



## Stratification Directionnelle Adaptative pour l'estimation contrôlée de probabilités d'évènements rares

*GdR MASCOT-NUM - Mai 2010*



J. Garnier, M. Munoz Zuniga



E. Remy, E. de Rocquigny, A. Arnaud

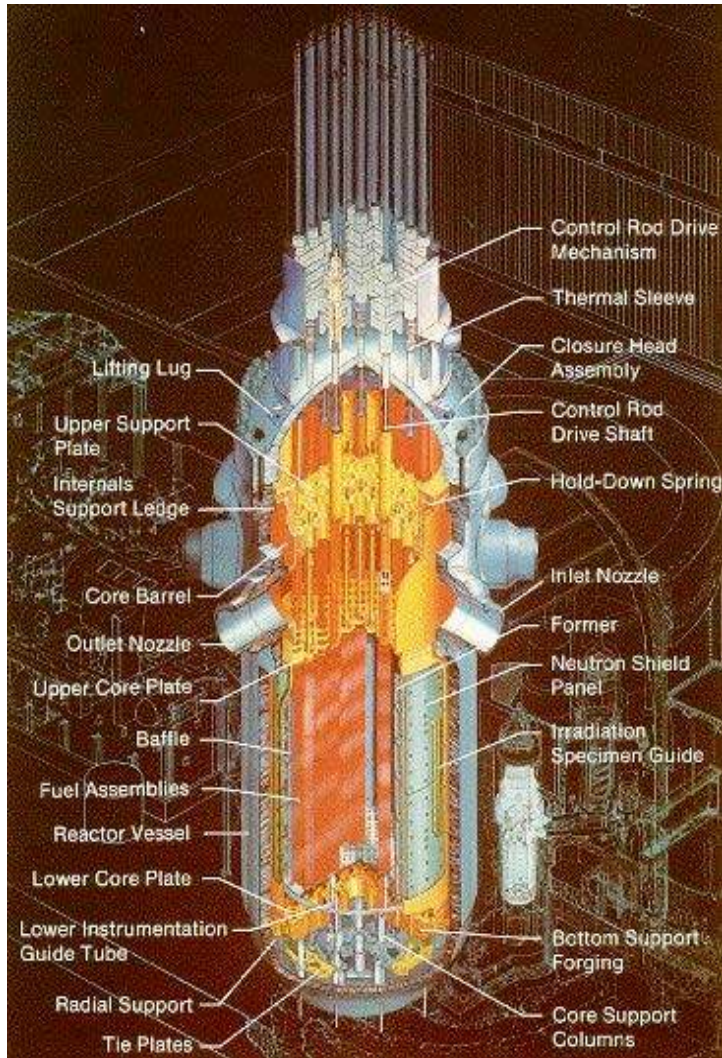


*EDF R&D : Créer de la valeur et préparer l'avenir*

## Contexte

- 1) La cuve d'une centrale nucléaire
- 2) Difficultés sous-jacentes

# 1.1 La cuve de la centrale nucléaire : un composant sous de fortes contraintes



## Situation normale :

- Pression : 155 bar
- Exposition à l'irradiation

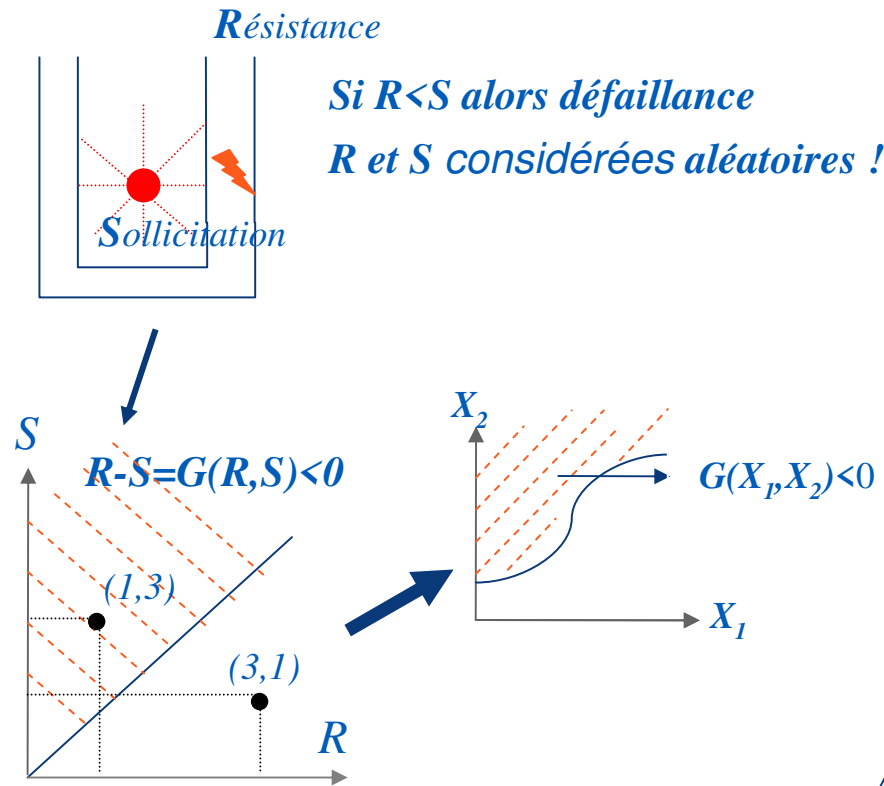
## Situation extrême :

- Micro-défaut de fabrication
- Choc thermique (liquide  $\sim 10^{\circ}$  C injecté dans un liquide à  $\sim 300^{\circ}$  C)

Dans ce cadre extrême, que vaut la probabilité de défaillance ?

Quels sont les caractéristiques de ce genre de problèmes ?

# 1.2 La cuve de la centrale nucléaire : problème type



$X_1, \dots, X_p$  : variables aléatoires impliquées dans l'événement menant à la défaillance

$$\text{Probabilité de défaillance} = P(G(X_1, \dots, X_p) \leq 0)$$

$$P_f = P(G(X) \leq 0) = E(1_{G(X) \leq 0}) = \int 1_{G(x) \leq 0} f_X(x) dx$$

Caractéristiques de la cuve :

- Modèle physique la représentant complexe
- Défaillance rare

**500 à 3000 appels maximum à la fonction de défaillance  $G$**

## 1.3 Objectif et contraintes

**Notre but : développer une méthode de simulation sous les contraintes suivantes**

- **(C0)** Résultat devant être robuste (intervalle de confiance sur  $P_f$  )
- **(C1)** Nombre d'appels à la fonction  $G$  limité (modèle à temps de calculs élevé)
- **(C2)** Méthode adaptée à l'estimation de faibles probabilités



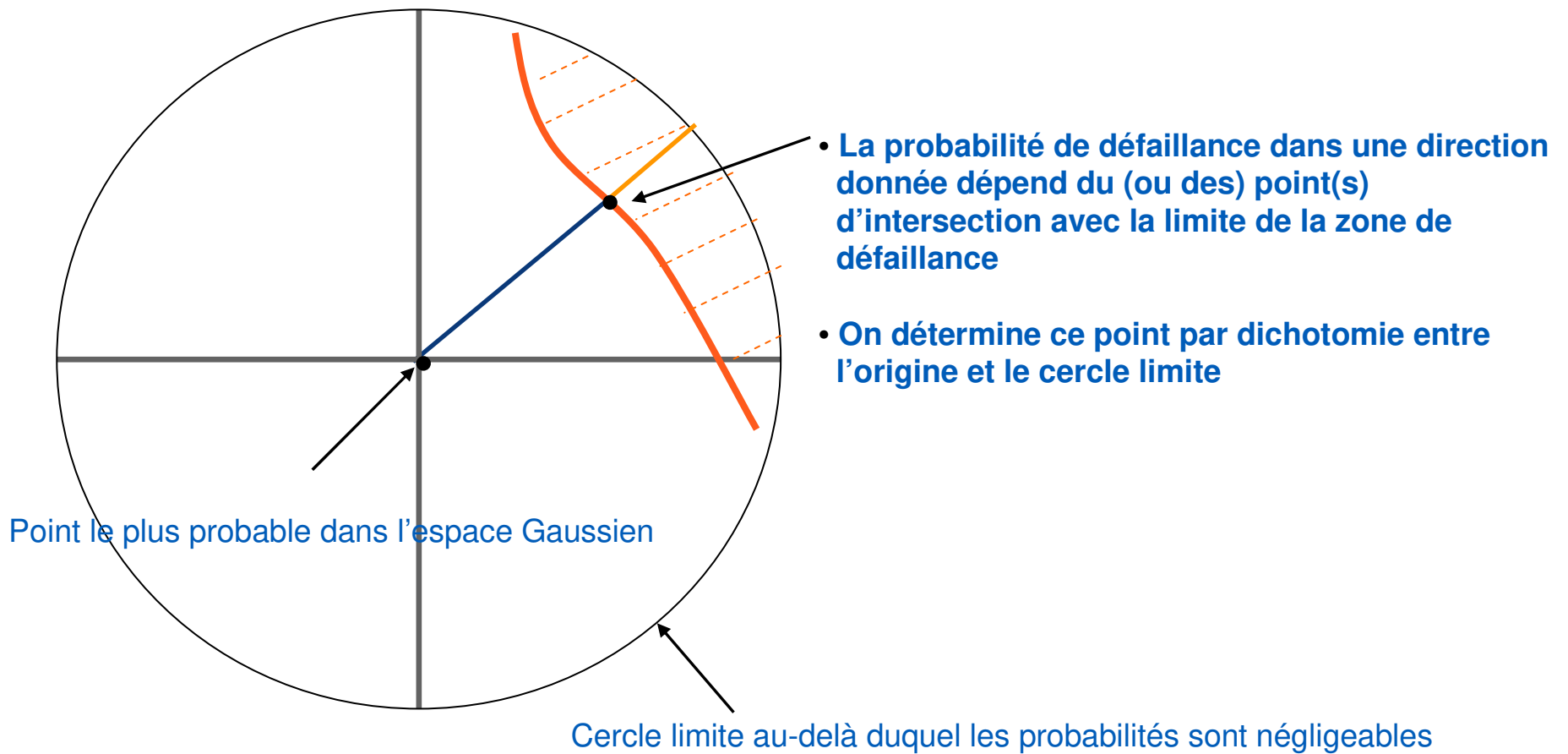
# Stratification Directionnelle Adaptative

- 1) Illustration graphique
- 2) Estimateurs
- 3) Résultats numériques

## 2.1 Illustration graphique de la méthode

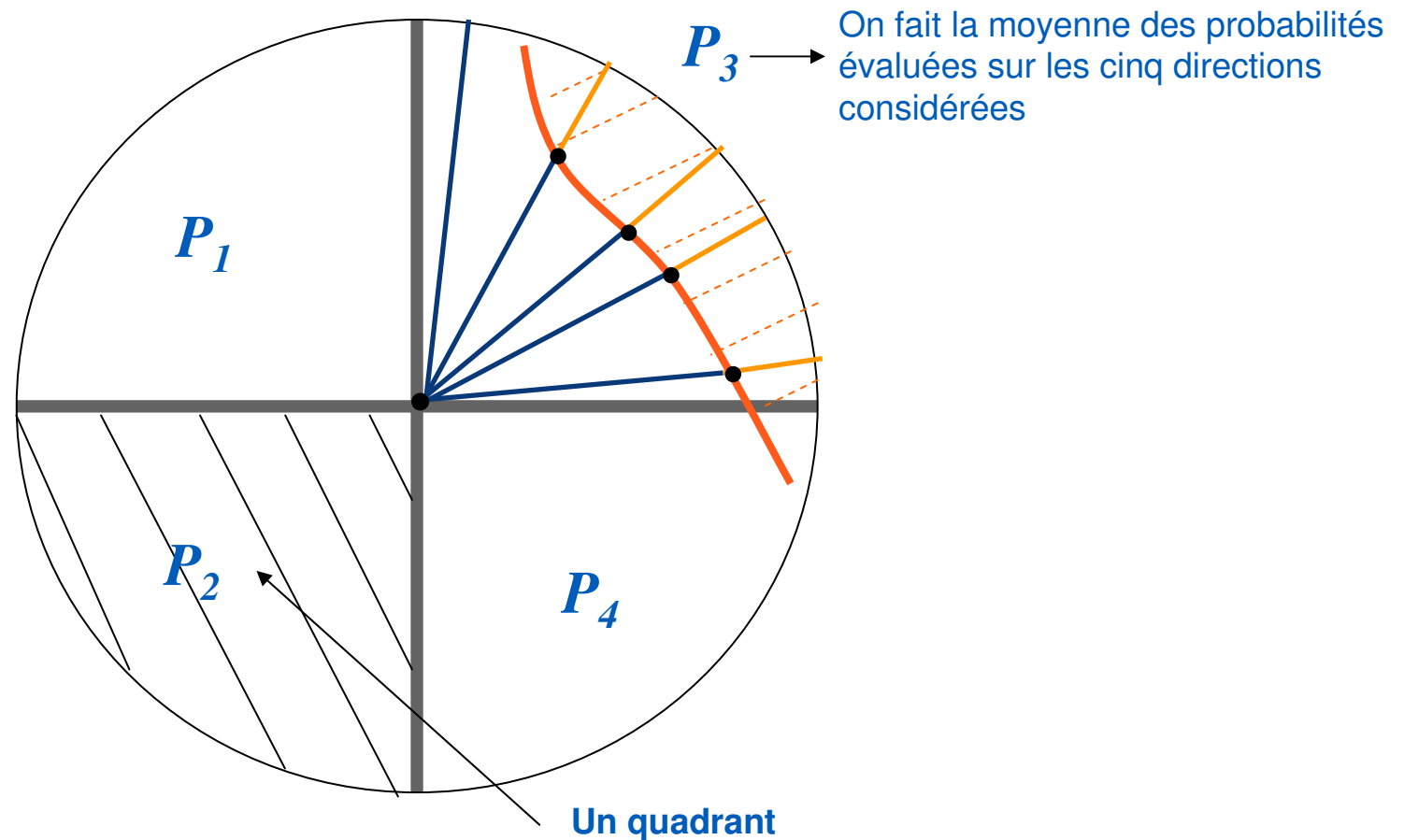
**Espace Gaussien** : le point de plus forte probabilité est à l'origine de l'espace – la probabilité de se trouver en un point de l'espace Gaussien est inversement proportionnelle à la distance à l'origine

**Un point de l'espace Gaussien = un état des paramètres de la cuve**



## 2.1 Illustration graphique de la méthode

- On découpe l'espace en quadrants
- On peut alors estimer la probabilité de défaillance par quadrant



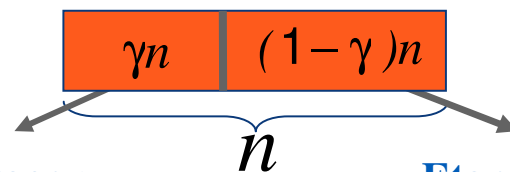


## 2.1 Illustration graphique de la méthode

Espace Gaussien

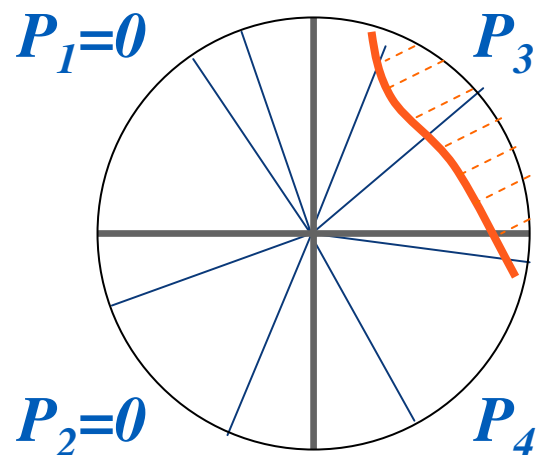
Nombre de quadrants :  $m = 2^p$

Nombre de directions :  $n$

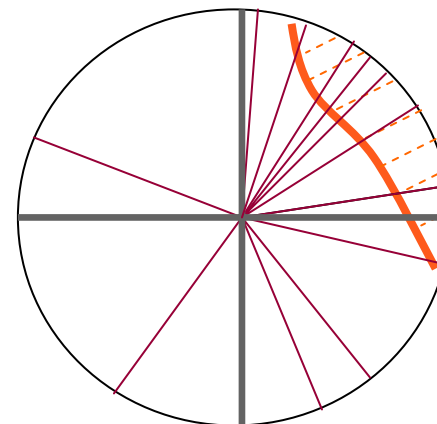


- **Etape d'apprentissage :** stratification en quadrants et simulation directionnelle

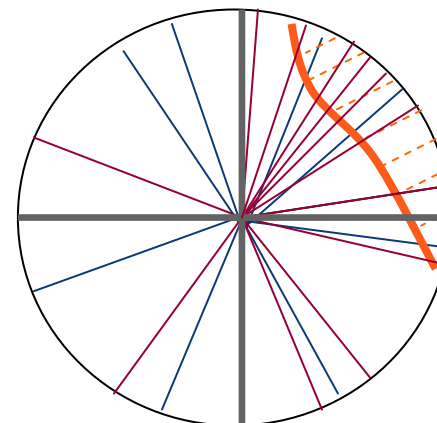
- **Etape d'estimation :** répartition des simulations directionnelles au vu de l'apprentissage et estimation finale



Sans Recyclage



Avec Recyclage



## 2.2 Estimateur sans recyclage

- Avec le nombre restreint d'appels à la fonction de défaillance  $G$ , l'estimateur sans recyclage est plus fiable que celui avec recyclage
- L'estimateur **avec recyclage est biaisé** avec un **biais difficile à corriger et à estimer** avec le **nombre restreint d'appels** à la fonction de défaillance  $G$  considérée
- Nous perdrons un facteur sur la variance, mais l'augmentation de celle-ci est contrôlable, et de plus négligeable comme nous avons pu le constater sur des exemples numériques

Résultat asymptotique : 
$$\sqrt{n} \left( \hat{P}_{sr}^{2SDA} - P_f \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathcal{N} \left( 0, \frac{\sigma_{opt}^2}{1 - \gamma} \right)$$

- 2-SDA fournit également un estimateur de la variance de l'estimation qui permet de proposer un intervalle de confiance non-asymptotique valable pour un nombre de simulations raisonnable

## 2.3. 2-SDA : résultats numériques sur le modèle de la cuve

⊙  $p=3$  variables aléatoires :

*Tous les résultats sont conditionnels à un évènement initiateur*

| Méthode     | Nombre de directions | Nbre d'appels à $G$ | Estimation de $P_f$  | Erreur relative (%) |
|-------------|----------------------|---------------------|----------------------|---------------------|
| 2-SDA (s.r) | 180                  | 1181                | $5. \cdot 10^{-6}$   | 20                  |
| 2-SDA (s.r) | 600                  | 3832                | $4,5. \cdot 10^{-6}$ | 12                  |
| SD          | 500                  | 1573                | $6. \cdot 10^{-6}$   | 30                  |
| SD          | 1000                 | 3116                | $8. \cdot 10^{-6}$   | 21                  |
| FORM        | /                    | 90                  | $9. \cdot 10^{-6}$   | /                   |
| SORM        | /                    | 1668                | $5. \cdot 10^{-5}$   | /                   |

- 2-SDA donne des valeurs de probabilités du même ordre que les méthodes FORM-SORM, mais est fiable
- Pour une même valeur d'erreur relative d'estimation, en comparaison avec SD, la méthode 2-SDA permet **de réduire par un facteur 3 le nombre d'appels à la fonction de défaillance**

Remarque : pour un nombre d'appels à  $G$  petit, le paramètre  $\gamma$ , représentant le pourcentage de directions allouées à l'étape d'apprentissage, doit être choisi soigneusement pour obtenir des intervalles de confiance adéquats. Ici  $\gamma = 0.5$



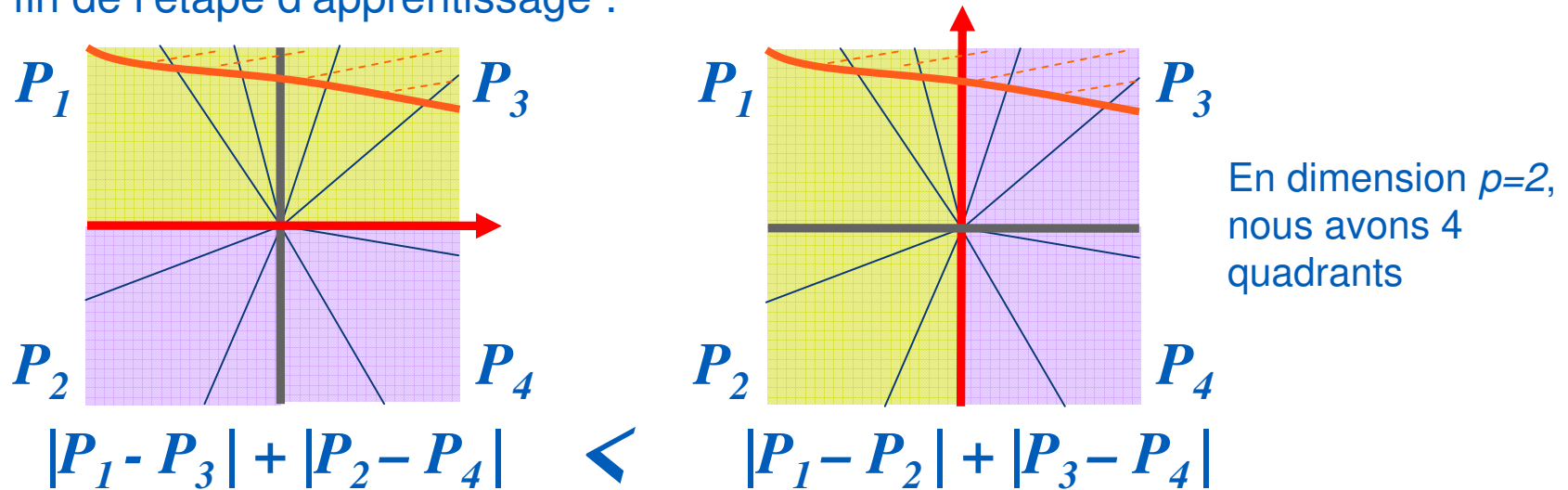
*EDF R&D : Créer de la valeur et préparer l'avenir*

## 2-SDA extensions (fléau de la dimension)

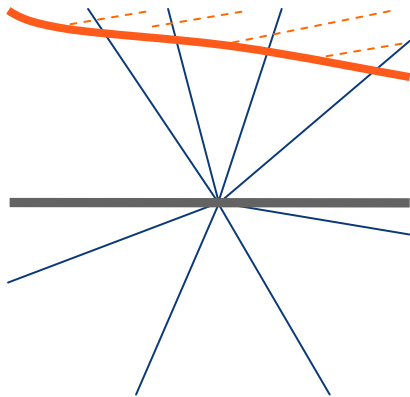
- 1) Classification des variables d'entrée et fusion de quadrants
- 2) SDA et Design Point

## 3.1 2-SDA+ : classification des variables d'entrée et fusion de quadrants

A la fin de l'étape d'apprentissage :



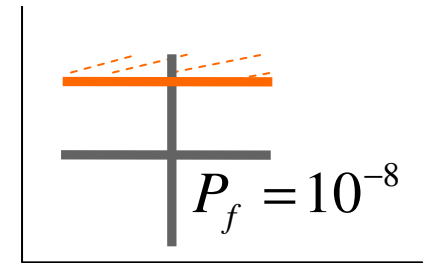
On stratifie uniquement les directions importantes  
(dans cet exemple, après sélection, nous considérerons uniquement deux quadrants)



**Avec les nouveaux quadrants :**

- on recommence l'étape d'apprentissage (réutiliser les simulations déjà réalisées)
- puis on passe à l'étape d'estimation

## 3.1 2-SDA+ : résultats numériques



◎  $p=5$  variables aléatoires :

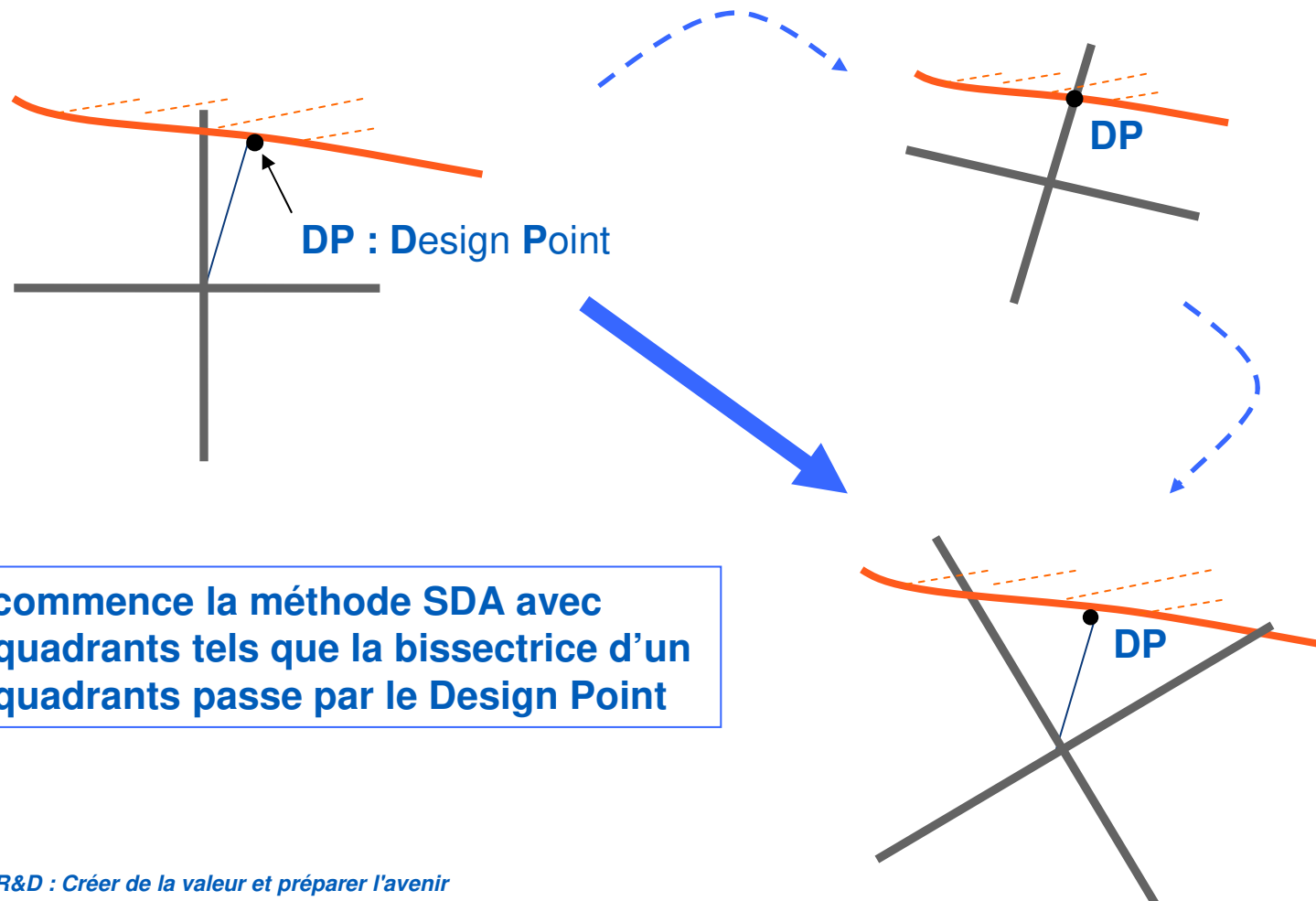
*Pour la cuve, les résultats sont conditionnels à un évènement initiateur*

| Cas d'étude | Méthode      | Nombre de directions | Nbre d'appels à G | Estimation de $P_f$ | Erreur relative (%) | PCI |
|-------------|--------------|----------------------|-------------------|---------------------|---------------------|-----|
| Hyperplan   | 2-SDA+ (s.r) | 1024                 | 2556              | $9,6. 10^{-9}$      | 59                  | 60  |
| Hyperplan   | 2-SDA (s.r)  | 1024                 | 3832              | $9,1. 10^{-9}$      | 70                  | 50  |
| Cuve        | 2-SDA+ (s.r) | 2048                 | 4680              | $5,3. 10^{-7}$      | 38                  | /   |
| Cuve        | 2-SDA (s.r)  | 2048                 | 6750              | $7,7. 10^{-7}$      | 53                  | /   |

Pour un **nombre d'appels** à la fonction de défaillance **dans la limite fixée**, que la surface de défaillance soit **concentrée dans un quadrant** (cas cuve) **ou répartie sur plusieurs quadrants** (cas hyperplan), **2-SDA+ donne des erreurs relatives inférieures à celles fournies par 2-SDA classique**

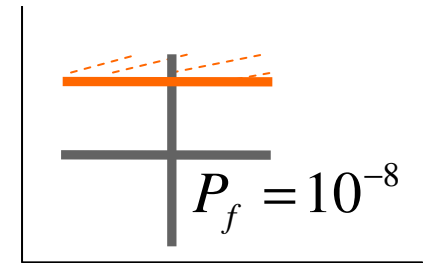
## 3.2 SDA-DP : SDA et Design Point

- On appelle design point le point de défaillance le plus probable
- Dans l'espace Gaussien, c'est le point de la surface de défaillance le plus proche de l'origine



On commence la méthode SDA avec des quadrants tels que la bissectrice d'un des quadrants passe par le Design Point

## 3.2 SDA-DP : résultats numériques



⊙  $p=5$  variables aléatoires :

| Méthode        | Nombre de directions | Nbre d'appels à G | Estimation de $P_f$  | Erreur relative (%) | PCI |
|----------------|----------------------|-------------------|----------------------|---------------------|-----|
| 2-SDA-DP (s.r) | 256                  | 1700              | $9,89 \cdot 10^{-9}$ | 28                  | 92  |
| 2-SDA-DP (s.r) | 512                  | 3290              | $9,98 \cdot 10^{-9}$ | 21                  | 92  |
| 2-SDA+ (s.r)   | 512                  | 1278              | $1,03 \cdot 10^{-8}$ | 79                  | 48  |
| 2-SDA (s.r)    | 512                  | 1387              | $9,94 \cdot 10^{-9}$ | 78                  | 42  |
| 2-SDA-DP (s.r) | 1024                 | 6503              | $9,98 \cdot 10^{-9}$ | 15                  | 94  |
| 2-SDA+ (s.r)   | 1024                 | 2553              | $9,6 \cdot 10^{-9}$  | 59                  | 60  |
| 2-SDA (s.r)    | 1024                 | 2634              | $9,1 \cdot 10^{-9}$  | 70                  | 50  |

- Pour un **nombre d'appels** à la fonction de défaillance **dans la limite fixée**, **2-SDA-DP ramène un cas quelconque à un cas optimum** pour la méthode 2-SDA, c'est-à-dire un cas où la surface de défaillance est essentiellement concentrée dans un unique quadrant. **L'erreur relative et le pourcentage de fois où la vraie valeur estimée se trouve dans l'intervalle de confiance sont très nettement améliorés**
- Dans le cas où il existerait plusieurs DP, la méthode donnera des résultats du type 2-SDA et restera relativement plus efficace qu'une méthode standard non adaptative



# Conclusion et perspectives

**La méthode SDA répond correctement aux contraintes initiales :**

- (C0) Résultat devant être robuste (intervalle de confiance sur  $P_f$  )
- (C1) Nombre d'appels à la fonction  $G$  limité (modèle à temps de calculs élevé)
- (C2) Méthode adaptée à l'estimation de faibles probabilités

**Idées et perspectives :**

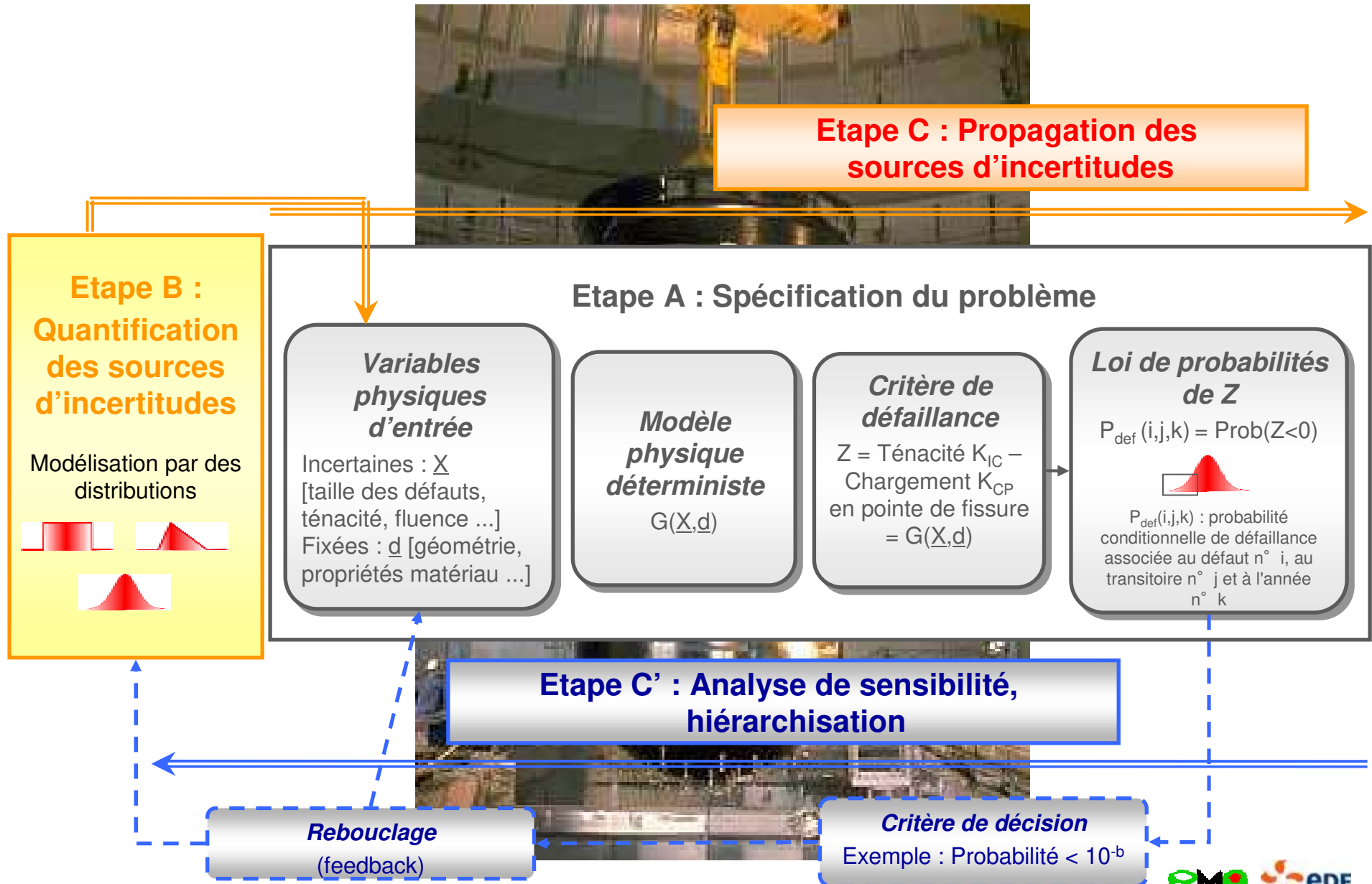
- Valider/Améliorer les intervalles de confiance (bootstrap)
- Faire du tirage de Quasi Monte-Carlo à l'étape d'apprentissage
- Déterminer si l'étape d'apprentissage est insuffisante et donc s'il est raisonnable de passer à l'étape d'estimation (bootstrap) → FAILED
- Comment choisir entre lancer SDA+ ou SDA-DP
- Placer la méthode dans un contexte plus général de tirage d'importance ou/et bayésien



*EDF R&D : Créer de la valeur et préparer l'avenir*

## Annexes

# Annexe A : référentiel "Incertitudes"



# Annexe B : recherche de zéros

