Dynamique transitoire de treillis de poutres soumis à des chargements impulsionnels

Yves LE GUENNEC
ONERA/DADS (Éric SAVIN) - ECP/LMSSMat (Didier CLOUTEAU)

Journée doctorants MASCOT-NUM, 21/03/2012

Enjeux

Problématique

Choc $\longrightarrow$ Propagation d'onde HF

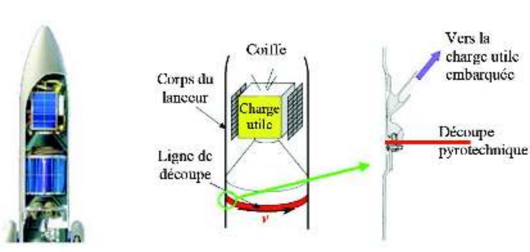
Enjeux

Problématique

Choc $\longrightarrow$ Propagation d'onde HF

Exemple

Découpe pyrotechnique :



Enjeux

Problématique

Choc $\longrightarrow$ Propagation d'onde HF

Exemple

Enjeux

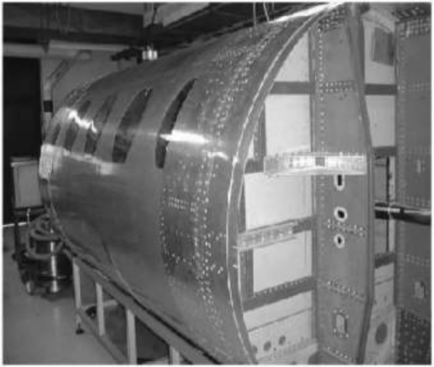
Problématique

Choc $\longrightarrow$ Propagation d'onde HF

Exemple

Importance de la mise en place de méthodes de prévision de la réponse transitoire à un choc.

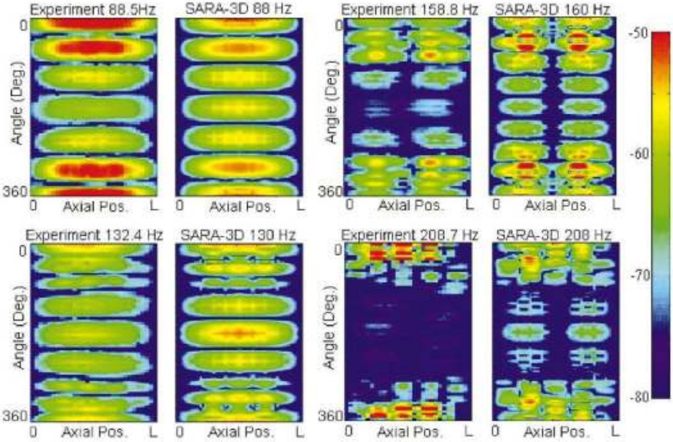
Contexte: Caractérisation du régime HF



Simulation expérimentale [Herdic et al., 2005]

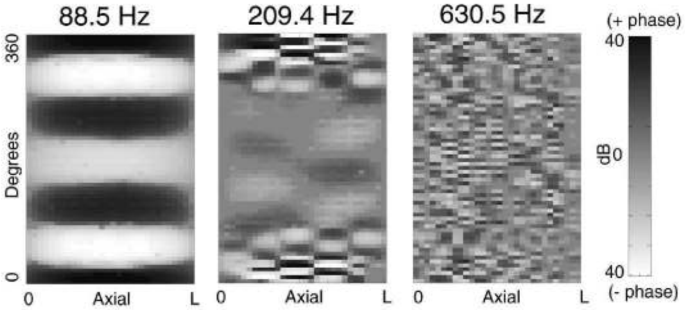
Contexte: Caractérisation du régime HF

Amplitude de la vitesse $(m/s^{-1}/N)$



Contexte: Caractérisation du régime HF

Phase de la vitesse



Quelques références

Hautes fréquences

- Analyse Statistique Énergétique (SEA) [Lyon et Dejong, 1995] ;
- Vibrational Conductivity Analogy (VCA) [Nefske et Sung, 1989] ;
- WKBJ et faisceaux Gaussiens [. . . Bougacha, 2010] ;
- mesure de Wigner et équations de transport [Gérard et al., 1997].

Réponse transitoire à un choc

Simuler la réponse transitoire des treillis de poutres à des chocs

- Modélisation mécanique haute fréquence des poutres tridimensionnelles courbées ;

Réponse transitoire à un choc

Simuler la réponse transitoire des treillis de poutres à des chocs

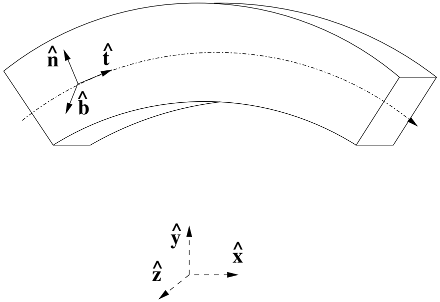
- Modélisation mécanique haute fréquence des poutres tridimensionnelles courbées ;
- modélisation des conditions aux limites ;

Réponse transitoire à un choc

Simuler la réponse transitoire des treillis de poutres à des chocs

- Modélisation mécanique haute fréquence des poutres tridimensionnelles courbées ;
- modélisation des conditions aux limites ;
- implémentation numérique.

Modélisation mécanique d'une poutre courbée



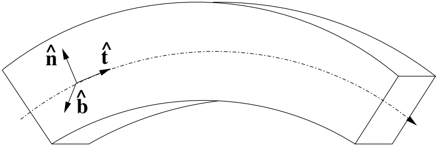
Hypothèses matériau

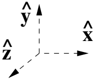
- Isotrope ;

Hypothèses géométriques

- Courbures ;
- section rigide ;
- cinématique de Timoshenko.

version matériau homogène:





théorie du transport :

- version bidimensionnelle [É. Savin, 2004] ;
- extension tridimensionnelle [Y. Le Guennec, É. Savin, 2011].

Équilibre dynamique
$+$
Relations de comportement

$\Downarrow$

$$A\partial_t X = P_1 \partial_s X + P_0 X \,,$$
$$X = [\dot{U}_c, \dot{\mathbf{\Theta}}, F, M]$$

$\Downarrow$

Équations de transport d'énergie :

$$\partial_t w_\alpha + c_\alpha \hat{k}\,\partial_s w_\alpha - |k|\partial_s c_\alpha\,\partial_k w_\alpha = 0\,, \quad \alpha \in E\,.$$

- $w_\alpha(s,k,t)$: densités d'énergie dans l'espace des phases $\mathscr{S} \times \mathbb{R}_k$ du mode $\alpha \in E = \{\mathrm{P}_i, \mathrm{T}_i\,, 1 \leq i \leq 3\}$,
- c_α : vitesse de groupe du mode α.

Équilibre dynamique
+
Relations de comportement

$\Downarrow$

$(A_0 + \sqrt{\varepsilon} A_1)\partial_t X_\varepsilon = P_1 \partial_s X_\varepsilon + P_0 X_\varepsilon\,,$
$X = [\dot{U}_c, \dot{\mathbf{\Theta}}, F, M]$

$\Downarrow$

Équations de transport d'énergie :
$\partial_t w_\alpha + c_\alpha \hat{k}\,\partial_s w_\alpha - |k|\partial_s c_\alpha\,\partial_k w_\alpha =$
$\Sigma_\alpha(k)(w_\alpha(-k) - w_\alpha(k)), \quad \alpha \in E\,.$

- $w_\alpha(s,k,t)$: densités d'énergie dans l'espace des phases $\mathscr{S} \times \mathbb{R}_k$ du mode $\alpha \in E = \{\mathrm{P}_i, \mathrm{T}_i\,, 1 \leq i \leq 3\}$,
- c_α : vitesse de groupe du mode α.

<u>version matériau aléatoire:</u>

paramètres matériau:

$$\rho^\varepsilon(s) = \underline{\rho}(s)\left[1 + \sqrt{\varepsilon} X_1\left(\tfrac{s}{\varepsilon}\right)\right],$$
$$\frac{1}{E^\varepsilon(s)} = \frac{1}{\underline{E}(s)}\left[1 + \sqrt{\varepsilon} X_2\left(\tfrac{s}{\varepsilon}\right)\right],$$
$$\frac{1}{\mu_r^\varepsilon(s)} = \frac{1}{\underline{\mu}_r(s)}\left[1 + \sqrt{\varepsilon} X_3\left(\tfrac{s}{\varepsilon}\right)\right].$$

- $\Sigma_\alpha(k)$: section efficace de diffraction ;

Modes P

- mode de compression,
- modes de flexion.

$$c_{\mathrm{P}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Modes T

- modes de cisaillement
- mode de torsion

$$c_{\mathrm{T}} = \sqrt{\frac{\kappa\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\rho}}$$

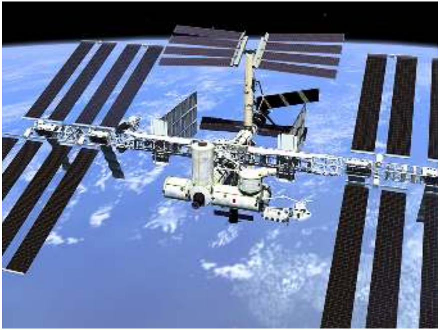
Rq : les modes sont linéairement indépendants.

Équations de transport d'énergie :

$$\partial_t w_\alpha + c_\alpha \hat{k}\, \partial_s w_\alpha - |k| \partial_s c_\alpha\, \partial_k w_\alpha = \Sigma_\alpha(k)(w_\alpha(-k) - w_\alpha(k)), \quad \alpha \in E.$$

- $w_\alpha(s,k,t)$: densités d'énergie dans l'espace des phases $\mathscr{S} \times \mathbb{R}_k$ du mode $\alpha \in E = \{\mathrm{P}_i, \mathrm{T}_i, 1 \leq i \leq 3\}$,
- c_α : vitesse de groupe de du mode α.

Modélisation des phénomènes de réflexion transmission



Conditions aux limites en déplacements et en efforts de l'équation des ondes classiques

$\Downarrow$

Coefficients de réflexion/transmission en flux d'énergie

Implémentation numérique

Phénomènes de réflexion/transmission

$\Downarrow$

Discontinuité du champs de densité d'énergie à la jonction

$\Downarrow$

Méthode des éléments finis discontinus

$+$

Polynômes de Jacobi pour l'approximation spatiale

$+$

Schéma Runge-Kutta pour l'évolution temporelle

Méthode des éléments finis discontinus

Schéma éléments finis discontinus (forme faible) :

$$\int_{\mathrm{D}_r} \Big(\frac{\partial w_\alpha}{\partial t}(s,\hat{k},t)v(s) - c^r_\alpha \hat{k} w_\alpha(s,\hat{k},t)\frac{dv}{ds} \\ - \Sigma_\alpha(k)(w_\alpha(-k) - w_\alpha(k))v \Big)\, ds = -[\pi^*_\alpha \cdot \hat{t}^r\, v]^{s_{r+\frac{1}{2}}}_{s_{r-\frac{1}{2}}}\,, \quad \forall v \in \mathrm{V}_h \subseteq \mathrm{H}^1(D_r)\,.$$

Flux numérique : pour $\hat{k}\cdot\hat{t}^r < 0$:

$$\pi^*_\alpha(s_{r+\frac{1}{2}},t)\cdot\hat{t}^r = \sum_{\beta\in E}\Big(\mathscr{R}^{rr}_{\alpha\beta}(c_\beta w_\beta)^r(s_{r+\frac{1}{2}},k^r_\beta\cdot\hat{t}^r,t) + \sum_{r'\in\mathscr{I}_r}\mathscr{T}^{rr'}_{\alpha\beta}(c_\beta w_\beta)^{r'}(s_{r'-\frac{1}{2}},k^{r'}_\beta\cdot\hat{t}^{r'},t)\Big)\,.$$

et pour $\hat{k}\cdot\hat{t}^r > 0$:

$$\pi^*_\alpha(s_{r+\frac{1}{2}},t)\cdot\hat{t}^r = c_\alpha w_\alpha(s,k,t)\hat{k}\cdot\hat{t}^r\,.$$

Discrétisation éléments finis

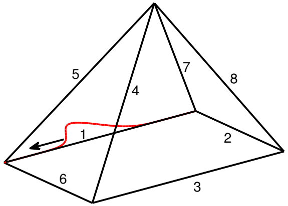
Décomposition spectrale : $w_\alpha^r(s,t) = \sum_j q_{\alpha j}^r(t)\phi_j(s)$, avec $\phi_j(s)$ le polynôme de Legendre de degré j.
Ce qui amène au problème matriciel :

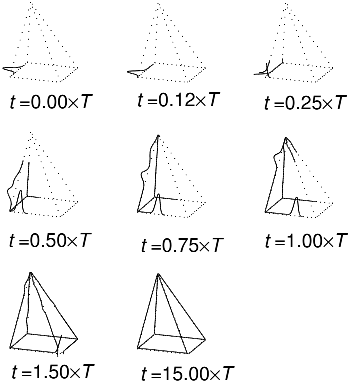
$$\mathbb{M}\partial_t q + (\mathbb{K} + \mathbb{Q} + \mathbb{L})q = 0\,, \quad q(0) = p\,.$$

Intégration temporelle par Runge-Kutta SSP.

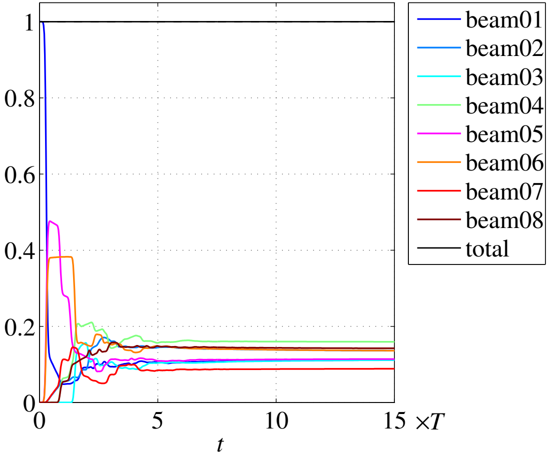
Exemple

- 4 points par unité de longueur ($L_{\text{arête}} = 5$) ;
- polynômes de Legendre d'ordre 5 ;
- schéma RK-SSP d'ordre 4 ;
- condition initiale : onde longitudinale ;
- modèle de corrélation gaussien.

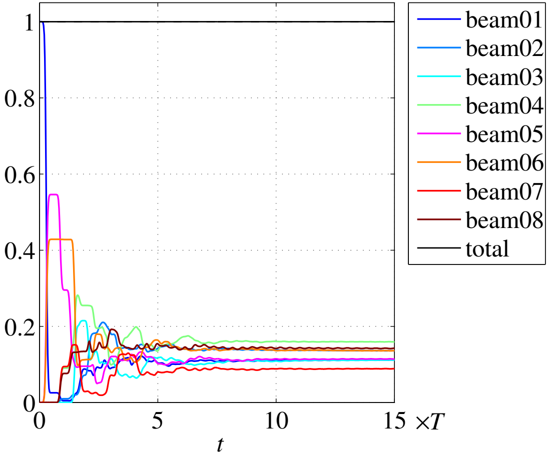




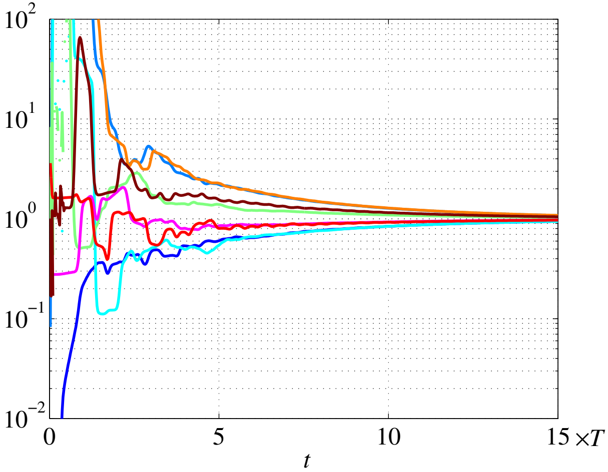
Évolution de la densité d'énergie en fonction du temps avec aléa



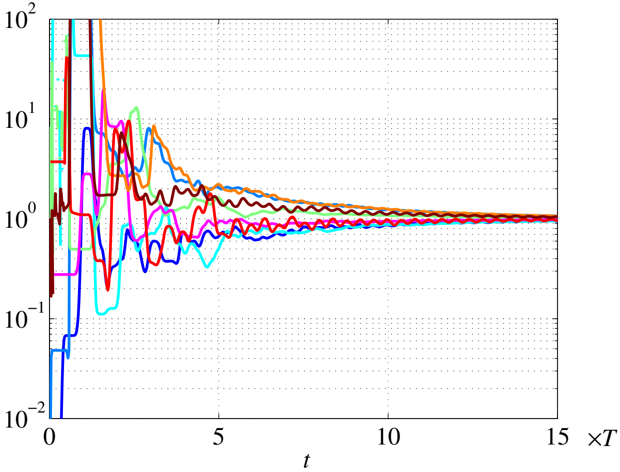
Évolution de la densité d'énergie totale dans chaque poutre en fonction du temps sans aléa



Évolution de la densité d'énergie totale dans chaque poutre en fonction du temps avec aléa



Évolution de $\frac{c_\mathrm{T}\mathscr{E}_\mathrm{T}^p(t)}{2c_\mathrm{P}\mathscr{E}_\mathrm{P}^p(t)}$ dans chaque poutre en fonction du temps sans aléa



Évolution de $\dfrac{c_T \mathscr{E}_T^p(t)}{2c_P \mathscr{E}_P^p(t)}$ dans chaque poutre en fonction du temps

Perspectives

- Comparaison avec la réponse transitoire issue de modèles existants ;
- approche théorique de la limite de diffusion ;
- dissipation aux jonctions.

MERCI DE VOTRE ATTENTION

Équations d'équilibre

$$(D_F + I_3\partial_s)F = \rho_S \ddot{U}_c\,,$$

$$(D_f + I_3\partial_s)M + \hat{\imath}\wedge F = J[\rho]\ddot{\boldsymbol{\Theta}}\,,$$

avec :

- $\rho_S(s) = \int_\Sigma \rho d\Sigma$;
- $D_F(s) = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}$;
- $J[\rho](s) = \mathrm{diag}(I[\rho](s), J[\rho](s), K[\rho](s))$,
  - $J[\rho] = \int_\Sigma s_3^2 \rho\, d\Sigma$;
  - $K[\rho] = \int_\Sigma s_2^2 \rho\, d\Sigma$;
  - $I[\rho] = J[\rho] + K[\rho]$.

Équations d'équilibre

$$(D_F + I_3\partial_s)F = \rho_S \ddot{U}_c\,,$$
$$(D_f + I_3\partial_s)M + \hat{\imath}\wedge F = J[\rho]\ddot{\boldsymbol{\Theta}}\,,$$

Relations de comportement

$$F = SC_1((D_F + I_3\partial_s)U_c + \hat{\imath}\wedge\boldsymbol{\Theta})\,,$$
$$M = C_2(D_F + I_3\partial_s)\boldsymbol{\Theta}\,,$$

où :

- $SC_1(s) = \mathrm{diag}(\int_\Sigma E d\Sigma, \kappa(\int_\Sigma \mu d\Sigma) I_2)$: tenseur de comportement de la section ;
- κ : coefficient de réduction de cisaillement ;
- $C_2(s) = \mathrm{diag}(\kappa I[\mu](s), J[E](s), K[E](s))$: tenseur de comportement de la section pour les rotations.

Problème hyperbolique

$$A\partial_t X = P_1 \partial_s X + P_0 X \quad , \quad X = [\dot{U}_c, \dot{\boldsymbol{\Theta}}, F, M]$$

$$A(s) = \begin{bmatrix} \rho_S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J[\rho] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (SC_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2^{-1} \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_3 \\ I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_0(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & D_F & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\Omega} & D_F \\ D_F & \boldsymbol{\Omega} & 0 & 0 \\ 0 & D_F & 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Du problème hyperbolique aux équations de transport

- Paramétrage haute fréquence :
  - changement de variable $s \to s/\varepsilon$ et $t \to t/\varepsilon$: $X_\varepsilon = X(s/\varepsilon, t/\varepsilon)$;
  - condition initiale : $X_\varepsilon(s,0) = X_0(s, s/\varepsilon)$;
  - problème HF : $A\partial_t X = P_1 \partial_s X$.

Du problème hyperbolique aux équations de transport

- Paramétrage haute fréquence :
  - changement de variable $s \to s/\varepsilon$ et $t \to t/\varepsilon$: $X_\varepsilon = X(s/\varepsilon, t/\varepsilon)$;
  - condition initiale : $X_\varepsilon(s,0) = X_0(s, s/\varepsilon)$;
  - problème HF : $A\partial_t X = P_1 \partial_s X$.
- Quantités énergétiques :
  $\mathscr{E}_\varepsilon = \frac{1}{2}(X_\varepsilon, X_\varepsilon)_A \,, \quad \Pi_\varepsilon = \frac{1}{2}(X_\varepsilon, X_\varepsilon)_{P_1}.$

Du problème hyperbolique aux équations de transport

- Paramétrage haute fréquence :
  - changement de variable $s \to s/\varepsilon$ et $t \to t/\varepsilon$: $X_\varepsilon = X(s/\varepsilon, t/\varepsilon)$;
  - condition initiale : $X_\varepsilon(s,0) = X_0(s, s/\varepsilon)$;
  - problème HF : $A\partial_t X = P_1 \partial_s X$.
- Quantités énergétiques :
  $\mathscr{E}_\varepsilon = \frac{1}{2}(X_\varepsilon, X_\varepsilon)_A\,, \quad \Pi_\varepsilon = \frac{1}{2}(X_\varepsilon, X_\varepsilon)_{P_1}\,.$
- Lorsque $\varepsilon \to 0$, on peut montrer que : $\exists w_\alpha(s,k,t)$, $1 \leq \alpha \leq R$, $\in T^*\mathscr{S} = \mathscr{S} \times \mathbb{R}_k$ tel que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{E}_\varepsilon(s,t) = \sum_{\alpha=1}^{R} \int_{\mathbb{R}} w_\alpha \, dk\,,$$

$$\mathbf{\Pi}(s,t) = \sum_{\alpha=1}^{R} c_\alpha(s) \int_{\mathbb{R}} w_\alpha \hat{k} \, dk;$$

et que :

$$\partial_t w_\alpha + c_\alpha \hat{k}\, \partial_s w_\alpha - |k| \partial_s c_\alpha \, \partial_k w_\alpha = 0\,.$$

$$
\begin{aligned}
U_c^I(0) + U_c^R(0) &= R^{1q} U_c^{Tq}(0)\,, \\
\boldsymbol{\Theta}^I(0) + \boldsymbol{\Theta}^R(0) &= R^{1q} \boldsymbol{\Theta}^{Tq}(0)\,, \\
F^1(0) &= \sum_{q=2}^{\mathcal{N}} R^{1q} F^q(0)\,, \\
M^1(0) &= \sum_{q=2}^{\mathcal{N}} R^{1q} M^q(0)\,.
\end{aligned}
$$

Conditions aux limites en déplacement et en efforts de l'équation des ondes classiques

$\Downarrow$

Coefficient de réflexion/transmission en flux d'énergie

$$
< \Pi^q > = \frac{1}{2} \mathfrak{Re}\{\mathrm{i}\omega (F^q \cdot \overline{U_c^q} + M^q \cdot \overline{\boldsymbol{\Theta}^q})\}\,.
$$

$$
\rho_{\alpha\beta}^{11} = \frac{< \Pi_\alpha^R >}{< \Pi_\beta^I >}\,,
$$

$$
\tau_{\alpha\beta}^{q1} = \frac{< \Pi_\alpha^{Tq} >}{< \Pi_\beta^I >}\,,
$$

Méthode des éléments finis discontinus

Schéma éléments finis discontinus (forme faible) :

$$\int_{D_r}\left(\frac{\partial w_\alpha}{\partial t}(s,\hat{k},t)v(s)-c_\alpha^r\hat{k}w_\alpha(s,\hat{k},t)\frac{dv}{ds}\right)ds=-\left[\boldsymbol{\pi}_\alpha^*\cdot\hat{t}^r\,v\right]_{s_{r-\frac{1}{2}}}^{s_{r+\frac{1}{2}}}\,,\quad \forall v\in V_h\subseteq H^1_{loc}\,.$$

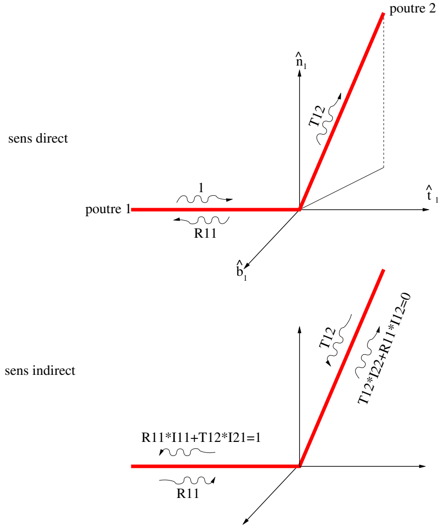
Méthode des éléments finis discontinus

Schéma éléments finis discontinus (forme faible) :

$$\int_{D_r} \left(\frac{\partial w_\alpha}{\partial t}(s,\hat{k},t)v(s) - c^r_\alpha \hat{k} w_\alpha(s,\hat{k},t)\frac{dv}{ds} \right) ds = -\left[\boldsymbol{\pi}^*_\alpha \cdot \hat{t}^r v\right]_{s_{r-\frac{1}{2}}}^{s_{r+\frac{1}{2}}} , \quad \forall v \in V_h \subseteq H^1_{loc} .$$

Flux numérique :

$$\boldsymbol{\pi}^*_\alpha(s_{r+\frac{1}{2}},t)\cdot\hat{t}^r = \sum_{\beta\in E}\left(\mathscr{R}^{rr}_{\alpha\beta}(c_\beta w_\beta)^r(s_{r+\frac{1}{2}},k^r_\beta\cdot\hat{t}^r,t) + \sum_{r'\in\mathscr{I}_r}\mathscr{T}^{rr'}_{\alpha\beta}(c_\beta w_\beta)^{r'}(s_{r'-\frac{1}{2}},k^{r'}_\beta\cdot\hat{t}^{r'},t)\right).$$



système à résoudre :

$$
\begin{aligned}
R11 \times I11 + T12 \times I21 &= 1 \\
T12 \times I22 + R11 \times I12 &= 0 \\
R22 \times I22 + T21 \times I12 &= 1 \\
T21 \times I11 + R22 \times I21 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \begin{pmatrix} R11 & T12 \\ T21 & R22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I11 & I12 \\ I21 & I22 \end{pmatrix} = Id
$$

$\Sigma_\alpha(k) = \frac{\pi}{2}\xi_\alpha c_\alpha k^2 S(2k)$ shéma de corrélation gaussien : $S(k) = \frac{a}{\pi}\exp(-\frac{a^2k^2}{\pi})$.