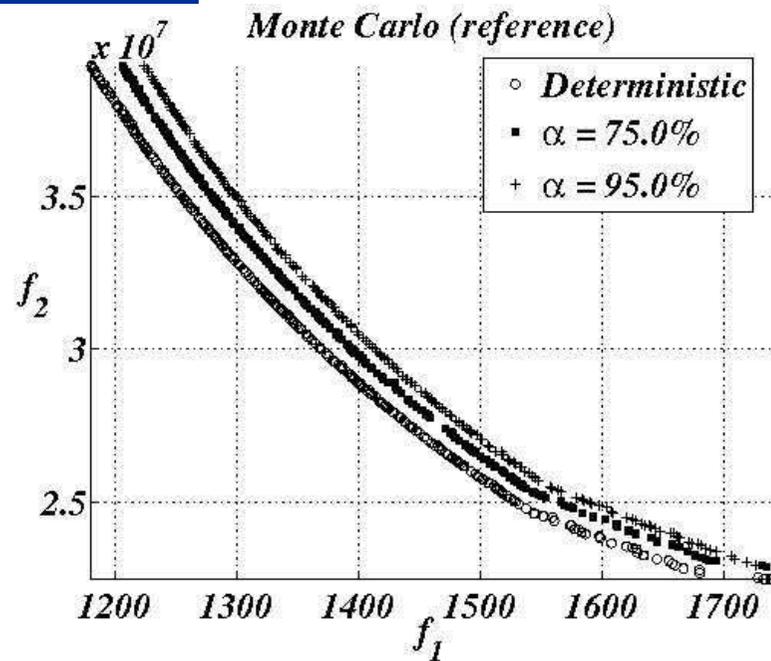
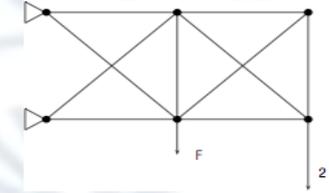
$$S1 \quad S2 \quad + \quad \eta_1 \quad \eta_2$$

• Variables de décision stochastique (gaussienne non corrélée)

$$E_y \quad F$$

• Fonctions d'évaluation

$$\longrightarrow \begin{cases} F1 = \text{Masse} \\ F2 = \text{Contrainte axiale max} \end{cases}$$



- **Contexte de l'optimisation multicritère**

- Formulation déterministe du problème
- Détermination des solutions de PARETO
- Algorithme génétique de résolution du problème d'optimisation
- Un exemple d'optimisation de forme

- **Une formulation pour la prise en compte des incertitudes**

- Présentation de la formulation du problème d'optimisation
- Traitement des incertitudes par Collocation
- Résultats pour l'optimisation de treillis

- **Conclusion et perspectives**

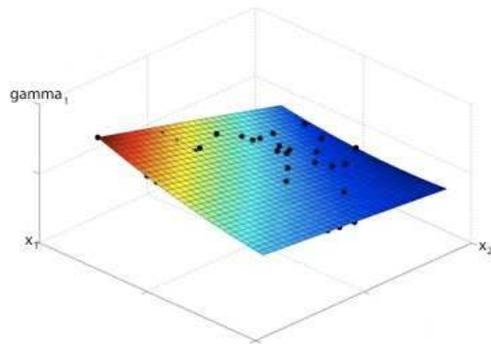
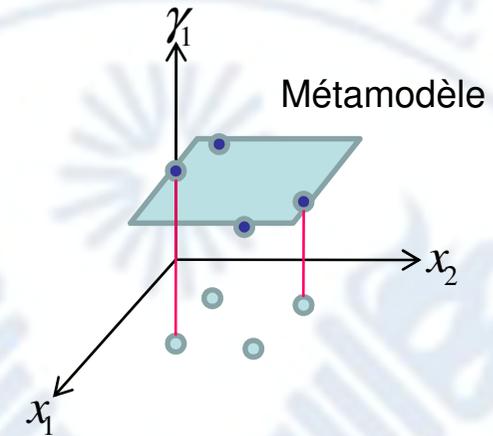
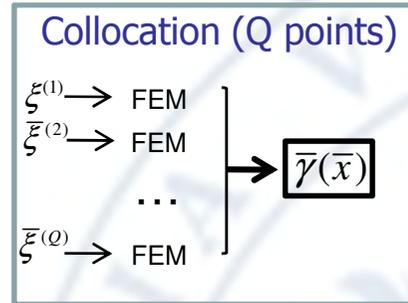
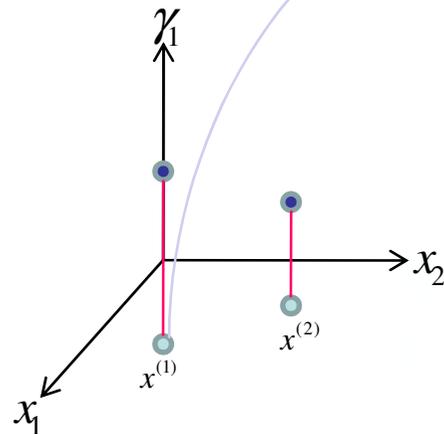
Conclusions

- La prise en compte des incertitudes par la formulation proposée met à disposition de nouvelles informations précieuses sur l'approche fiabiliste de la dominance des solutions de PARETO.
- Sur des cas simples, bonne précision des métamodèles stochastiques calculés par collocation et gain de temps substantiel: la méthode est validée!
- D'autres cas restent à traiter pour la prise en compte de contraintes fiabilistes
- L'analyse de sensibilité des diverses solutions de PARETO est à explorer.
- Le coût reste élevé en temps de calculs
 - À cause des algorithmes génétiques
 - À cause des simulations stochastiques

- Amélioration du temps de calcul:
 - Calcul haute performance parallèle
 - Métamodèle à 2 niveaux avec processus d'apprentissage.
- Traiter le cas de variables non gaussiennes et corrélées:
 - Décomposition des variables non gaussiennes en variables gaussiennes (*M.Berveiller, B.Sudret, 2005*)
 - Utilisation du chaos polynomial généralisé (*B.Sudret, Der Kiureghian, 2000*)

Détermination des coefficients du chaos polynomial par métamodèles

• Collocation



$$\Gamma(\bar{x}) = C(\Xi) \bar{s}(\bar{x}, \Xi)$$

Définir une surface de réponse telle que:
 $\bar{x} \mapsto \Gamma(\bar{x})$

DOE $\{ \bar{x}^{(1)} \dots \bar{x}^{(nDOE)} \} \mapsto \{ \Gamma^{(1)} \dots \Gamma^{(nDOE)} \}$

• **Méthodes:** RBF, MLS, Polynomial responses surfaces, ANN, SVM, Evolutionary responses surfaces

• **Perspectives:** Améliorer la méthodologie par des processus d'apprentissage

BATir

SERVICE CONSTRUCTION, ARCHITECTURE ET URBANISME
DEPARTMENT OF BUILDING, ARCHITECTURE AND TOWN PLANNING

MERCI DE VOTRE ATTENTION !

J. Lebon[†]
Philippe Bouillard[†]
Rajan Filomeno Coelho[†]

jlebon@batir.ulb.ac.be
Philippe.Bouillard@ulb.ac.be
rfilomen@ulb.ac.be

† Université Libre de Bruxelles, Service BATir
Université Libre de Bruxelles
Service BATir - CP 194/2
avenue Roosevelt, 50
B-1050 BRUXELLES (Belgique)

ULB

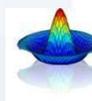
BATir

ULB

**Journées Doctorales
MASCOT NUM 2010**
16 au 19 Mars 2010,
AVIGNON, FRANCE

Biosstatistique
390/Π
de Processus Spatiaux

MIA_s

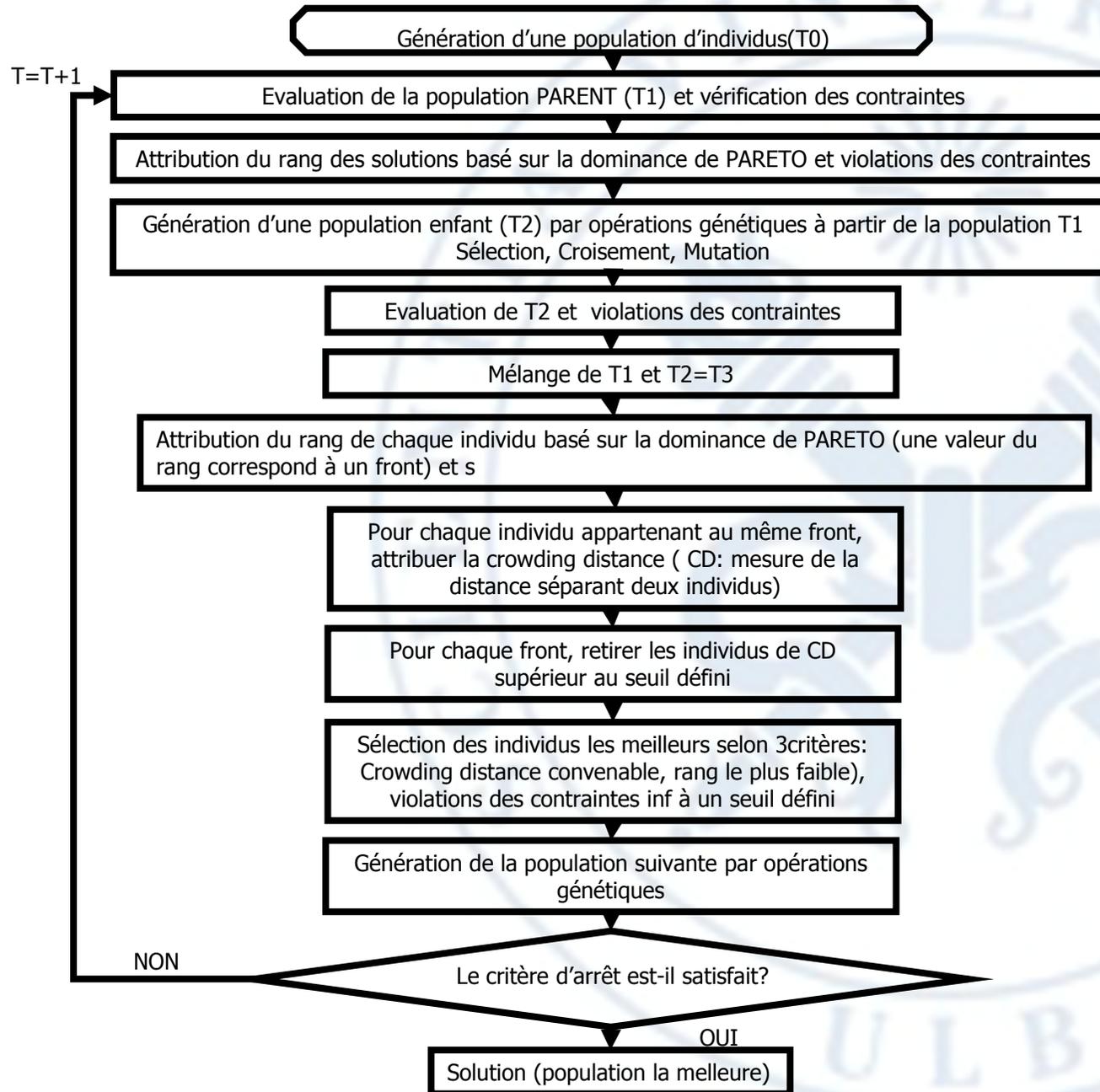
 **MEXICO**
WEXICO

UNIVERSITÉ
D'AVIGNON
UNIVERSITÉ D'AVIGNON
ET DES PAYS DE VAUCLUSE


dépasser les frontières

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES, UNIVERSITÉ D'EUROPE

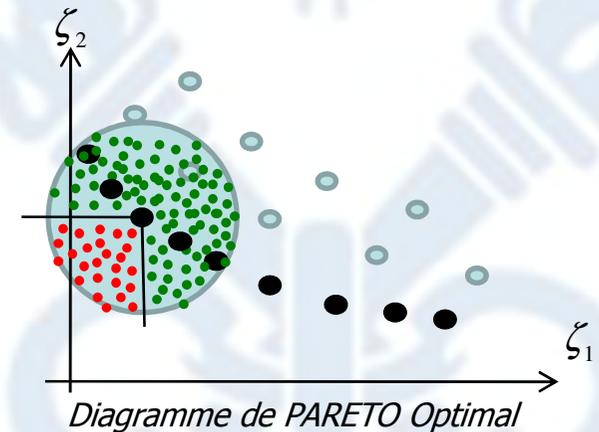
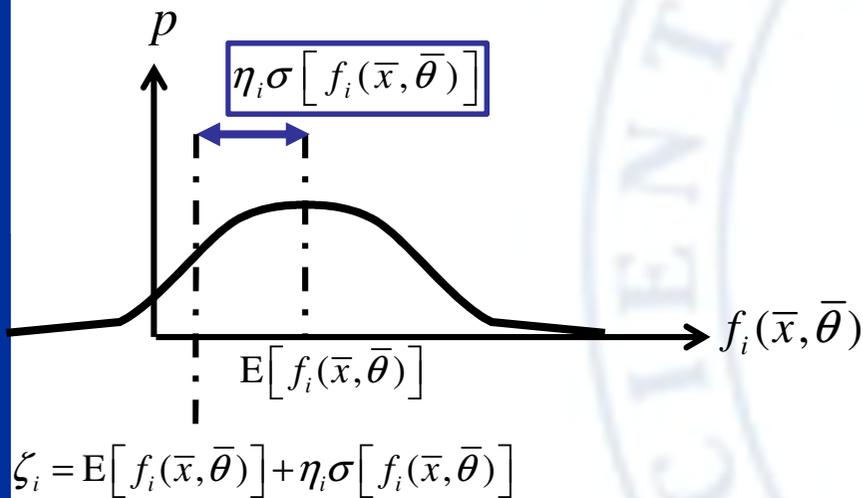
Algorithmes génétiques (NSGA II)

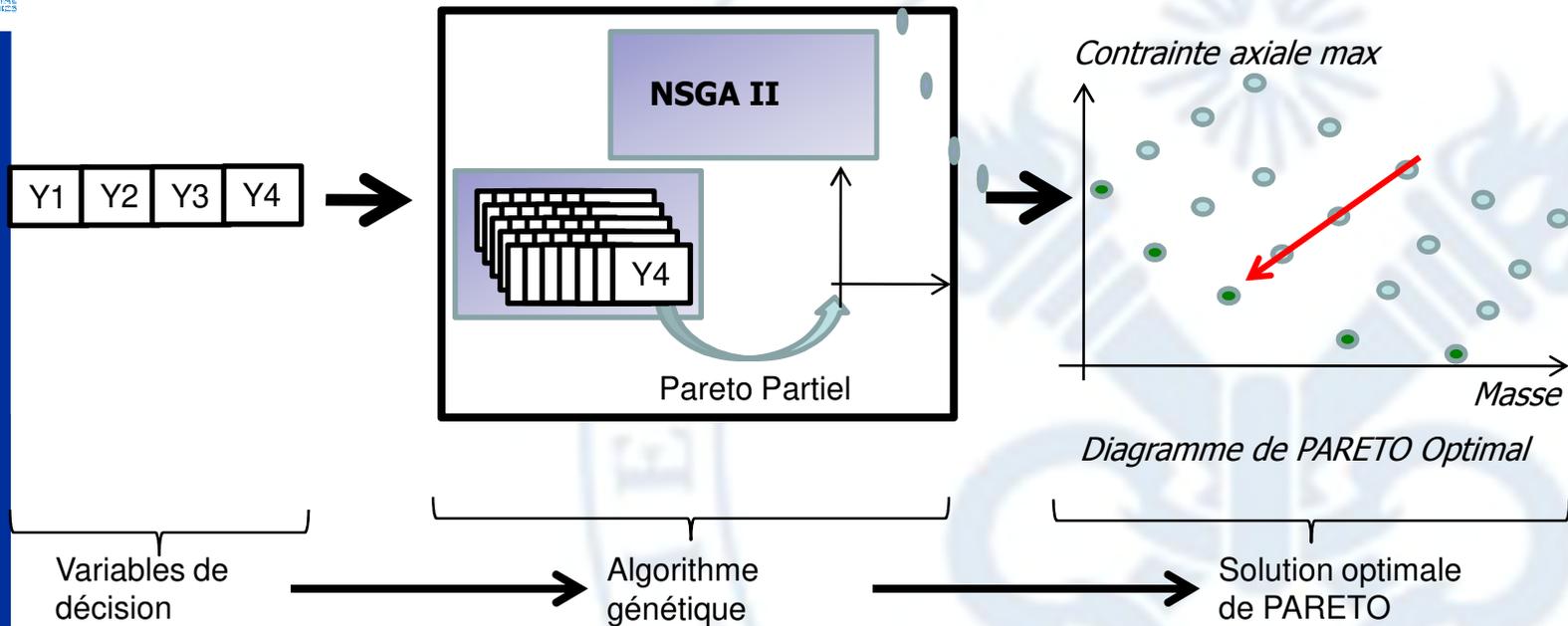


Bornes fixées a priori:

$$\eta_i \in [-1; 5]$$

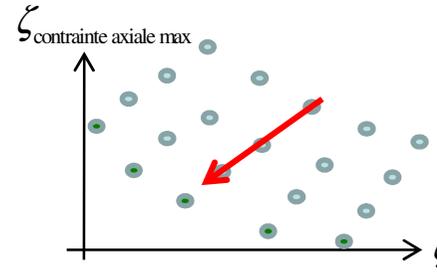
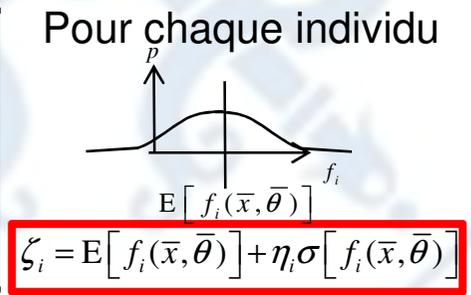
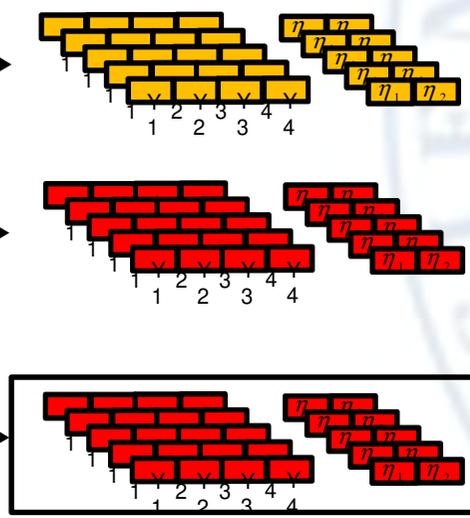
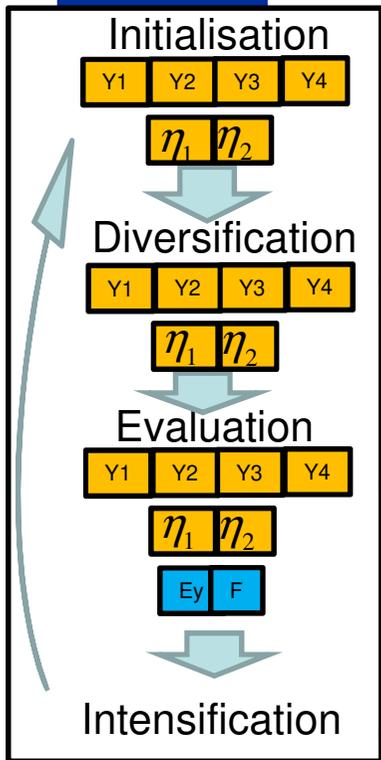
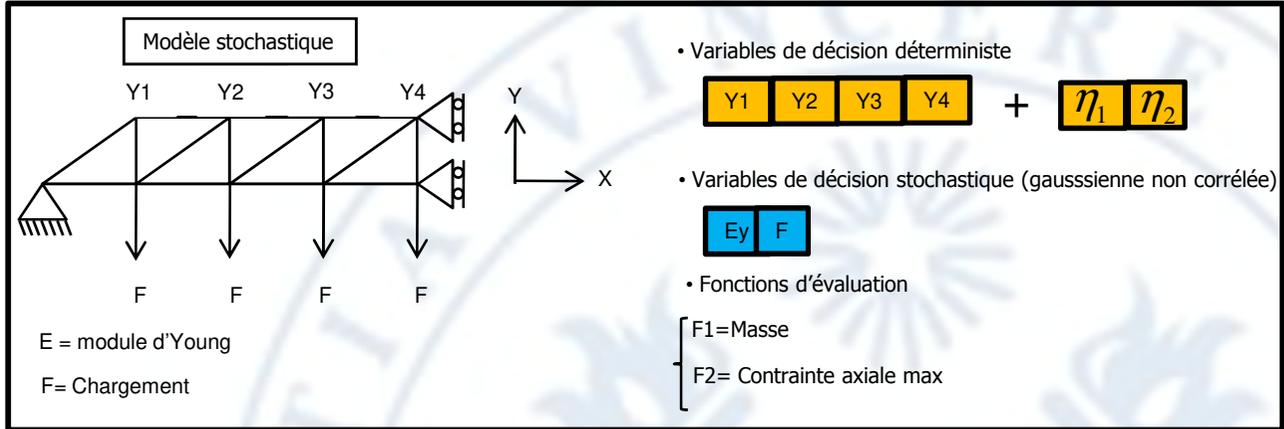
- **P non-dominance** représente la probabilité que le front trouvé soit dominé à α^j %.





Mise en oeuvre de la formulation

$\min_{\bar{x}, \bar{\eta}} \bar{\zeta} = [\zeta_1, \dots, \zeta_m]$
 sous les contraintes:
 $P_{\text{non-dominance}} \equiv P[\bar{f}(\bar{x}, \bar{\theta}) \succ \bar{\zeta}] \geq \alpha^{\bar{f}}$
 $P_{\text{sécurité}} \equiv P[\bar{g}(\bar{x}, \bar{\theta}) \leq 0] \geq \alpha^{\bar{g}}$
 avec
 $\zeta_i = E[f_i(\bar{x}, \bar{\theta})] + \eta_i \sigma[f_i(\bar{x}, \bar{\theta})]$



$$\zeta_{\text{masse}} = E[f_{\text{masse}}(\bar{x}, \bar{\theta})] + \eta_{\text{masse}} \sigma[f_{\text{masse}}(\bar{x}, \bar{\theta})]$$

$$\zeta_{\text{contrainte ax max}} = E[f_{\text{c ax max}}(\bar{x}, \bar{\theta})] + \eta_{\text{c ax max}} \sigma[f_{\text{c ax max}}(\bar{x}, \bar{\theta})]$$

La méthode de collocation ou encore de régression linéaire permet le calcul non intrusif des coefficients du développement en chaos polynomial d'une variables aléatoire.

$$1: \tilde{f}(\xi_1, \dots, \xi_m) = f_{moy} + \sum_{j=1}^{P-1} \psi_j(\bar{\xi}) \gamma_j$$

2: Plan d'expérience: $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(Q)}$

$$3: \begin{Bmatrix} f(\bar{\xi}^{(1)}) \\ \vdots \\ f(\bar{\xi}^{(Q)}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_0(\bar{\xi}^{(1)}) & \dots & \Psi_{P-1}(\bar{\xi}^{(1)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \Psi_0(\bar{\xi}^{(Q)}) & \dots & \Psi_{P-1}(\bar{\xi}^{(Q)}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_{P-1} \end{Bmatrix}$$

ou encore

$$\bar{f}(\Xi) = \Psi(\Xi) \bar{\gamma}$$

$$4: \bar{\gamma} = C(\Xi) \bar{s}(\Xi) \text{ ou } \Gamma = C(\Xi) \bar{s}(\Xi)$$

$C(\Xi)$ ne dépend que des points de collocations et peut donc être calculé une fois pour toute.