

## 1. Motivations

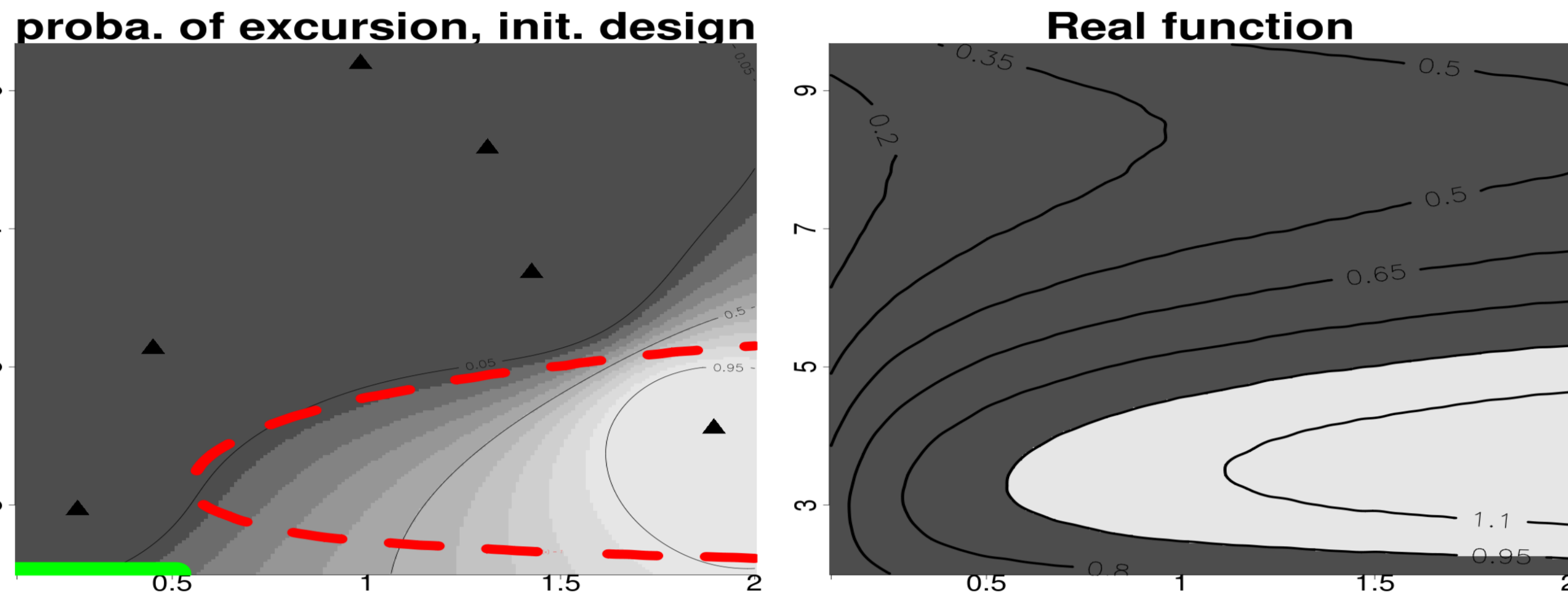
Un système contenant de la matière fissile (Uranium, Plutonium) présente un risque dit de "criticalité". Celui-ci se matérialise lorsqu'un neutron heurtant un atome de matière fissile libère en moyenne plusieurs nouveaux neutrons. Le ratio de neutrons produits, appelé  $k_{\text{eff}}$ , est calculable par un simulateur coûteux à évaluer.

Le  $k_{\text{eff}}$  d'un système dépend de plusieurs paramètres, contrôlés ou non (température, géométrie du système, quantité de matière fissile, etc.), et le rôle de l'ingénieur de sûreté est de s'assurer qu'aucune configuration de paramètres ne va mener à un  $k_{\text{eff}}$  supérieur à un seuil de 0.95 (ou plus généralement: un seuil  $T \in \mathbb{R}$ ).

Dans cette thèse, nous travaillons sur des stratégies séquentielles d'évaluation du simulateur en vue de résoudre deux problèmes distincts (le premier étant un préliminaire au second):

- Trouver l'ensemble de toutes les configurations dangereuses:  $\{x \in D : f(x) > T\}$ . **Inversion.**
- Trouver les inputs contrôlés tels qu'il n'existe aucune configuration dangereuse quelle que soit la valeur des inputs non contrôlés:  $\{x_1 \in D_1 : \forall x_2 \in D_2, f(x_1, x_2) < T\}$ . **Optimisation-inversion.**

Ces problèmes doivent être traités avec un nombre faible d'évaluations du simulateur, car celui-ci est coûteux.

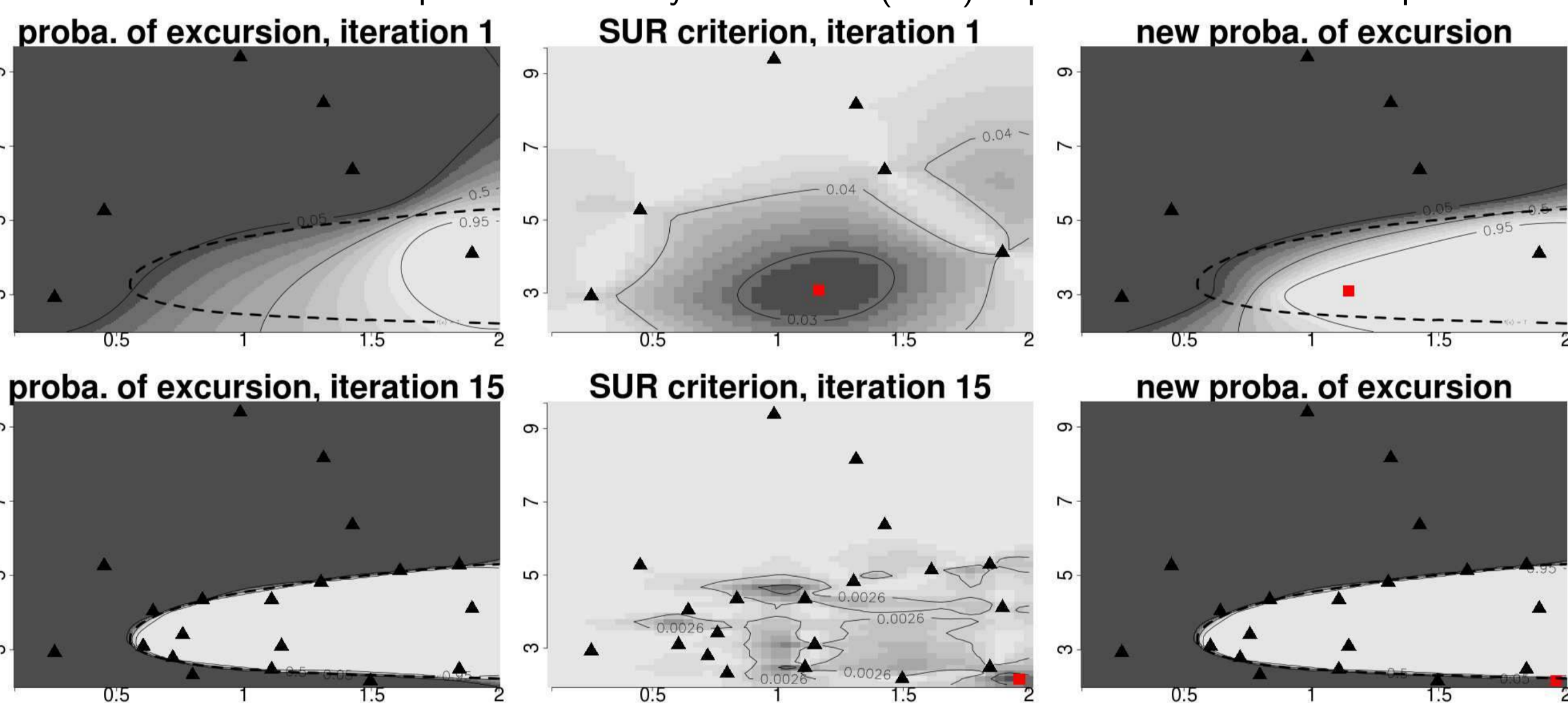


La Figure ci-dessus représente un système contenant de la matière fissile, et qui dépend de deux paramètres. Le premier (en abscisse) est contrôlé. Le second ne l'est pas. On représente en couleur la probabilité d'excursion  $p_n(x) := P(\xi(x) > T | n \text{ évaluations})$  obtenue par Krigeage, c'est à dire en supposant que  $f$  est une réalisation d'un Processus Gaussien  $\xi$ .

- dans un problème d'inversion, on évalue le simulateur pour déterminer l'ensemble délimité en pointillé.
- dans un problème d'optimisation-inversion, on vise à déterminer l'ensemble vert.

## 2. Etat de l'art

Pour les problèmes d'inversion, plusieurs critères ont été proposés. Certains critères "ponctuels" [4, 2] utilisent la distribution de  $\xi(x)$  pour calculer la valeur du critère en un point  $x$ . D'autres critères (voir [1] pour une revue) se basent sur la notion de "Stepwise Uncertainty Reduction" (SUR) et produisent de meilleures performances.



Nous illustrons-ci dessus une stratégie de type SUR. À partir d'une grandeur arbitraire  $H_n$  (notre "incertitude" après  $n$  évaluations), on évalue séquentiellement le point:

$$x^* = \operatorname{argmin}_{x_{n+1} \in D} \mathbb{E}(H_{n+1} | n \text{ évaluations}, X_{n+1} = x_{n+1}),$$

c'est à dire le point qui va rendre l'incertitude future  $H_{n+1}$  la plus faible, en espérance. Pour un point  $x_{n+1} \in D$ , l'espérance ci-dessus s'évalue en recalculant  $H_{n+1}$  pour toutes les réponses possibles  $\xi(x_{n+1})$ . L'inconvénient des critères SUR est ainsi qu'ils sont souvent eux-même **difficiles et long à évaluer**.

Pour notre problème voici quelques définitions possibles de "l'incertitude", mentionnées dans [1]:

$$H_n^{(1)} := \int_D p_n(1 - p_n) d\mu \quad (1)$$

$$H_n^{(2)} := \operatorname{Var}_n \mu(\{x \in D : \xi(x) > T\}) \quad (2)$$

où  $\mu$  est une mesure sur  $D$  et  $p_n$  désigne la probabilité d'excursion. Notons qu'en un point  $x$ ,  $p_n(x)$  est fonction de la moyenne de krigeage  $m_n(x)$  et de la variance de krigeage  $s_n(x)$ .

## 3. Principales contributions de la thèse

Nos résultats théoriques sont à finalité numérique, puisqu'ils permettent de calculer facilement:

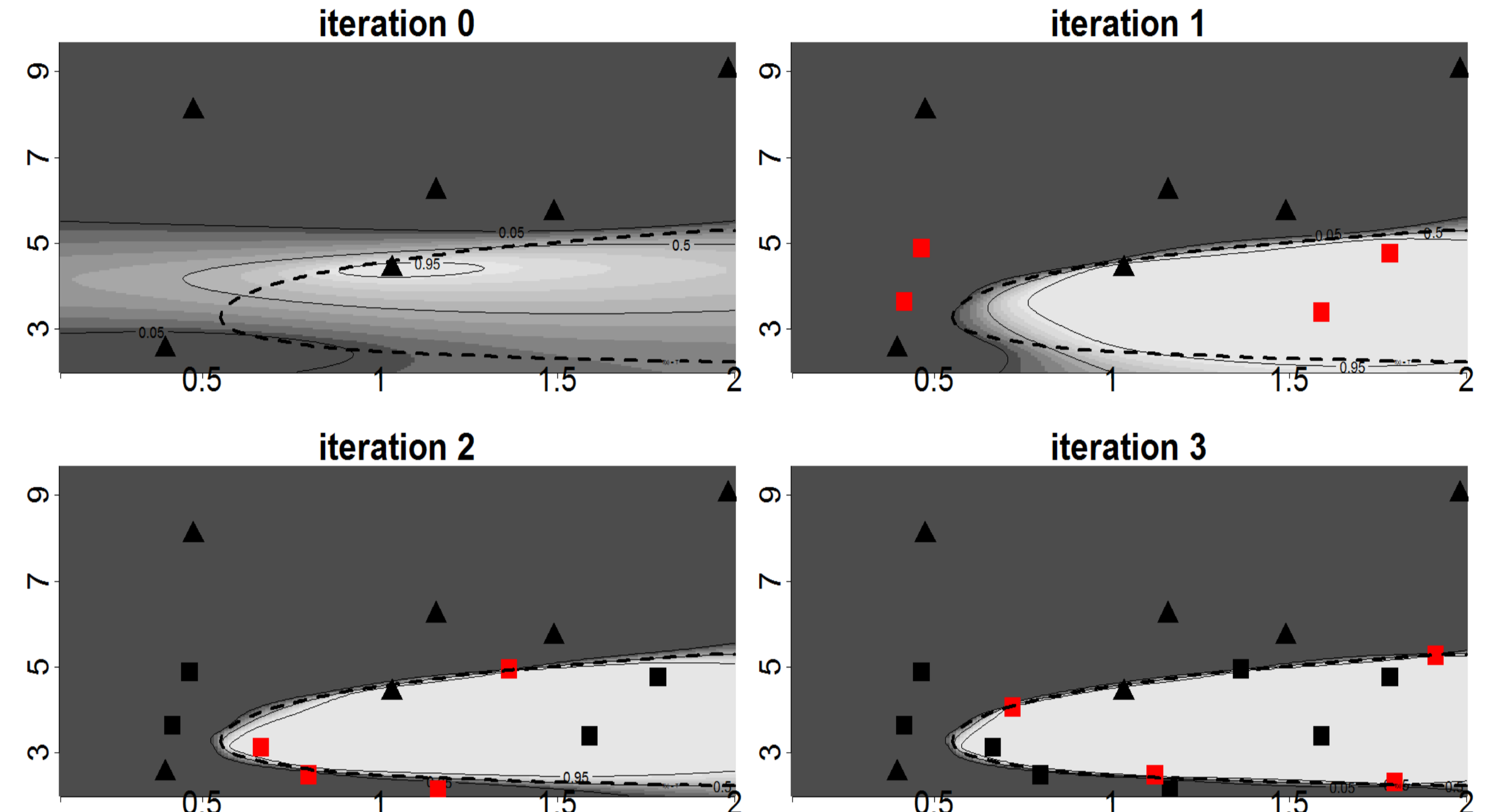
$$J_n(x_{n+1}, \dots, x_{n+r}) := \mathbb{E}(H_{n+r} | n \text{ évaluations}, X_{n+1} = x_{n+1}, \dots, X_{n+r} = x_{n+r}),$$

c'est à dire, l'espérance de l'incertitude future si  $r$  nouveaux points sont ajoutés en parallèle. Pour les deux types d'incertitudes précédents on obtient:

$$J_n^{(1)}(x_{n+1}, \dots, x_{n+r}) = \int_D \Phi_2 \left( \frac{a(x)}{\sqrt{1 + \tilde{\mathbf{b}}(x)}}, \frac{-a(x)}{\sqrt{1 + \tilde{\mathbf{b}}(x)}}, \frac{\tilde{\mathbf{b}}(x)}{1 + \tilde{\mathbf{b}}(x)} \right) \mu(dx) \quad (3)$$

$$J_n^{(2)}(x_{n+1}, \dots, x_{n+r}) = \gamma_n - \int_{D \times D} \Phi_2 \left( \frac{a(z_1)}{\sqrt{1 + \tilde{\mathbf{b}}(z_1)}}, \frac{a(z_2)}{\sqrt{1 + \tilde{\mathbf{b}}(z_2)}}, \frac{\mathbf{b}(z_1)^T \Sigma_r \mathbf{b}(z_2)}{\sqrt{1 + \tilde{\mathbf{b}}(z_1)} \sqrt{1 + \tilde{\mathbf{b}}(z_2)}} \right) \mu(dz_1) \mu(dz_2), \quad (4)$$

- $\Phi_2(u_1, u_2, \rho)$  est la c.d.f. de la distribution Gaussienne bivariée avec corrélation  $\rho$ ,
- $a(x) := (m_n(x) - T)/s_{n+r}(x)$ ,  $\mathbf{b}(x) := \left( \frac{\lambda_{n+1, n+r}(x) s_n(x_{n+1})}{s_{n+r}(x)}, \dots, \frac{\lambda_{n+r, n+r}(x) s_n(x_{n+r})}{s_{n+r}(x)} \right)^T$ ,
- $\tilde{\mathbf{b}}(x) := \mathbf{b}(x)^T \Sigma_r \mathbf{b}(x)$ ,
- $\Sigma_r$  est la matrice de covariance conditionnelle du vecteur:  $\left( \frac{\xi(x_{n+1}) - m_n(x_{n+1})}{s_n(x_{n+1})}, \dots, \frac{\xi(x_{n+r}) - m_n(x_{n+r})}{s_n(x_{n+r})} \right)^T$
- $\lambda_{n+i, n+r}(x)$  est le poids de krigeage de l'observation  $\xi(x_{n+i})$  ( $1 \leq i \leq r$ ) au temps  $n+r$ .

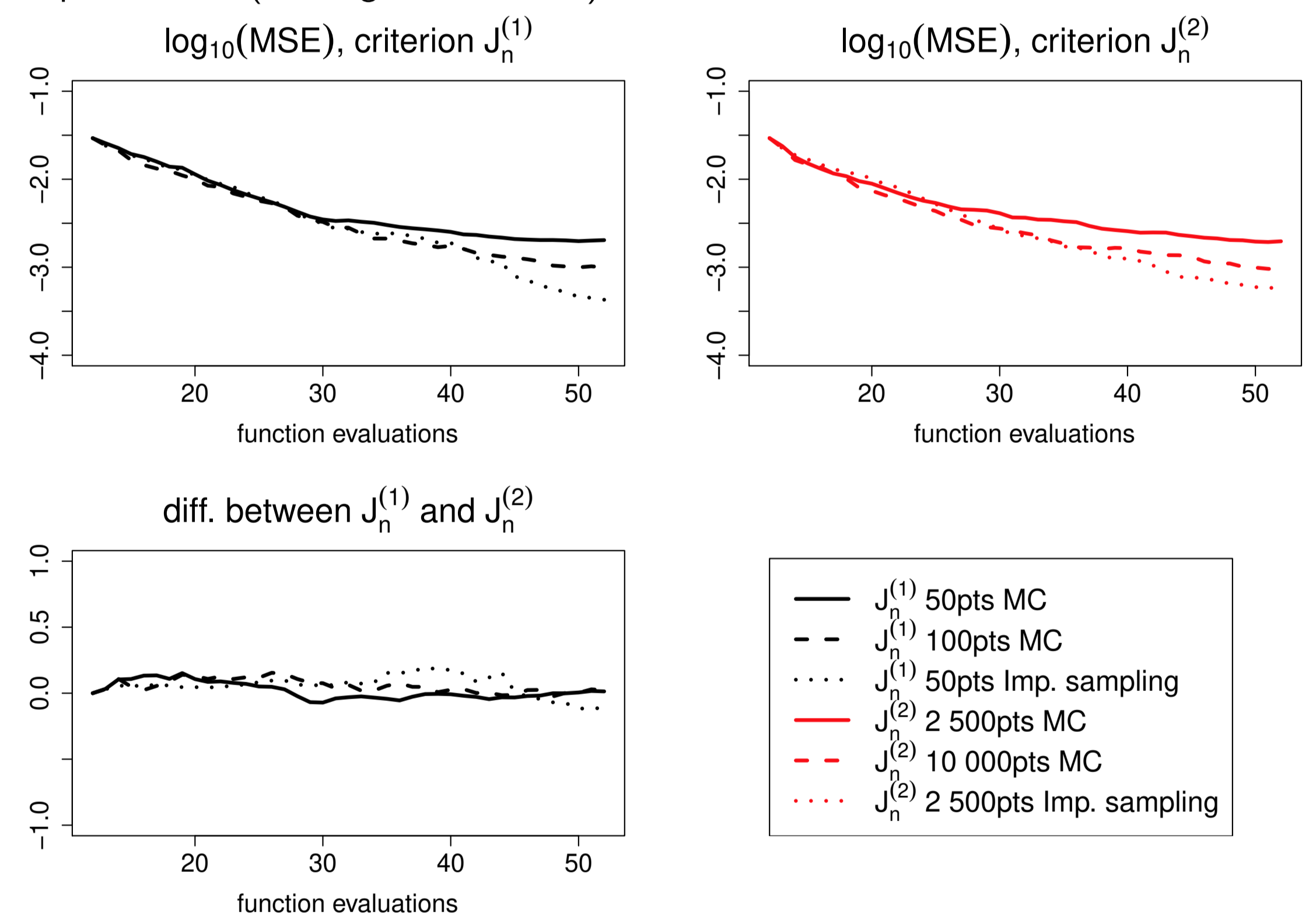


Le graphique ci-dessus représente 3 itérations du critère SUR  $J_n^{(1)}$ , qui évalue  $r = 4$  points à chaque itération.

## 4. Résultats applicatifs

Plusieurs conclusions sur ces stratégies SUR sont décrites dans [3].

- Sur nos cas d'application, et à nombre de points total fixe, les stratégies parallèles donnent des performances similaires aux stratégies non-parallèles. Le parallèle permet donc un gain de temps considérable.
- Les stratégies fonctionnent en dimension 6 (sur la fonction Hartman6)
- Les critères  $J_n^{(1)}$  et  $J_n^{(2)}$  donnent des performances similaires lorsqu'on utilise  $M$  points d'intégration pour l'un et  $M^2$  pour l'autre (voir Figure ci-dessous)



Le critère  $J_n^{(1)}$  parallèle a été intégré dans la plate-forme Prométhée de l'IRSN et a donné lieu à des résultats opérationnels (Cf. site web promethee.irsn.org et poster dans les références).

## Perspectives

Les travaux futurs vont se concentrer sur deux thèmes:

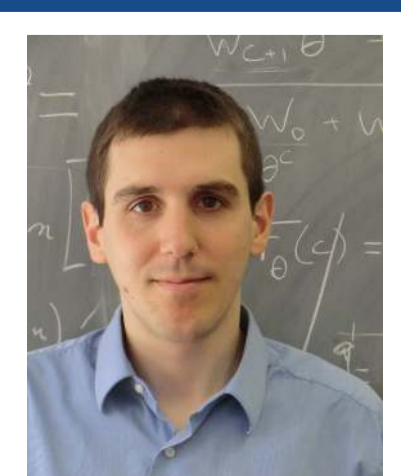
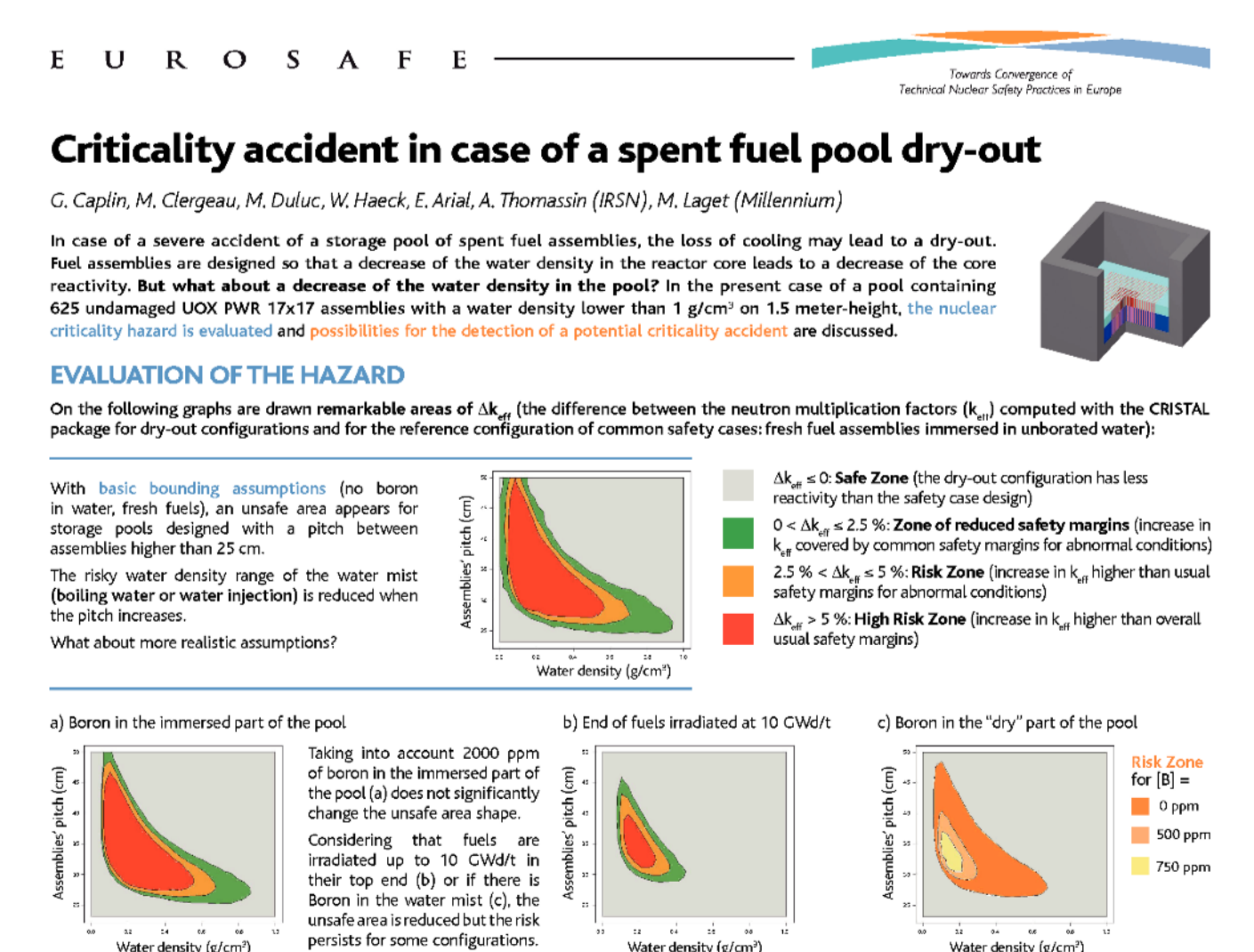
- En inversion: travail sur des critères SUR utilisant des notions théoriques d'ensembles aléatoires. On définit la "moyenne" et la "variance" d'un ensemble d'excursion aléatoire et on dérive une stratégie SUR associée.
- En optimisation-inversion: étude de premiers critères. L'un des critères envisagés est donné ci-dessous. On note notre domaine  $D = D_1 \times D_2$  et on cherche  $\{x_1 \in D_1 : \forall x_2 \in D_2, f(x_1, x_2) < T\}$ :

$$x_1^* = \operatorname{argmax}_{x_1 \in D_1} p_n(x_1, \psi_n(x_1))(1 - p_n(x_1, \psi_n(x_1)))$$

$$x_2^* = \psi_n(x_1^*) \quad \text{où } \psi_n(x_1) := \operatorname{argmax}_{x_2 \in D_2} p_n(x_1, x_2)$$

## References

- [1] Julien Bect, David Ginsbourger, Ling Li, Victor Picheny, and Emmanuel Vazquez. Sequential design of computer experiments for the estimation of a probability of failure. *Statistics and Computing*, pages 1–21, 2011.
- [2] B. J. Bichon, M. S. Eldred, L. P. Swiler, S. Mahadevan, and J. M. McFarland. Efficient global reliability analysis for nonlinear implicit performance functions. *AIAA Journal*, 2008.
- [3] C. Chevalier, J. Bect, D. Ginsbourger, E. Vazquez, V. Picheny, and Y. Richet. Fast parallel kriging-based stepwise uncertainty reduction with application to the identification of an excursion set. Technical report, 2012.
- [4] P. Ranjan, D. Bingham, and G. Michailidis. Sequential experiment design for contour estimation from complex computer codes. *Technometrics*, 2008.



**Clément Chevalier**

supervisé par David Ginsbourger (UNIBE)  
et Yann Richet (IRSN)

Cette thèse est co-financée par l'IRSN et par le consortium ReDice.

GdR MASCOT-NUM  
Journée des doctorants  
21 Mars 2012

