Analyse de sensibilité globale pour des modèles à paramètres d'entrée dépendants

Y. Caniou[1,2], B. Sudret[3]

[1] *Clermont Université, IFMA, EA 3867, Laboratoire de Mécanique et Ingénieries, BP 10448, F-63000 Clermont-Ferrand*
[2] *Phimeca Engineering, Centre d'Affaires du Zénith, 34 rue de Sarliève, 63800 Cournon d'Auvergne*
[3] *Ecole des Ponts ParisTech, 6-8 avenue Blaise-Pascal, Cité Descartes, 77455 Champs-sur-Marne, Marne-la-Vallée cedex 2*

1 Présentation de la problématique

L'analyse de sensibilité globale consiste à identifier et quantifier la contribution des paramètres d'entrée d'un modèle à la variabilité de sa sortie. Ce type d'analyse est notamment envisagé dans le cadre d'une étude de fiabilité, de la méthodologie globale de traitement des incertitudes ou encore en conception robuste. Pour l'ingénieur chargé de réduire la variabilité d'une grandeur d'intérêt, l'analyse de sensibilité permet de distinguer les paramètres de modélisation qu'il est nécessaire de mieux maîtriser. Pour le numéricien, elle autorise un allègement du coût numérique par une réduction du nombre de paramètres, et donc de la dimension du modèle, en éliminant ceux ne contribuant pas à la variabilité de la réponse. Ce travail s'intéresse aux cas particuliers de la modélisation où les paramètres d'entrée sont dépendants et pour lesquels les méthodes classiques d'analyse de sensibilité ne sont pas applicables. Deux méthodes alternatives permettant de prendre en compte la dépendance entre les paramètres sont présentées sous une forme optimisée pour une représentation par chaos polynomial [1, 2].

2 Analyse de sensibilité globale et expansion par chaos polynomial

Les méthodes d'analyse de sensibilité les plus fréquemment employées sont basées sur la décomposition de Sobol' de la variance de la réponse du modèle [3]. Considérons un modèle physique $\mathcal{M}$ défini par $Y = \mathcal{M}(\boldsymbol{X})$, où $\boldsymbol{X}$ est un vecteur aléatoire de dimension n. La décomposition du modèle (1) s'écrit :

$$Y \approx \mathcal{M}_0 + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathcal{M}_{i,j}(X_i, X_j) + \ldots + \mathcal{M}_{1,\ldots,n}(\boldsymbol{X}) \tag{1}$$

Les indices de sensibilité sont définis par :

$$S_i = \frac{\mathbb{V}[\mathbb{E}[Y|X_i]]}{\mathbb{V}[Y]} \tag{2}$$

où $\mathbb{E}[Y|X_i]$ est l'espérance conditionnelle de Y sachant X_i. L'indice S_i correspond à la part de variance de Y associée au paramètre X_i. L'indice total S_{Ti} défini par :

$$S_{Ti} = 1 - \frac{\mathbb{V}[\mathbb{E}[Y|X_{\sim i}]]}{\mathbb{V}[Y]} \tag{3}$$

où $\mathbb{E}[Y|X_{\sim i}]$ est l'espérance conditionnelle de Y sachant $X_j,\ j \neq i$, correspond à la part de variance de Y associée au paramètre X_i et à ses interactions avec les autres paramètres [4]. Comme le montre les équations (2) et (3), l'estimation des indices de sensibilité est numériquement coûteuse le calcul des moments de Y requiert de nombreux appels au modèle. Dans le cas où le modèle physique fait intervenir un module externe, un code éléments finis par exemple, le nombre d'évaluations possibles est souvent limité à quelques centaines. Malgré le développement d'algorithmes alternatifs visant à tirer le meilleur des données dont on dispose [5], ce nombre se révèle insuffisant en terme de précision de calcul. On préfère alors remplacer le modèle physique $\mathcal{M}$ par un méta-modèle $\hat{\mathcal{M}}$. L'expansion par chaos polynomial de degré p [1] est une technique permettant de décomposer le modèle physique sur une base adaptée de dimension finie $\{\psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{X}), |\boldsymbol{\alpha}| \leq p\}$ (4) telle que :

$$Y \approx \hat{\mathcal{M}}(\boldsymbol{X}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq p} a_{\boldsymbol{\alpha}} \psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{X}) \tag{4}$$

où les $a_{\boldsymbol{\alpha}}$ sont des coefficients à déterminer. L'évaluation de $\hat{\mathcal{M}}$ est alors celle d'une fonction analytique. Un avantage de cette méthode est qu'elle autorise à estimer, non seulement les moments, mais aussi les indices de sensibilité des paramètres d'entrée à partir des coefficients $a_{\boldsymbol{\alpha}}$ du développement [6].

3 Analyse de sensibilité pour des variables corrélées

Une limitation des méthodes d'analyse de sensibilité globale basées sur la décomposition de la réponse du modèle est l'hypothèse d'indépendance des paramètres d'entrée que fait la décomposition de Sobol'. Différentes approches ont été proposées pour pallier cette difficulté : mesurer par une distance les variations de la fonction de répartition de la sortie [7], former des groupes de paramètres dépendants [8] ou encore distinguer des contributions structurelles et corrélatives par régression de la sortie aux entrées [9]. Ce travail se focalise sur deux autres méthodes. La première, décrite dans [10], fait abstraction du calcul des moments de la réponse du modèle et étudie plus globalement les variations de sa densité de probabilité. Une nouvelle mesure d'importance est définie par :

$$\delta_i = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[s(X_i)\right], \quad \text{avec} \quad s(X_i) = \int_{\mathcal{D}_Y} \left| f_Y(y) - f_{Y|X_i}(y) \right| dy \tag{5}$$

où la grandeur $s(X_i)$ correspond à l'aire comprise entre les densités conditionelle et inconditionnelles. Cette méthode est optimisée dans [11] où l'auteur ne considère non plus la densité de probabilité mais la fonction de répartition de Y. Dans cette communication, on développe un schéma de calcul dans lequel les densités sont approximées par une estimation à noyau [12], l'espérance et l'intégrale de l'équation (5) sont évaluées par une double intégration par quadrature et où un métamodèle construit par expansion par chaos polynomial se substitue au modèle physique.

La seconde méthode introduite par [13] suggère de réécrire la décomposition de Sobol' en considérant la covariance de la réponse du modèle (6). En effet :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[Y] &= \mathrm{Cov}[Y, Y] \\ &= \mathrm{Cov}\left[Y, \mathcal{M}_0 + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathcal{M}_{i,j}(X_i, X_j) + \ldots + \mathcal{M}_{1,\ldots,n}(\boldsymbol{X})\right] \end{aligned} \tag{6}$$

Cette décomposition permet de définir un triplet d'indices :

$$S_i = \frac{\mathrm{Cov}[Y, \mathcal{M}_i(X_i)]}{\mathbb{V}[Y]}, \quad S_i^S = \frac{\mathbb{V}[\mathcal{M}_i(X_i)]}{\mathbb{V}[Y]}, \quad S_i^C = \frac{\mathrm{Cov}[Y, \sum_{i \notin \boldsymbol{\alpha}} \mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}})]}{\mathbb{V}[Y]} \tag{7}$$

correspondant aux contributions globale, structurelle et correlative des paramètres du modèle (7). Les composantes $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}})$ peuvent être identifiées par HDMR (*High Dimensional Model Representation*) [14] ou par HOFD (*Hierarchically Orthogonal Functional Decomposition*) [15]. Ici, on propose d'utiliser la base polynomiale d'un chaos construit avec des variables indépendantes pour lequel $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}) = a_{\boldsymbol{\alpha}}\psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{X})$. Le chaos polynomial est alors utilisé comme une surface de réponse sur laquelle on peut simuler des réalisations de variables corrélées pour calculer les différents indices de l'équation (7). Il est donc possible d'identifier clairement quels paramètres d'entrée X_i du modèle contribuent à la variabilité de Y et si cette contribution peut être attribuée au paramètre seul ou à sa dépendance à un ou plusieurs autres paramètres. Ces méthodes sont mises en œuvre sur des exemples analytiques comme la fonction d'Ishigami et mécanique.

4 Présentation des auteurs

Je suis diplômé de l'Institut Français de Mécanique Avancée depuis le mois de Juillet 2009 et possède un Master 2 Recherche Innovations Mécanismes Matériaux Structures obtenu en double cursus à l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand. J'ai effectuée une année d'études internationale qui m'a mené de Université d'Arizona où j'ai étudié la RBDO (*Reliability Based Design Optimization*) appliquée à l'aéronautique sous la direction de Samy Missoum et à Audi A.G. à Ingolstadt, en Allemagne, où j'ai travaillé sur la tenue en fatigue de carosseries mécano-soudées, encadré par le Dr. Paul Heuler. De retour en France, j'ai effectué mon stage de fin d'études au sein de PHIMECA Engineering S.A. sur l'étude d'algorithmes d'optimisation globale. A la suite de ce stage, une thèse CIFRE sous la direction de Bruno Sudret m'a été proposée avec pour sujet l'analyse de sensibilité globale appliquée aux modèles imbriqués et multi-échelles. La modélisation de systèmes complexes passe par la mise en place de plateformes de modélisation composées de plusieurs modèles numériques pouvant correspondre à différentes disciplines ou à différentes échelles de précision. On dispose ainsi d'une chaîne modèles et de sous-modèles, les sorties des uns étant les entrées des autres, impliquant une structure de corrélation complexe entre les différents paramètres de modélisation. Dans ce contexte, il est impossible d'utiliser les méthodes classiques d'analyse de sensibilité globale basées sur la décomposition de la variance. Il est donc nécessaire de développer de nouvelles méthodologies pour la propagation d'incertitudes par méta-modèle en présence de paramètres dépendants.

Références

[1] G. Blatman. *Adaptive sparse polynomial chaos expansions for uncertainty propagation and sensitivity analysis*. PhD thesis, Université Blaise Pascal - Clermont II, 2009.

[2] B. Sudret. *Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models – Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods*. PhD thesis, Université Blaise Pascal - Clermont II, 2007. Habilitation à diriger des recherches, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France.

[3] I.M. Sobol'. Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. *Mat Model*, 2 :112–8, 1993.

[4] A. Saltelli, S. Tarantola, F. Campolongo, and M. Ratto. *Sensitivity analysis in practice*. John Wiley & Sons, Ltd, 2004.

[5] A. Saltelli, P. Annoni, I. Azzini, F. Campolongo, M. Ratto, and S. Tarantola. Variance based sensitivity analysis of model output. design and estimator for the total sensitivity index. *Computer Physics Communications*, 181 :259–270, 2010.

[6] B. Sudret. Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. *Reliab. Eng. Sys. Safety*, 93 :964–979, 2008.

[7] M.H. Chun, S.J. Han, and N.I. Tak. An uncertainty importance measure using a distance metric for the change in a cumulative distribution function. *Reliab. Eng. Sys. Safety*, 70 :313–321, 2000.

[8] J. Jacques. *Contributions à l'analyse de sensibilité et à l'analyse discriminante généralisée*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 2005.

[9] C. Xu and G. Gertner. Uncertainty and sensitivity analysis for models with correlated parameters. *Reliab. Eng. Sys. Safety*, 93 :1563–1573, 2008.

[10] E. Borgonovo. A new uncertainty importance measure. *Reliab. Eng. Sys. Safety*, 92 :771–784, 2007.

[11] E. Borgonovo, W. Castaings, and S. Tarantola. Moment independent importance measures : New results and analytical test cases. *Risk Analysis*, 31 :404–428, 2011.

[12] M. Wand and M.C. Jones. *Kernel smoothing*. Chapman and Hall, 1995.

[13] G. Li and H. Rabitz. Global Sensitivity Analysis for Systems with Independent and/or Correlated Inputs. *J. Phys. Chem.*, 114 :6022–6032, 2010.

[14] G. Li, S.W. Wang, and H. Rabitz. Practical approaches to construct rs-hdmr component functions. *J. Phys. Chem.*, 106 :8721–8733, 2002.

[15] G. Chastaing, F. Gamboa, and C. Prieur. Generalized Hœffding-Sobol decomposition for dependent variables - application to sensitivity analysis.