

Plan d'expérience avec entrées fonctionnelles dépendantes pour la génération de spectres gamma en prospection minière de l'uranium

Workshop RT-UQ « Expériences et simulations : comment les planifier ? » – 6-7 novembre 2025

Arthur Pellet-Rostaing¹, Bertrand Pérot¹, Thomas Marchais¹, Nadia Pérot²,
Hervé Toubon³, Youcef Bensedik³, Sébastien Hocquet³, Christophe Pouet⁴, Mitra Fouladirad⁵

¹CEA, DES, IRESNE, DTN, SMTA, LMN, Cadarache, France

²CEA, DES, IRESNE, DER, SESI, LEMS, Cadarache, France

³Orano Mining, Châtillon, France

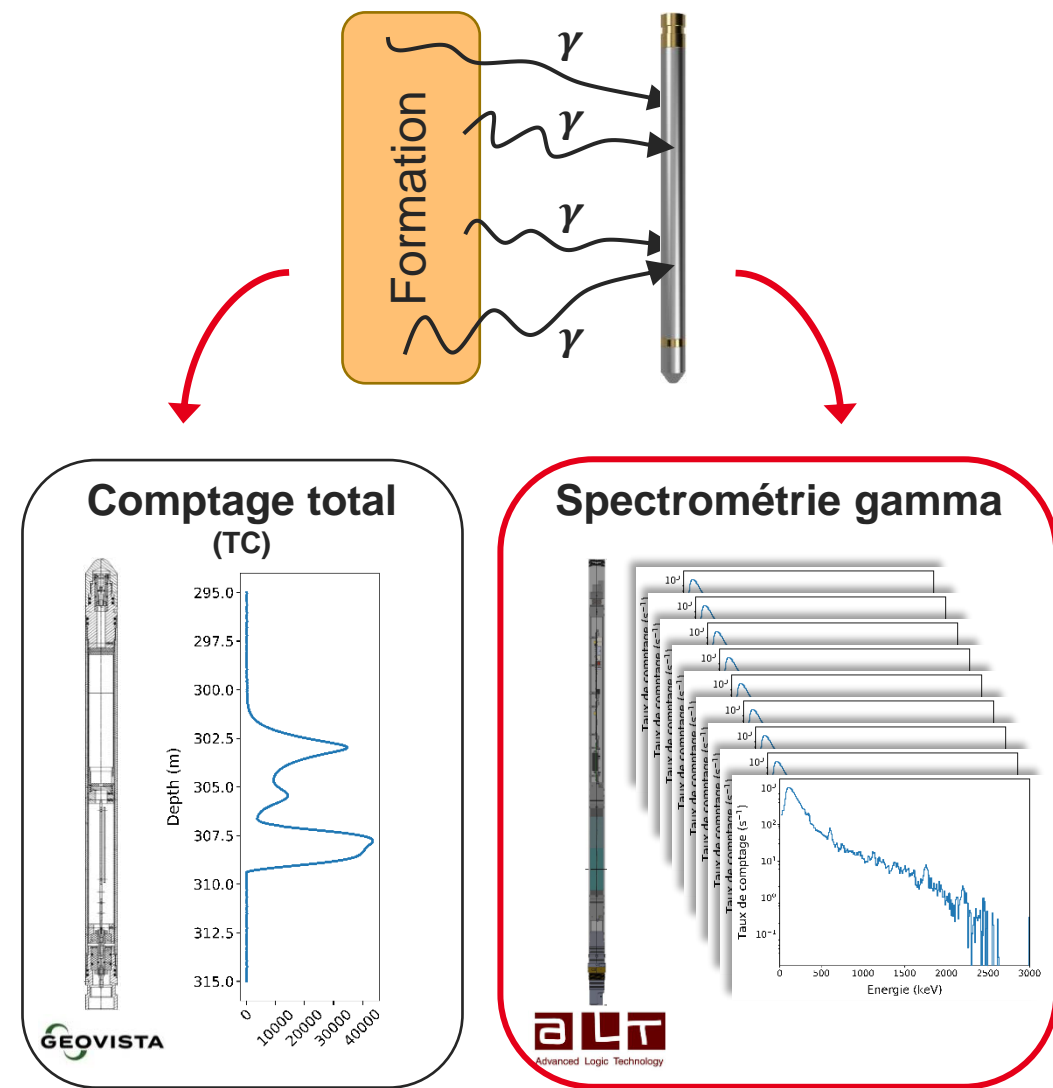
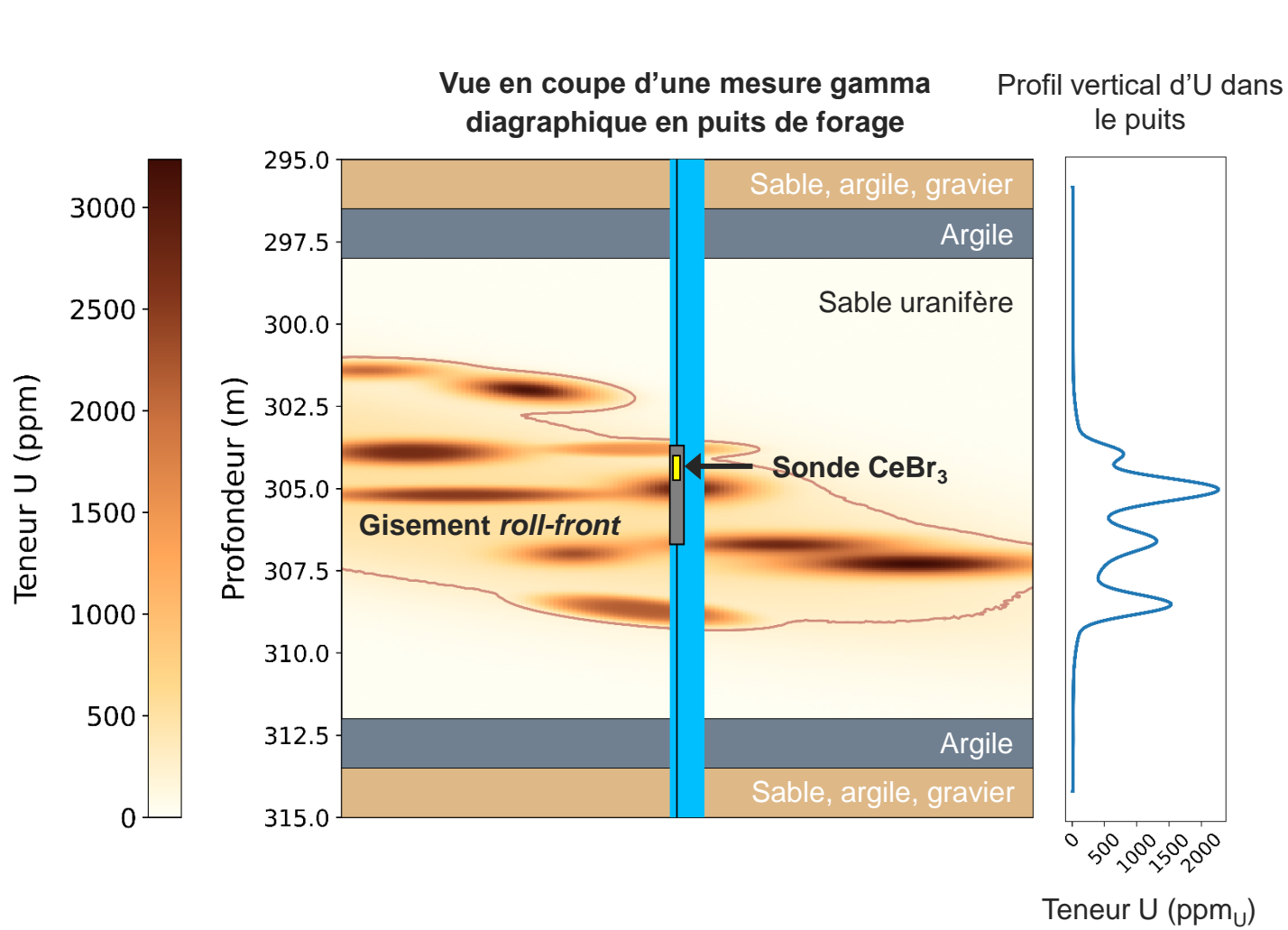
⁴I2M, Marseille, France

⁵M2P2, Marseille, France



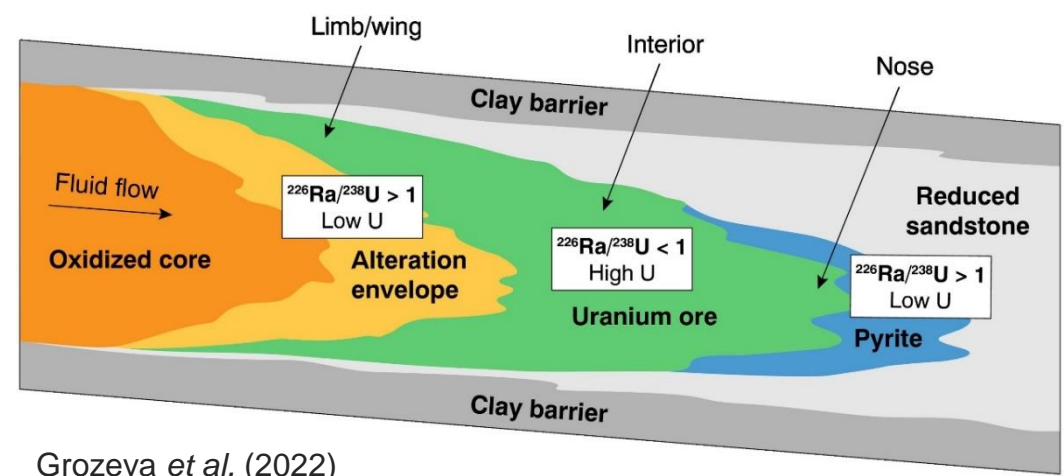
1 ■ Contexte & Enjeux

Contexte : la mesure gamma diagraphique dans les fronts d'oxydo-réduction



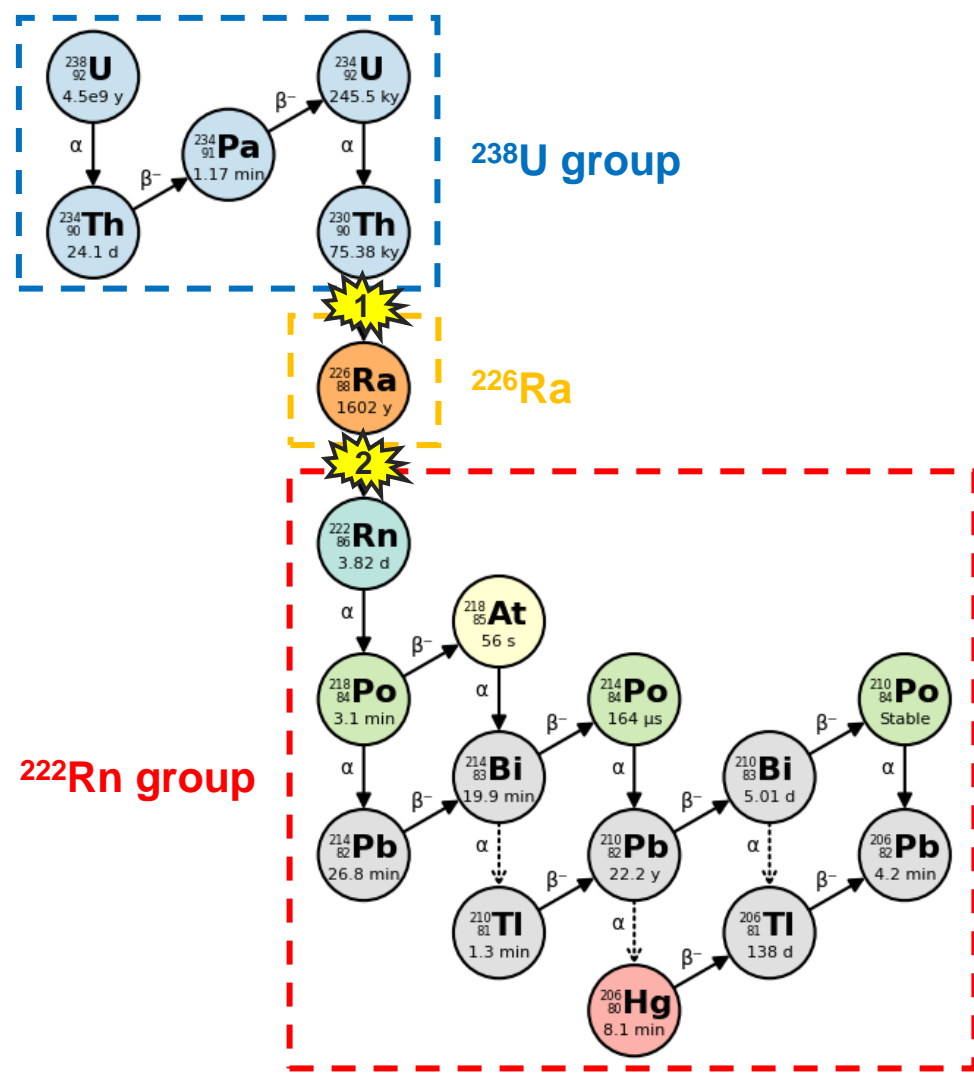
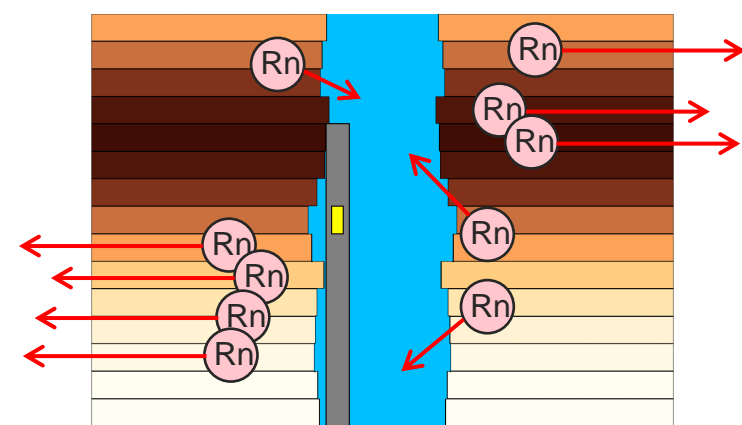
Déséquilibre radioactif dans les chaînes de l'uranium

1 Vue en coupe d'un front d'oxydo-réduction

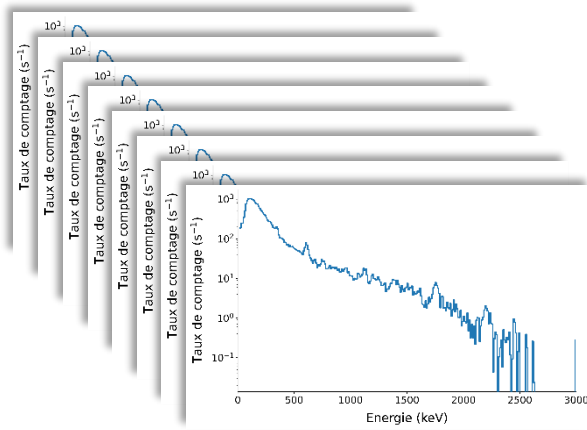


Grozeva et al. (2022)
<https://doi.org/10.1016/j.gexplo.2022.106961>

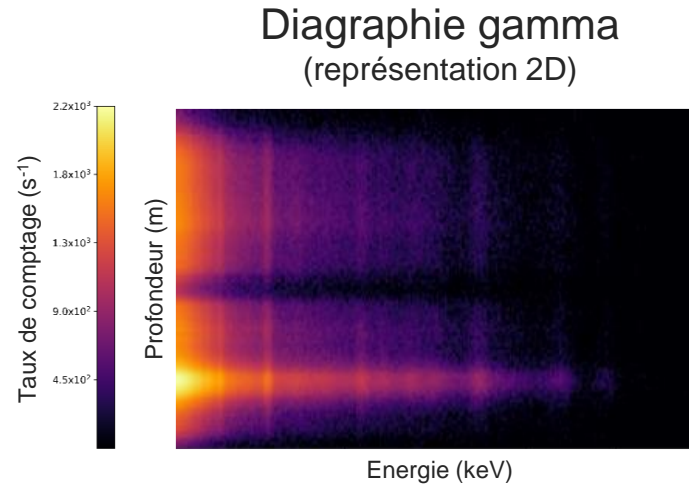
2 Migration du radon dans le puits de forage



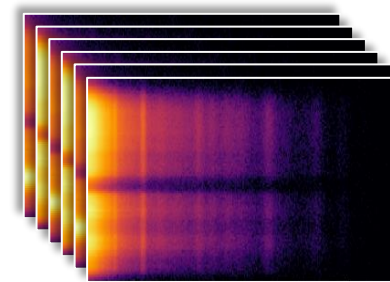
Reconstruction automatique de profils de teneur U



=



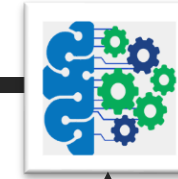
Jeu d'entraînement



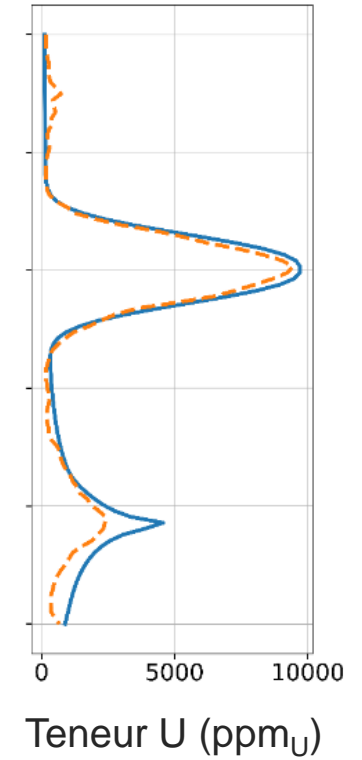
Méthodes traditionnelles inefficaces :

- Déséquilibre radioactif
- Bruit statistique élevé
- Faible résolution en énergie de la sonde CeBr₃

Prédiction



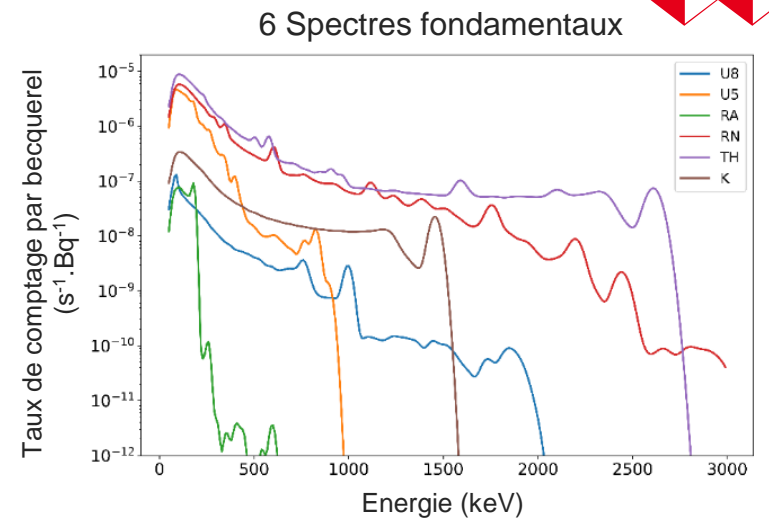
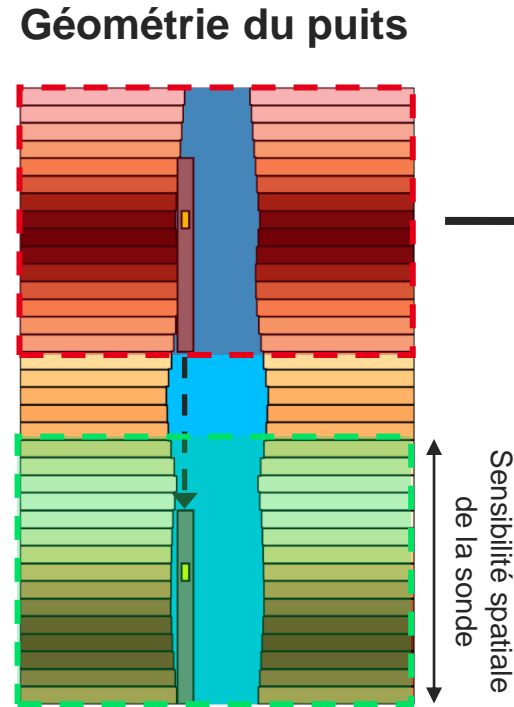
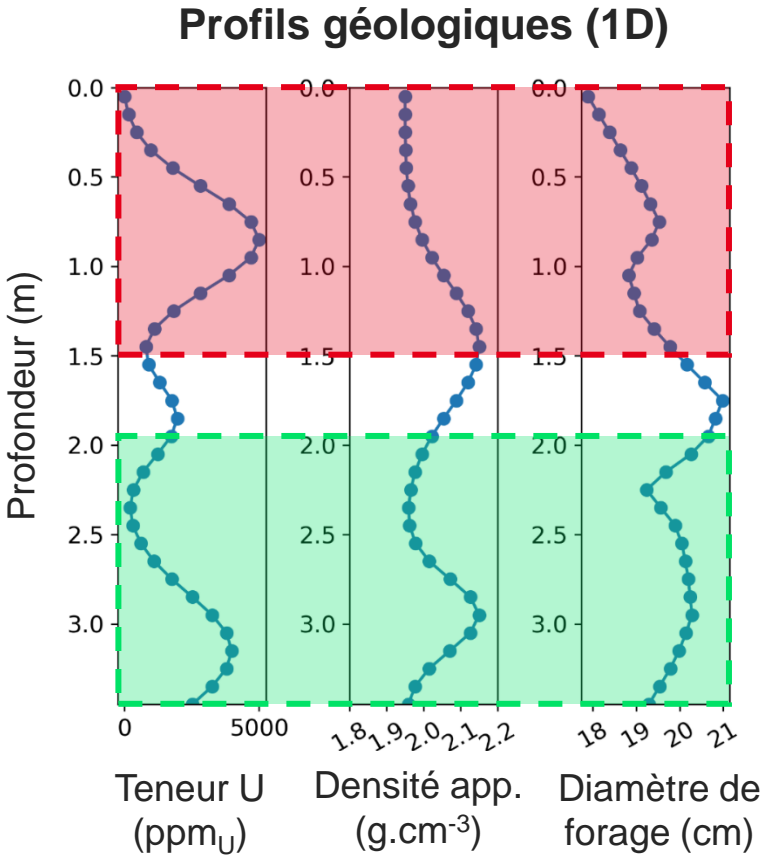
Entraînement



Nombre très limité de diagraphies expérimentales

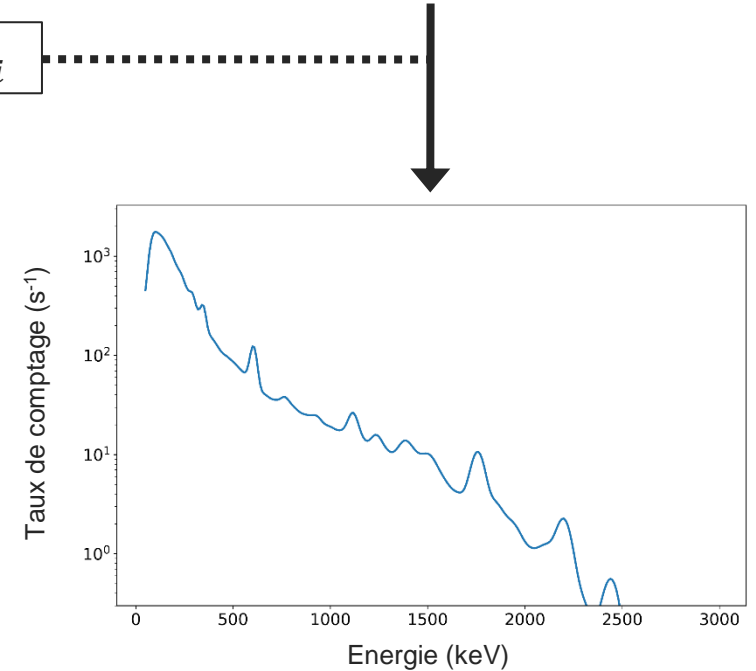
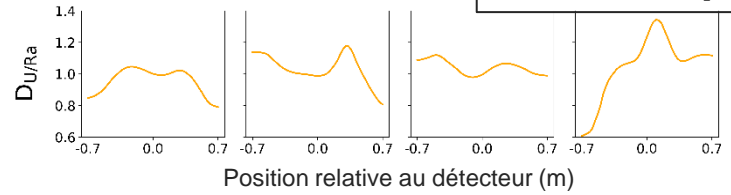
Construction d'une base de données diagraphiques simulées

Simulation d'une diagraphie gamma spectrale



Activités a_i

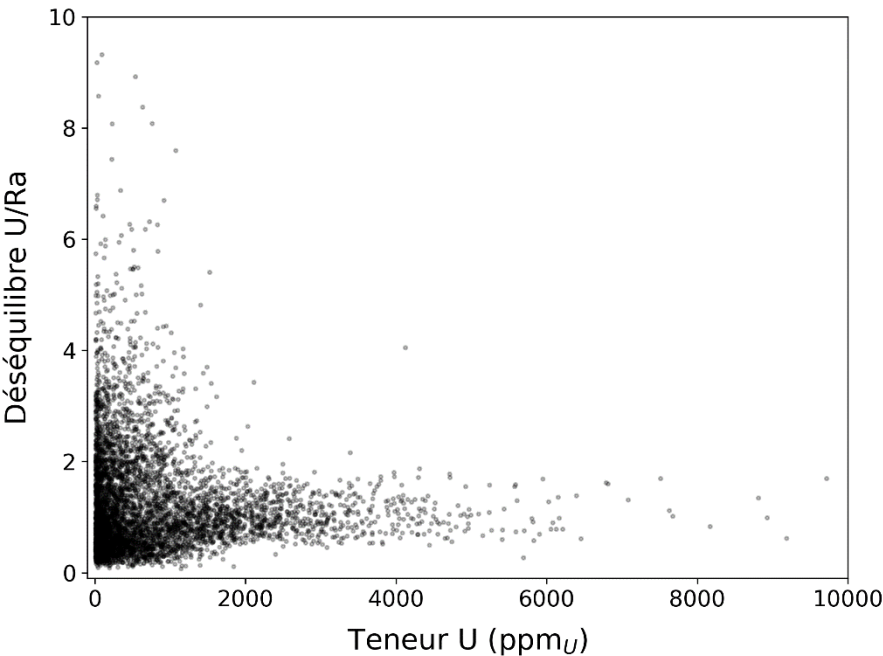
Profils de teneur U et déséquilibre



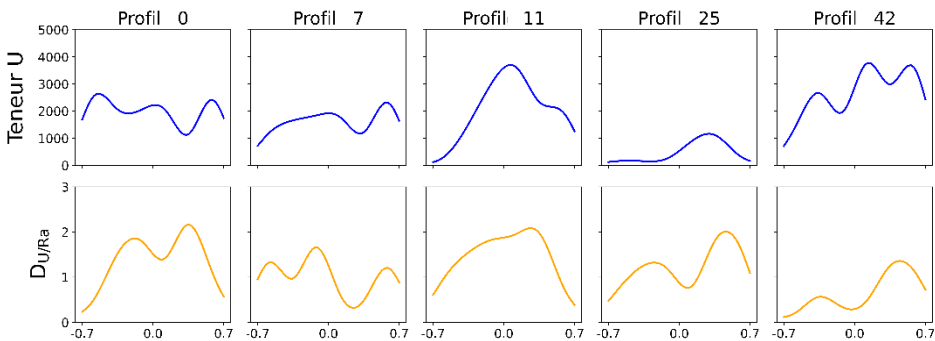
Relation teneur U – déséquilibre U/Ra



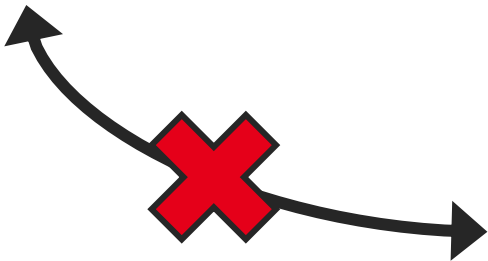
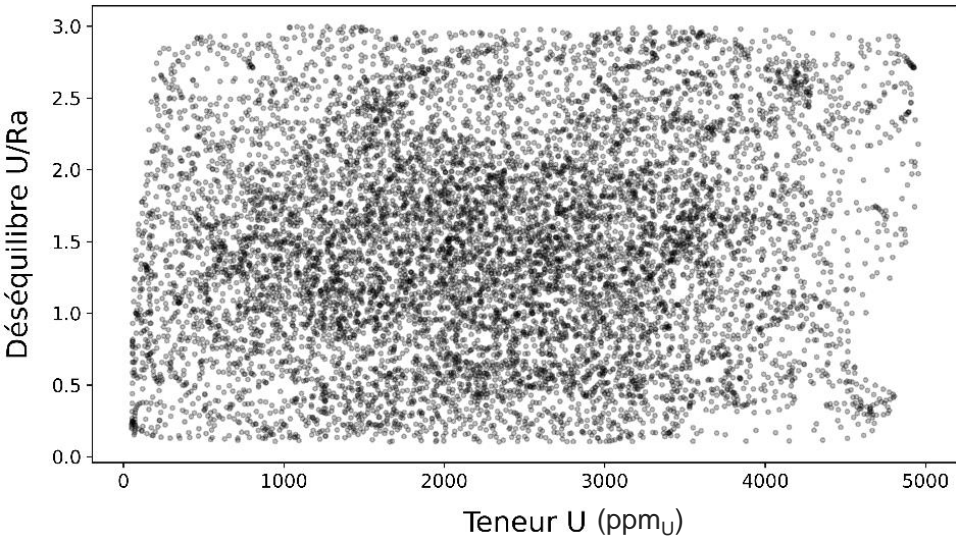
Distribution jointe de U et $D_{U/Ra}$
issue de mesures sur échantillons



Profils construits à partir de B-splines



Distribution des points agrégés



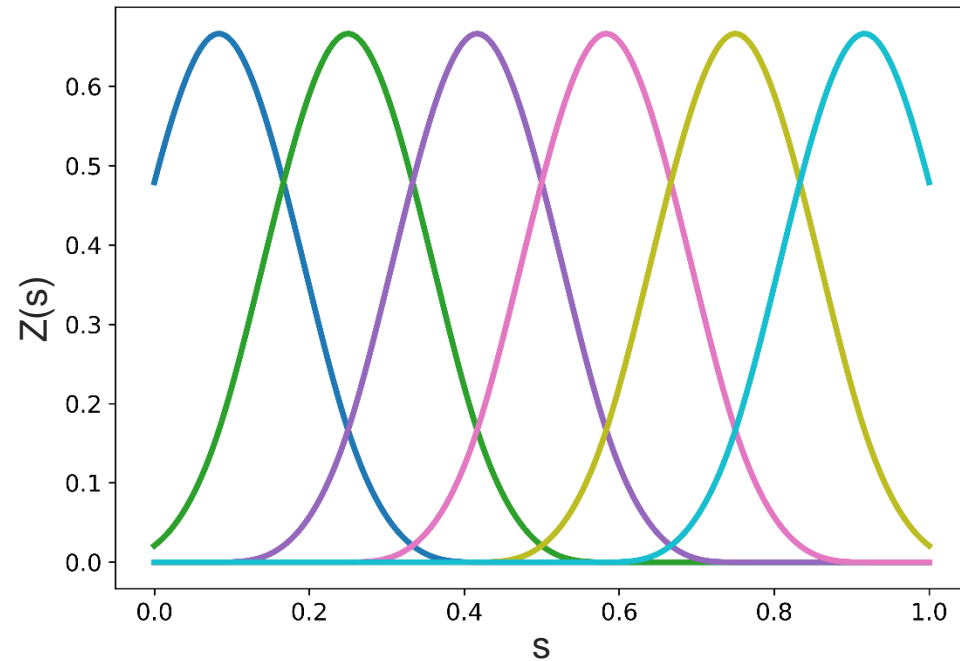
2 ■ Génération d'entrées fonctionnelles liées par une copule gaussienne

Génération de profils à l'aide de B-splines



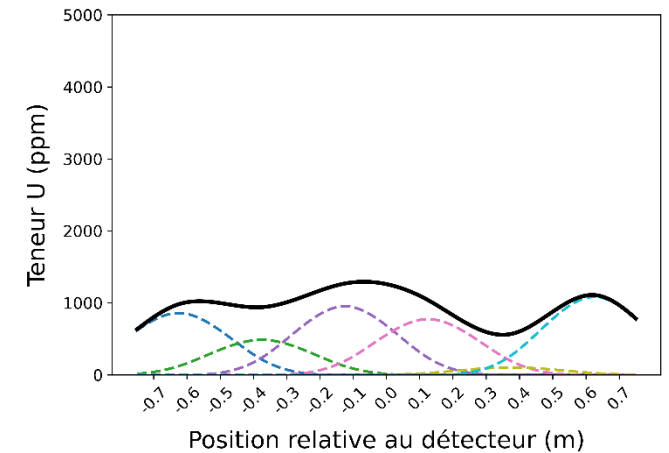
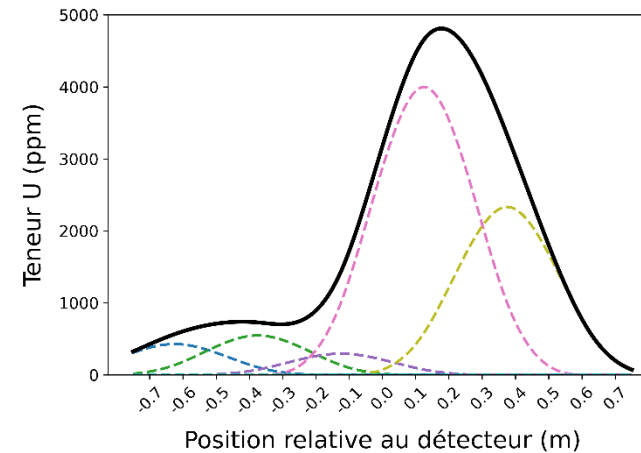
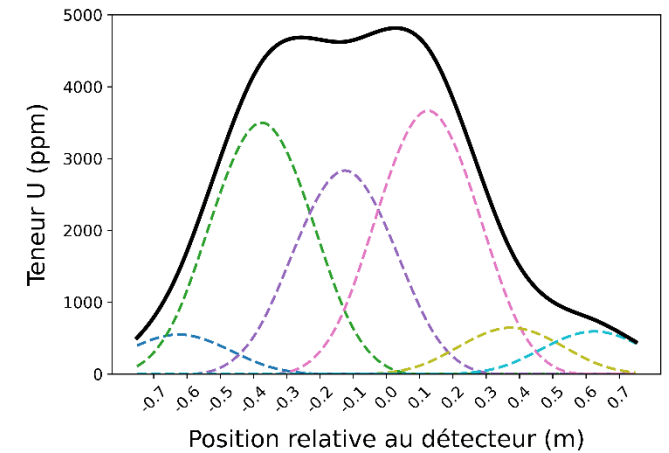
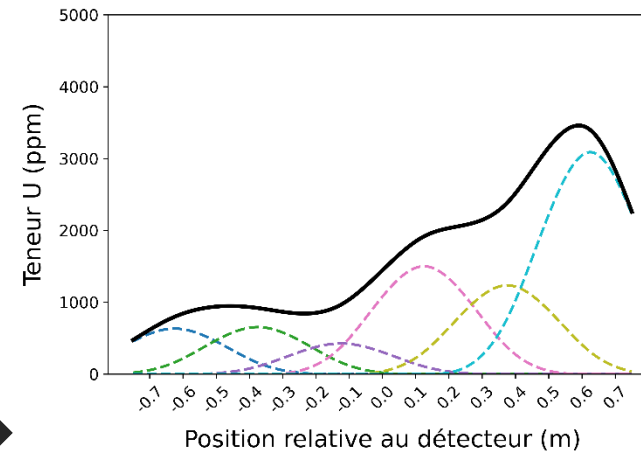
Courbes de teneur U générées par combinaison linéaire de B-splines et mise à l'échelle

Fonctions de base B-splines



De Boor (1978)

<https://doi.org/10.2307/2006241>



$$Z(s) = \sum_{k=1}^K \beta_k B_k(s)$$

Copule gaussienne

Théorème de Sklar : $F(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$

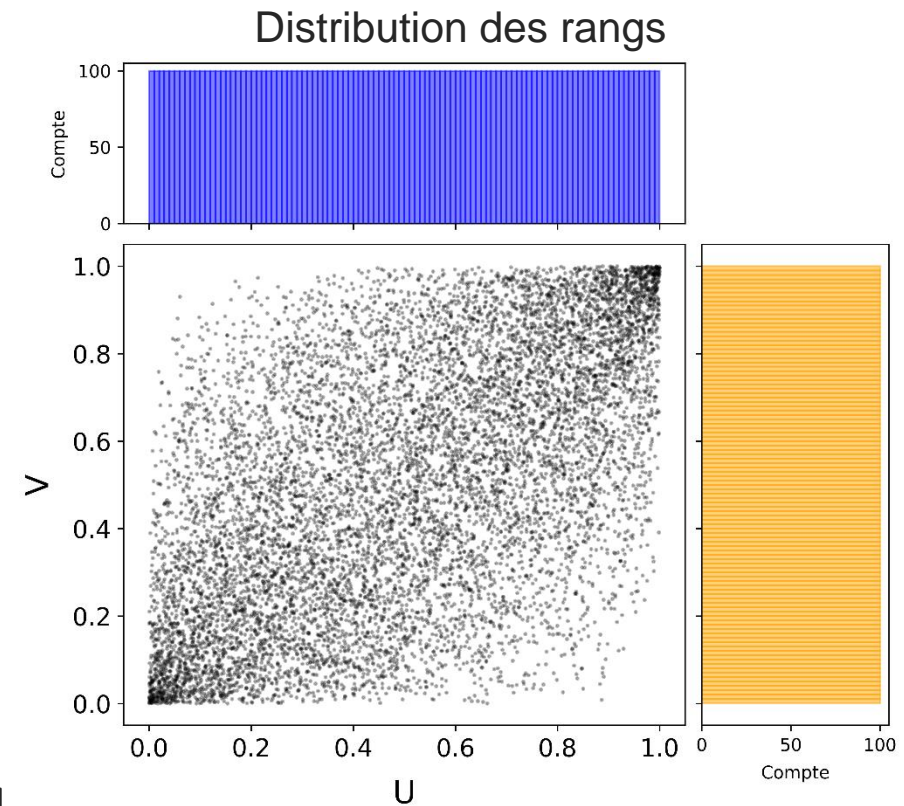
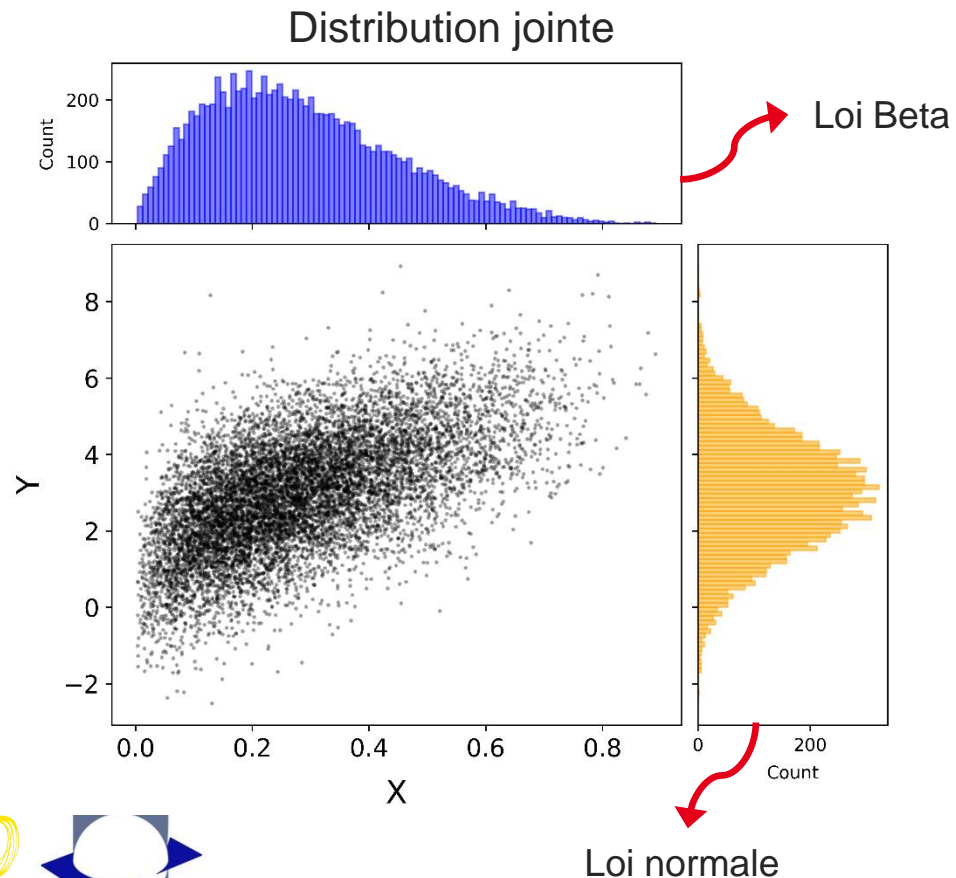
Copule gaussienne : $\forall (u, v) \in [0, 1]^2, C_\rho(u, v) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$

avec :

- Φ_ρ CDF de la loi normale multivariée centrée de matrice de covariance $\Sigma_\rho = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$
- Φ CDF de la loi normale centrée réduite

Génération de $(X, Y) \sim C_\rho$:

- $(Z_U, Z_V) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_\rho)$
- $U := \Phi(Z_U), \quad V := \Phi(Z_V)$
- $X := F_X^{-1}(U), \quad Y := F_Y^{-1}(V)$



$\rho = 0.6$

Génération des entrées fonctionnelles

M points par courbe

Matrice des B-splines discrétisées suivant M : $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{K \times M}$

$\boldsymbol{\beta}^U, \boldsymbol{\beta}^V$: coefficients de la décomposition en B-splines

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}^U \\ \boldsymbol{\beta}^V \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left(0, \begin{pmatrix} I_m & \rho I_m \\ \rho I_m & I_m \end{pmatrix} \right) \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{Z}^U \\ \mathbf{Z}^V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\beta}^U \\ \mathbf{B}^T \boldsymbol{\beta}^V \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left(0, \begin{pmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{B} & \rho \mathbf{B}^T \mathbf{B} \\ \rho \mathbf{B}^T \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \mathbf{B} \end{pmatrix} \right)$$

$$\left. \begin{pmatrix} Z_s^U \\ Z_s^V \end{pmatrix} \right|_{S=s} = \begin{pmatrix} B_{\cdot,s}^T \boldsymbol{\beta}^U \\ B_{\cdot,s}^T \boldsymbol{\beta}^V \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left(0, \|B_{\cdot,s}\|_2^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$F_{(Z_s^U, Z_s^V)}(z_U, z_V) = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^M \Phi_\rho \left(\frac{z_U}{\|B_{\cdot,s}\|_2}, \frac{z_V}{\|B_{\cdot,s}\|_2} \right)$$

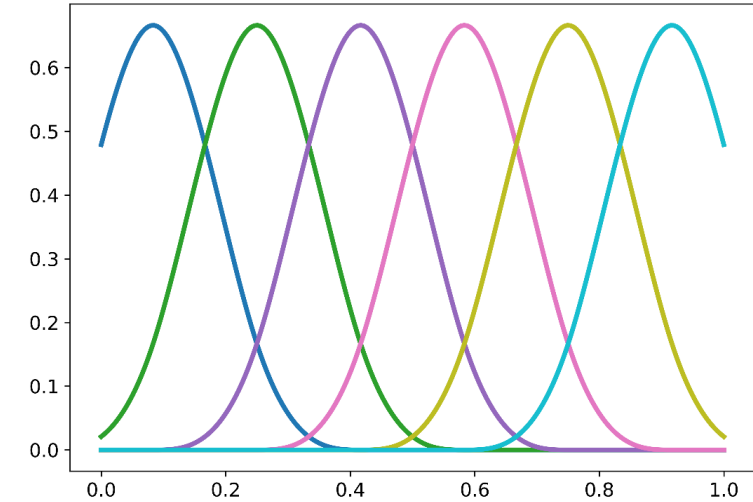
Copule non préservée si $\|B_{\cdot,s}\|_2$ varie avec s



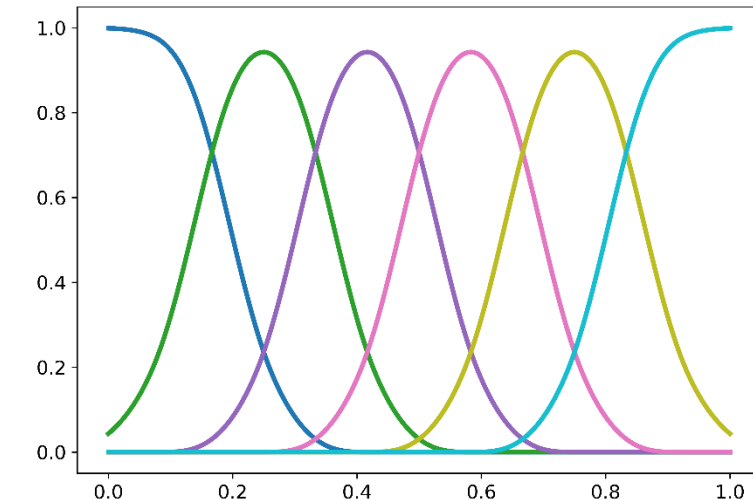
Solution = standardisation des B-splines :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \tilde{B}_{\cdot,s} = \frac{B_{\cdot,s}}{\|B_{\cdot,s}\|_2} \Rightarrow \|\tilde{B}_{\cdot,s}\|_2 = 1 \Rightarrow F_{(Z_s^U, Z_s^V)}(z_U, z_V) = \Phi_\rho(z_U, z_V)$$

Base classique



Base standardisée



Génération des entrées fonctionnelles



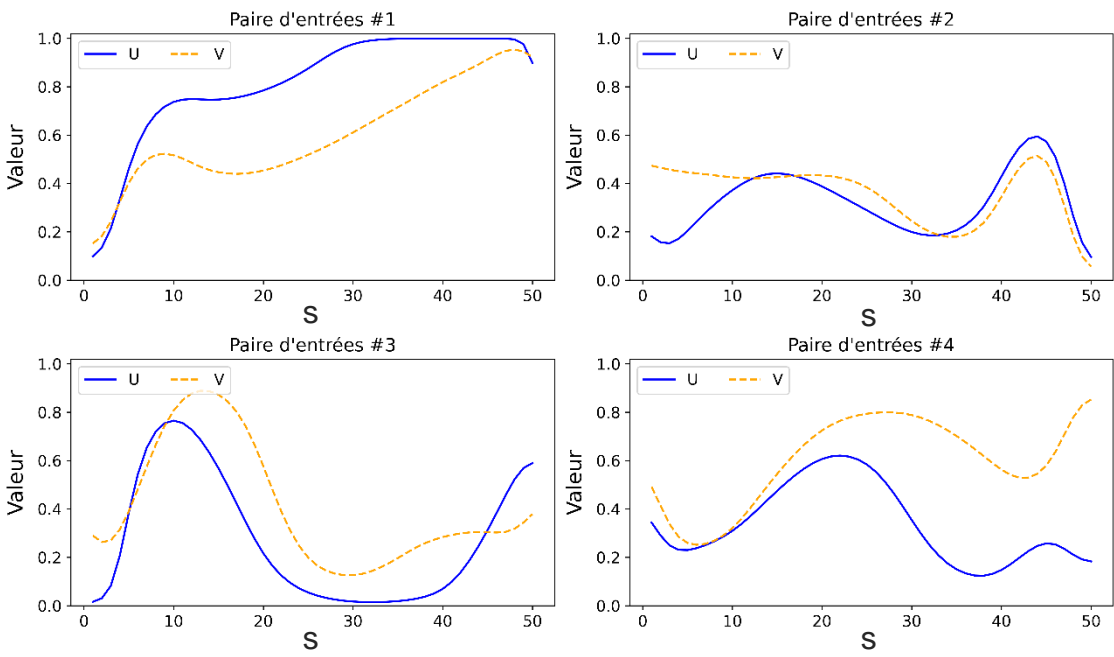
Tirage aléatoire

$$\begin{pmatrix} \beta^U \\ \beta^V \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{pmatrix} I_m & \rho I_m \\ \rho I_m & I_m \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}^U \\ \mathbf{Z}^V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}}^T \beta_U \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \beta_V \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{B}} & \rho \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{B}} \\ \rho \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{B}} \end{pmatrix}\right)$$

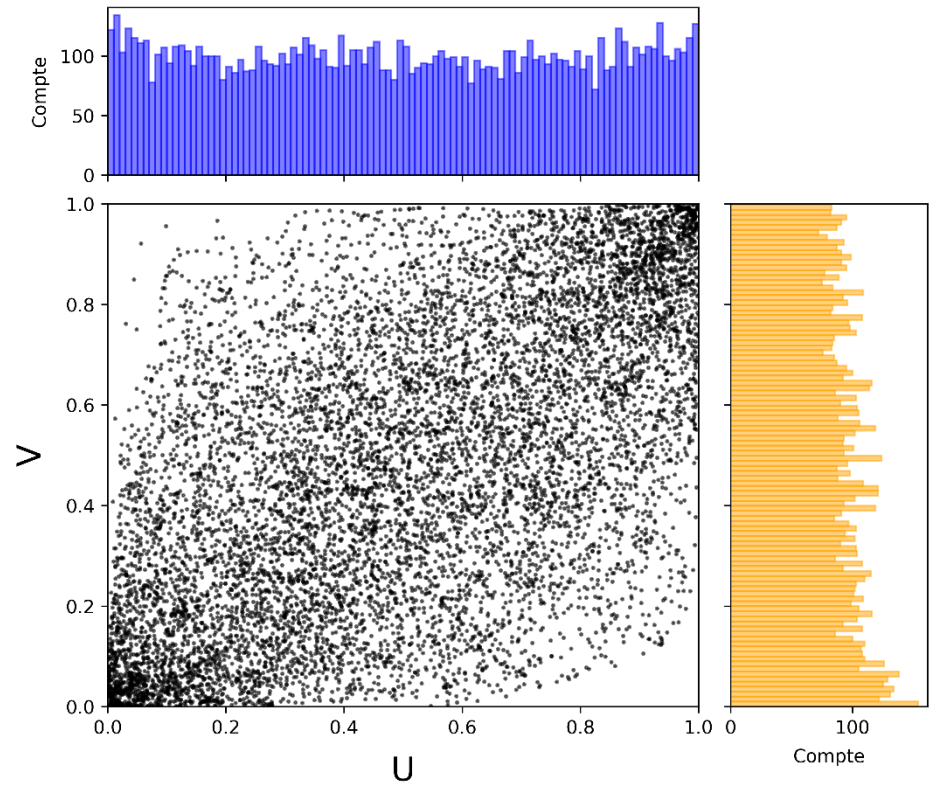
$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (U_1, \dots, U_s) \text{ avec } U_k = \Phi^{-1}(\mathbf{Z}_{U,k}) \sim \mathcal{U}(0,1) \\ \mathbf{V} &= (V_1, \dots, V_s) \text{ avec } V_k = \Phi^{-1}(\mathbf{Z}_{V,k}) \sim \mathcal{U}(0,1) \end{aligned}$$

Courbes générées (espace des rangs)

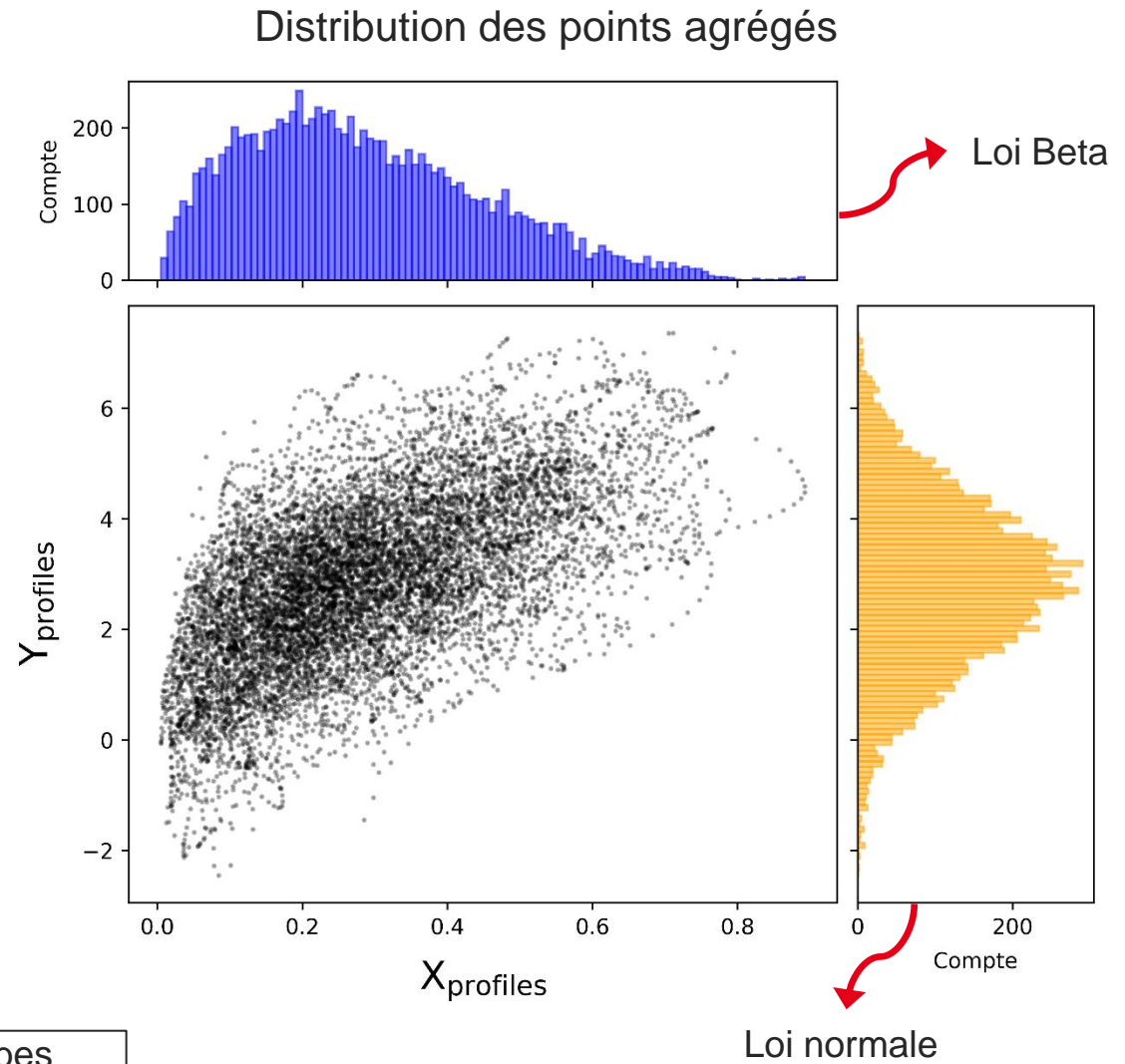
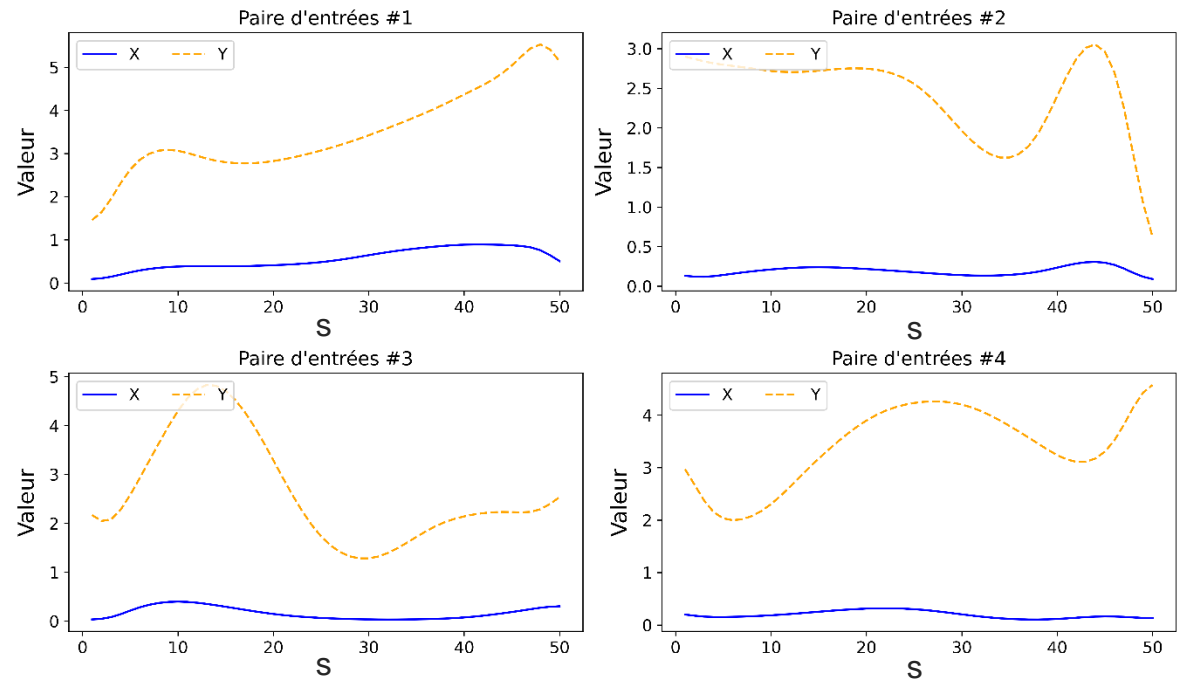
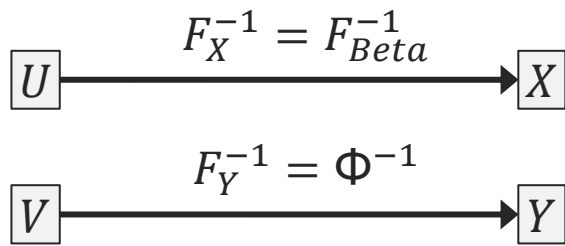


200 courbes
50 points par courbe
 $\rho = 0.6$

Distribution des points agrégés (espace des rangs)



Génération des entrées fonctionnelles



200 courbes
50 points par courbe
 $\rho = 0.6$





2 ■ Génération d'entrée fonctionnelles liées par une copule archimédienne

Copule archimédienne



$\forall (u, v) \in [0,1]^2, C_\theta(u, v) = \psi_\theta(\psi_\theta^{-1}(u) + \psi_\theta^{-1}(v))$

Pour la copule de Clayton : $\psi_\theta(x) = (1 + x)^{-1/\theta}$

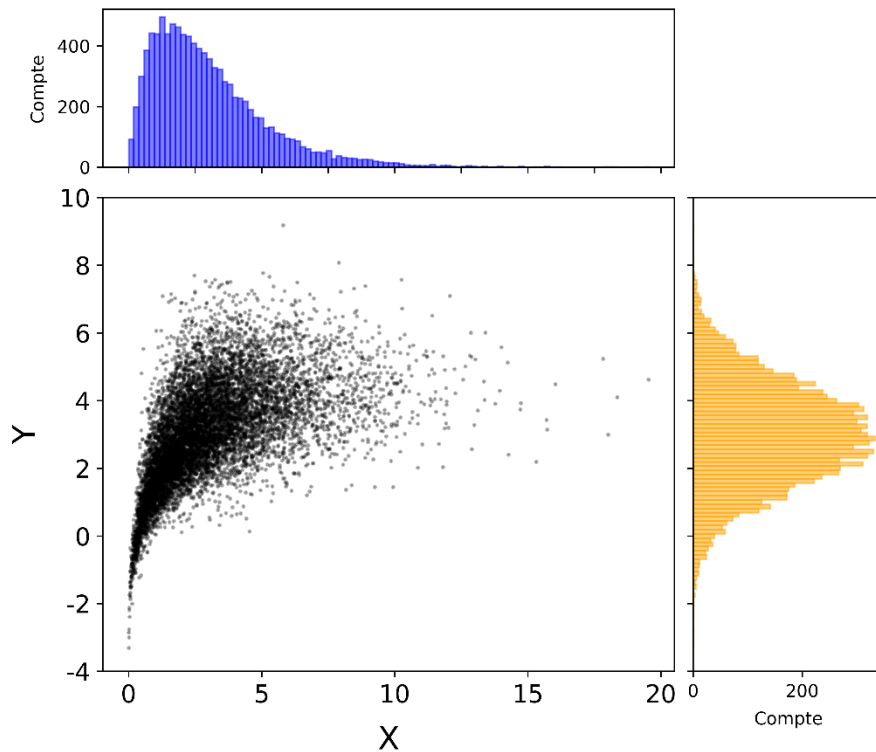
Génération de $(U, V) \sim C_\theta$:

- $E_1, E_2 \sim \text{Exp}(1)$
- $W \sim F_{w, \theta}$
- $U := \psi_\theta(E_1/W), \quad V := \psi_\theta(E_2/W)$

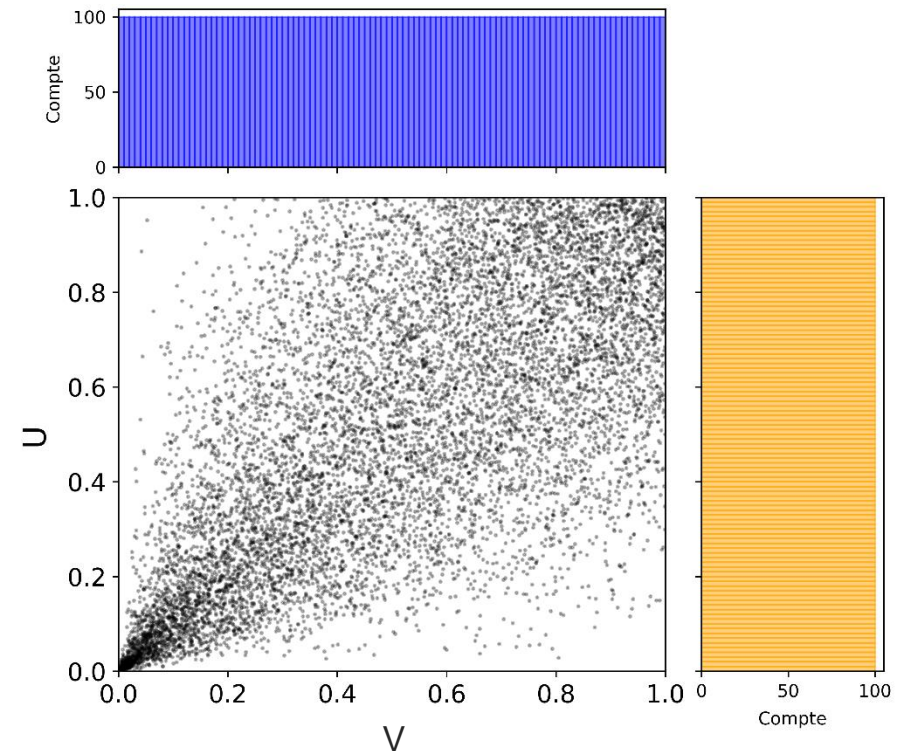
Exemple de la copule de Clayton :

- Générateur : $\psi_\theta(x) = (1 + x)^{-1/\theta}$
- Fragilité : $W \sim \Gamma(1/\theta, 1)$

Distribution jointe



Distribution des rangs



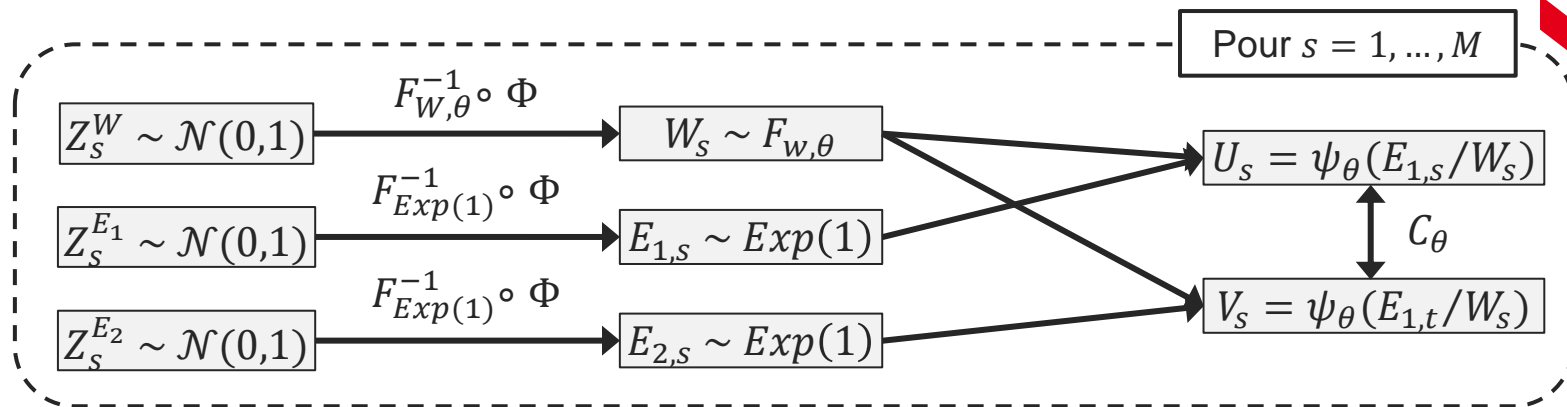
Génération des entrées fonctionnelles

Tirage aléatoire

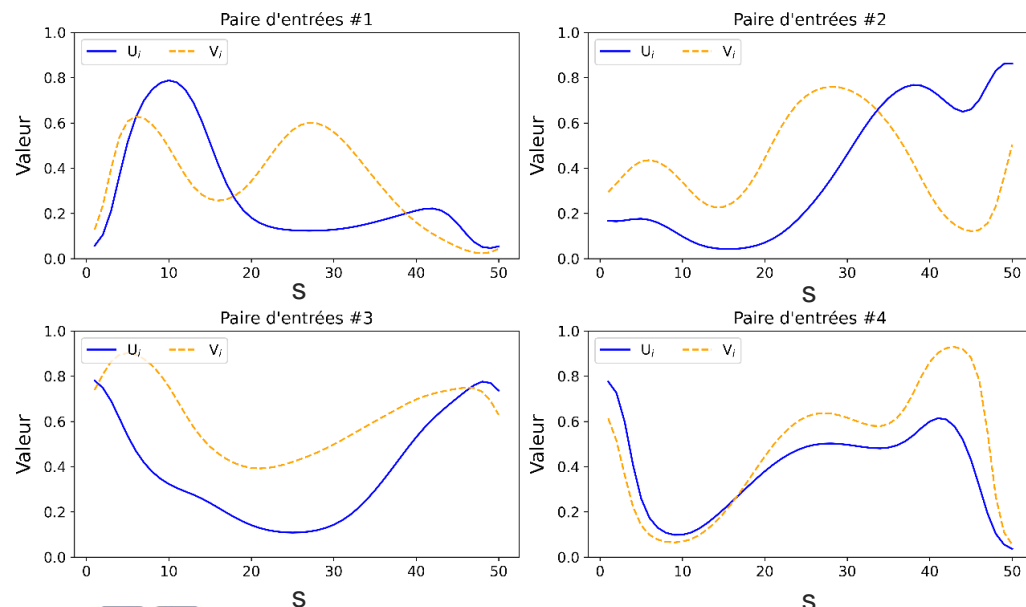
$$\beta^W \sim \mathcal{N}(0, I_m) \rightarrow Z^W \sim \mathcal{N}(0, \widetilde{\mathbf{B}}^T \widetilde{\mathbf{B}})$$

$$\beta^{E_1} \sim \mathcal{N}(0, I_m) \rightarrow Z^{E_1} \sim \mathcal{N}(0, \widetilde{\mathbf{B}}^T \widetilde{\mathbf{B}})$$

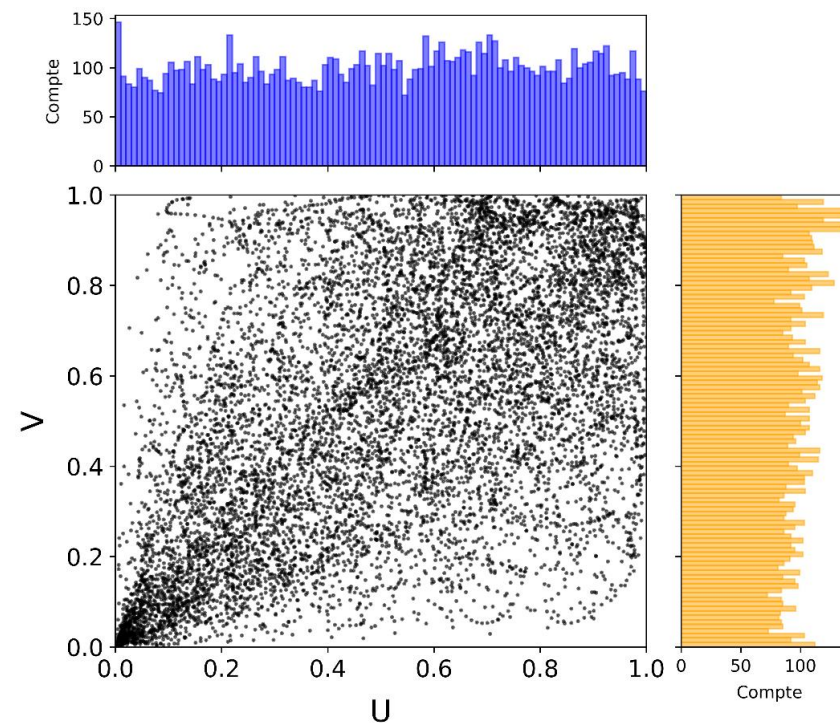
$$\beta^{E_2} \sim \mathcal{N}(0, I_m) \rightarrow Z^{E_2} \sim \mathcal{N}(0, \widetilde{\mathbf{B}}^T \widetilde{\mathbf{B}})$$



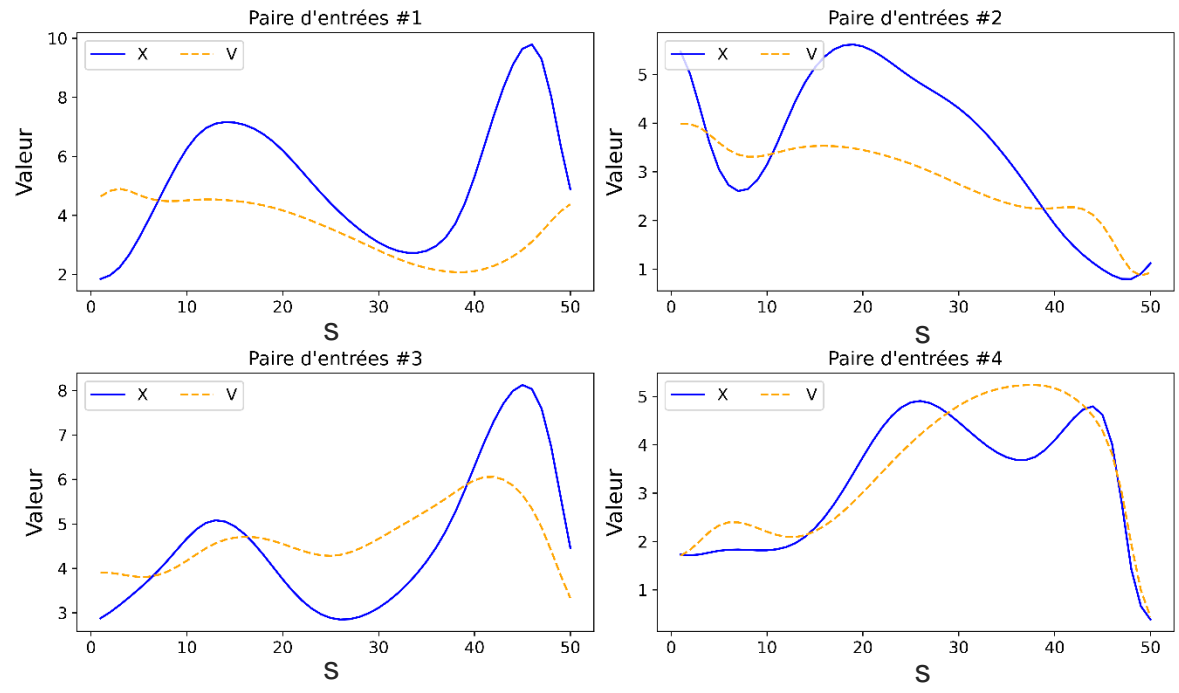
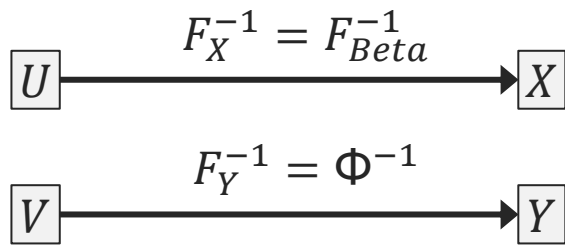
Courbes générées (espace des rangs)



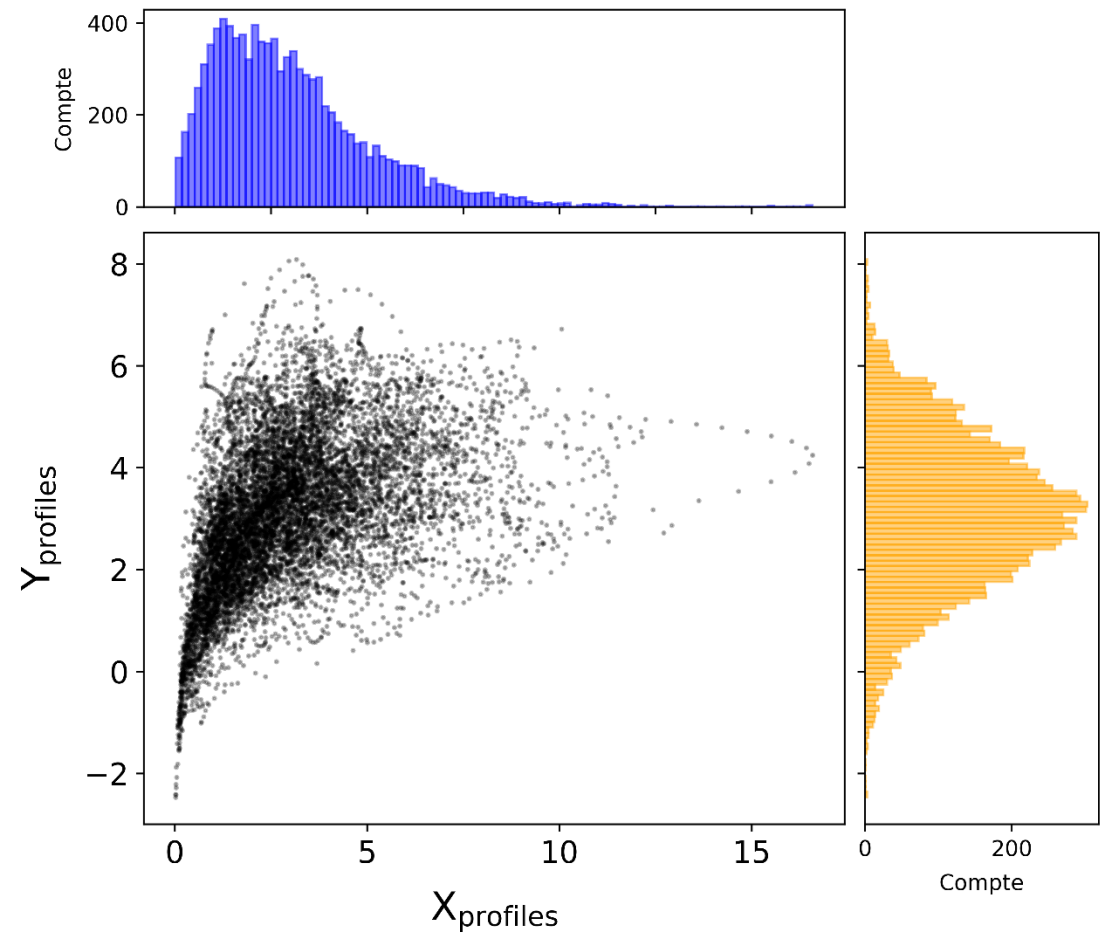
Distribution des points agrégés (espace des rangs)



Génération des entrées fonctionnelles



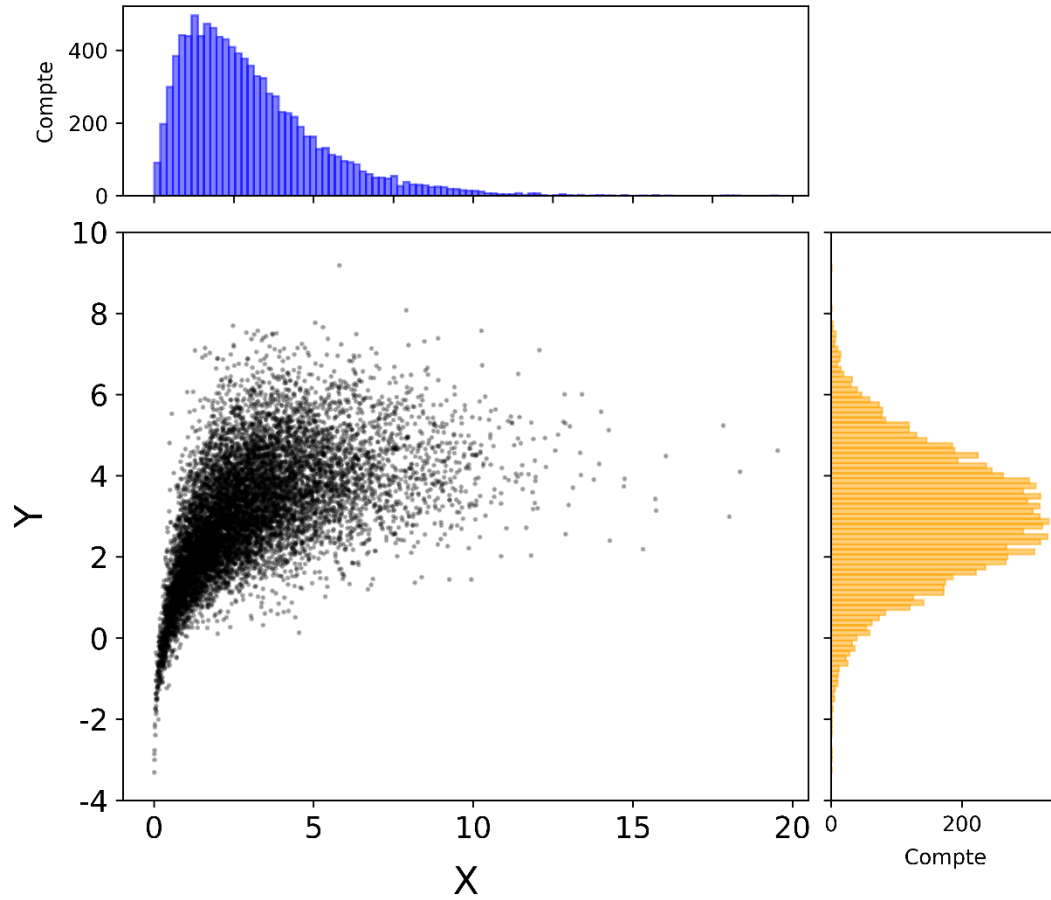
Distribution des points agrégés



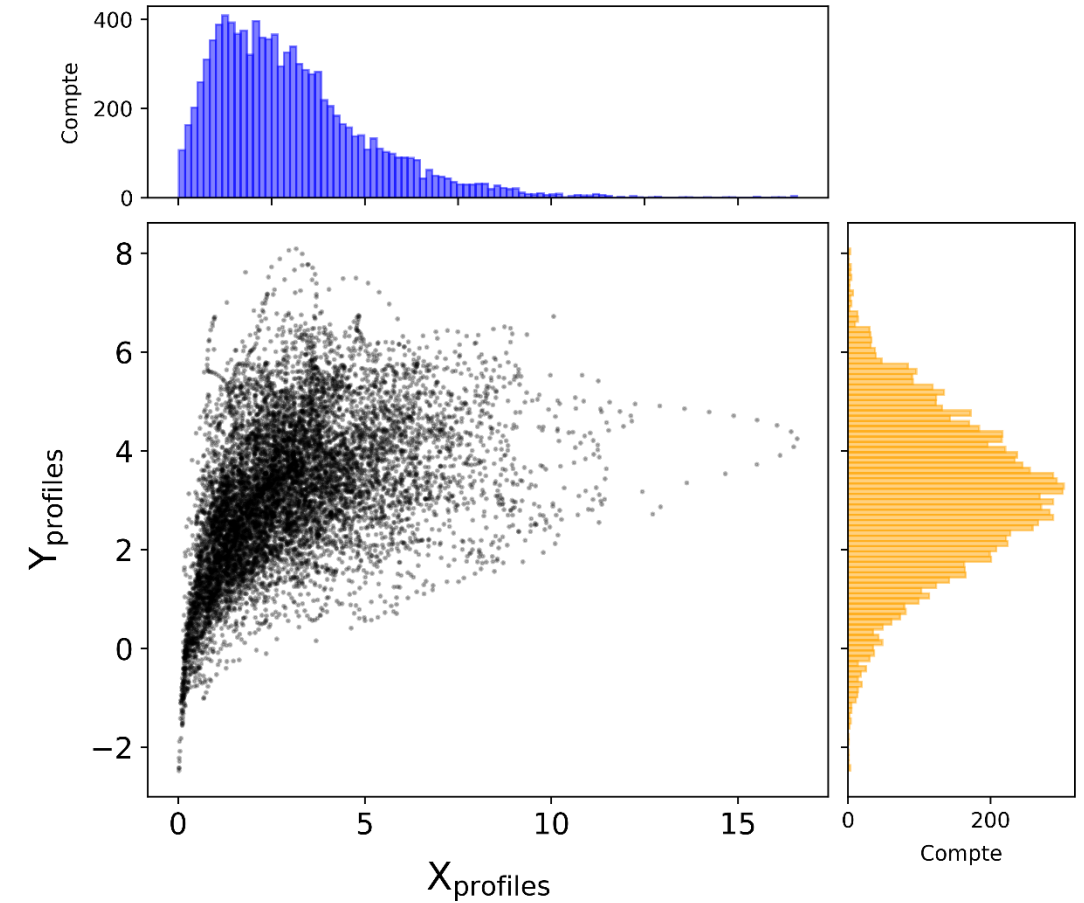
Génération des entrées fonctionnelles

Comparaison des nuages de points

Distribution jointe initiale



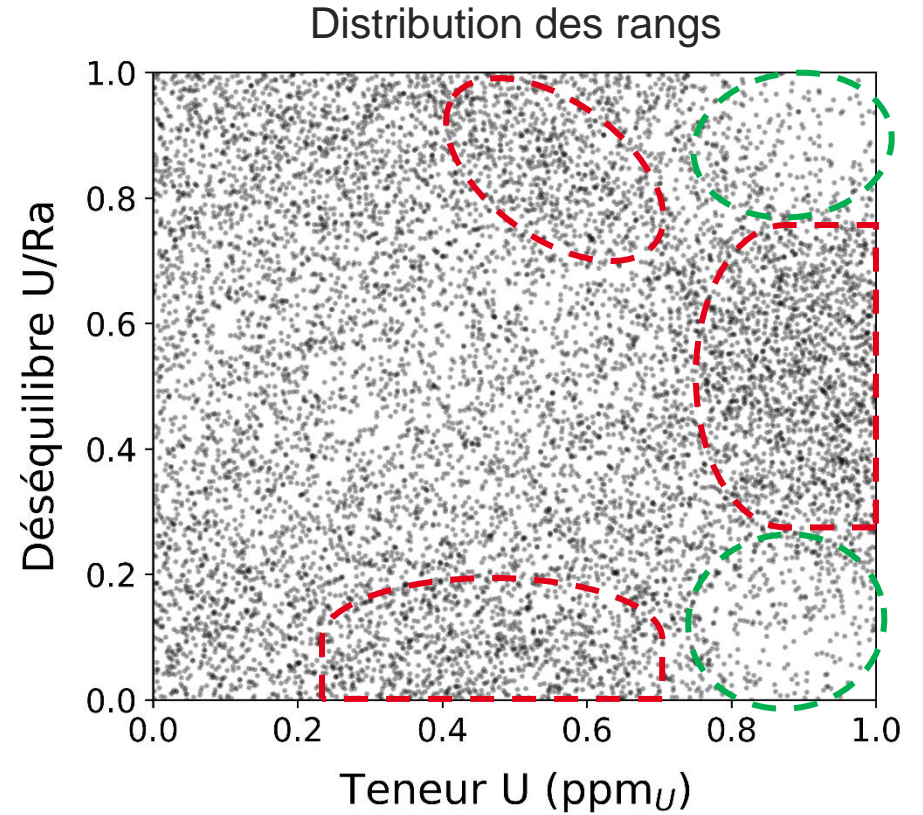
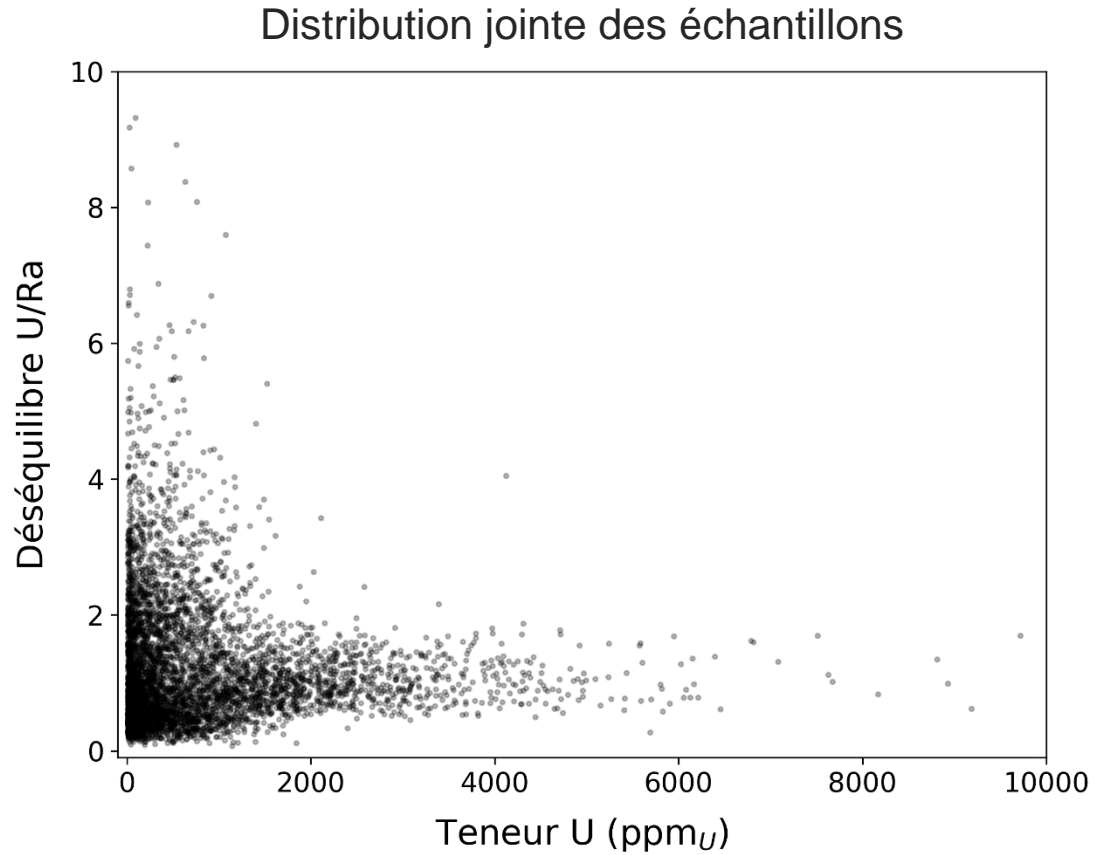
Distribution des points agrégés





3 ■ Génération d'entrée fonctionnelles liées par une copule de Bernstein

Relation Teneur U – Déséquilibre U/Ra



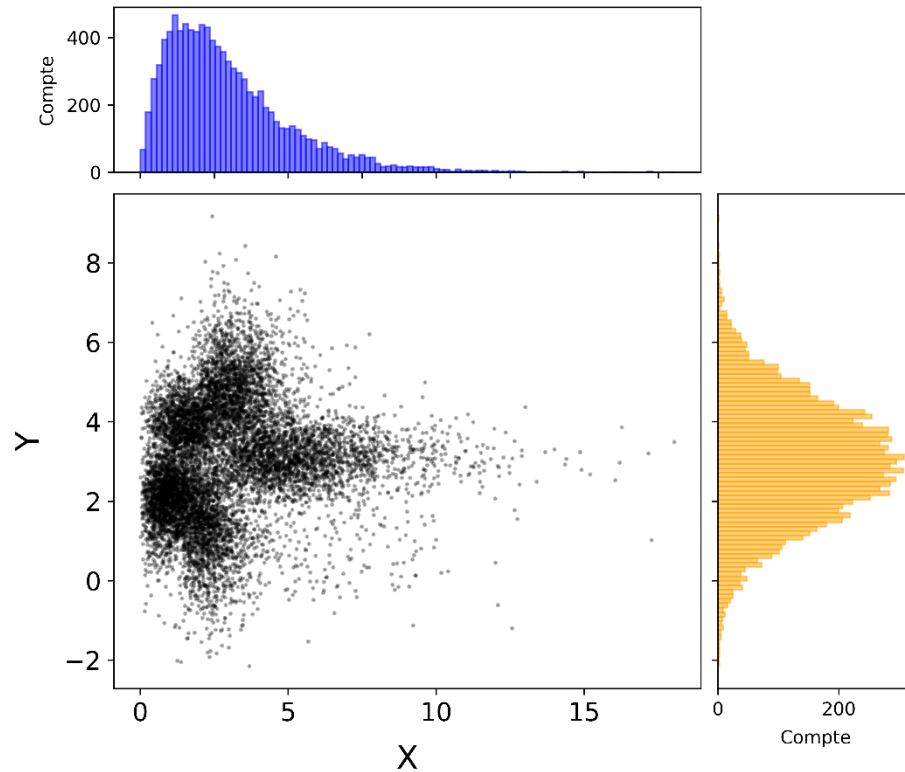
Copule de Bernstein

Copule non-paramétrique et lisse construite à partir de la copule empirique

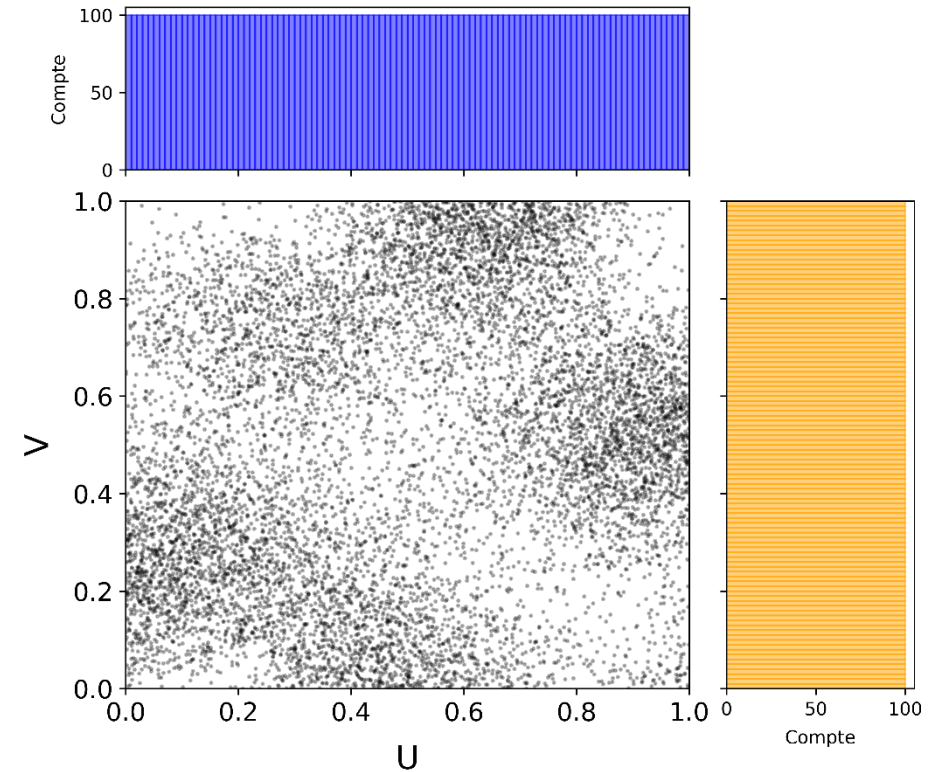
$$\forall (u, v) \in [0, 1]^2, C_m(u, v) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \pi_{ij} B_{i,m}(u) B_{j,m}(v) \quad \text{avec :}$$

- $B_{i,m}(u) = F_{\text{Beta}(i, m-i+1)}(u)$
- $\sum_{i=1}^m \pi_{ij} = \frac{1}{m}, \sum_{j=1}^m \pi_{ij} = \frac{1}{m}, \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \pi_{ij} = 1$

Distribution jointe



Distribution des rangs



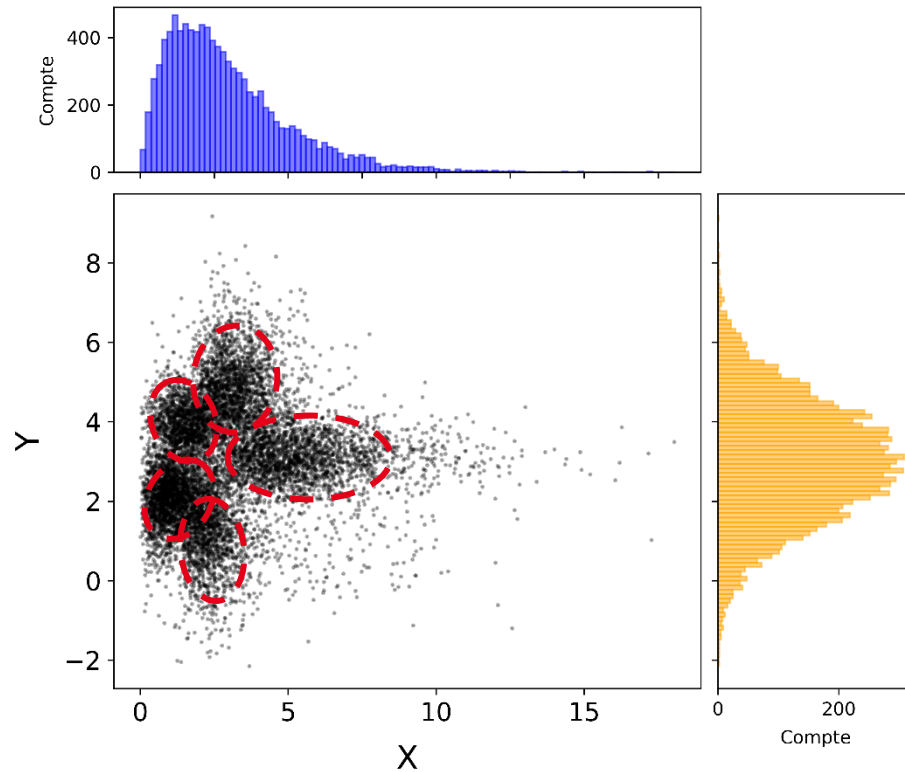
Copule de Bernstein

Copule non-paramétrique et lisse construite à partir de la copule empirique

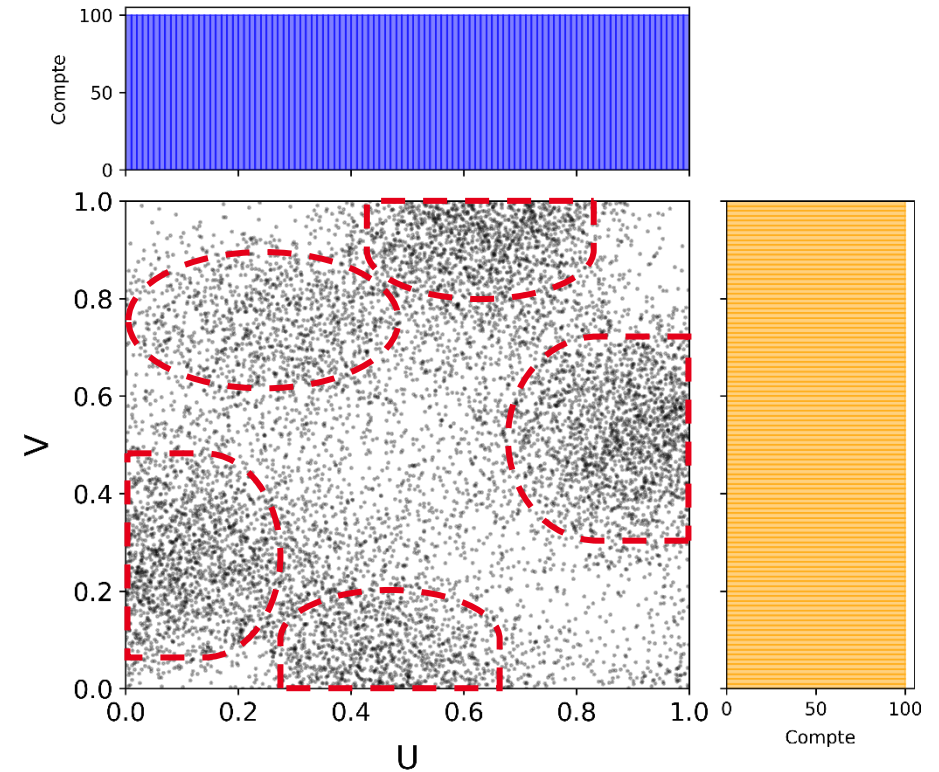
$$\forall (u, v) \in [0,1]^2, C_m(u, v) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \pi_{ij} B_{i,m}(u) B_{j,m}(v) \quad \text{avec :}$$

- $B_{i,m}(u) = F_{Beta(i, m-i+1)}(u)$
- $\sum_{i=1}^m \pi_{ij} = \frac{1}{m}, \sum_{j=1}^m \pi_{ij} = \frac{1}{m}, \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \pi_{ij} = 1$

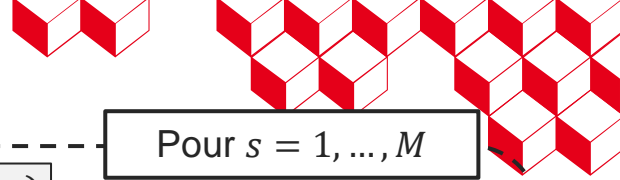
Distribution jointe



Distribution des rangs



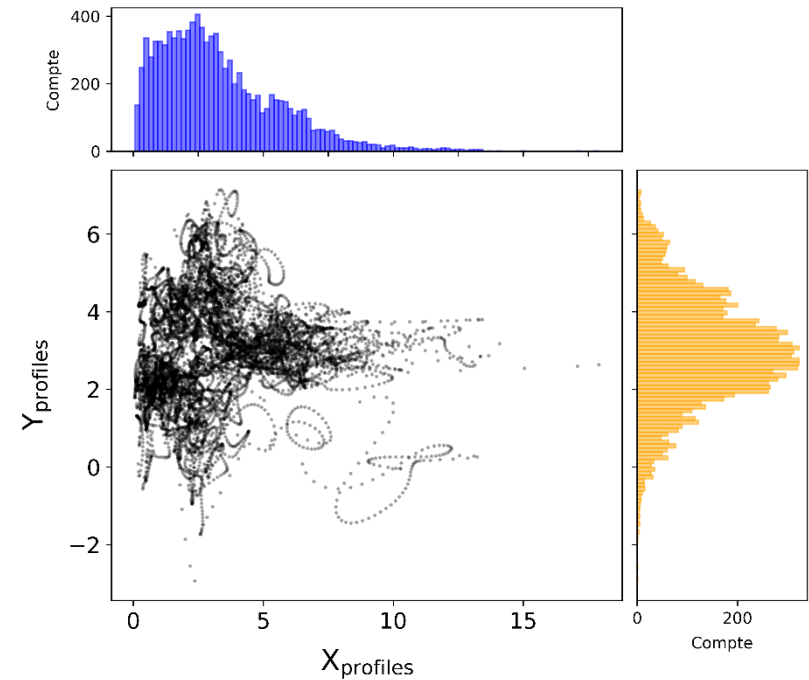
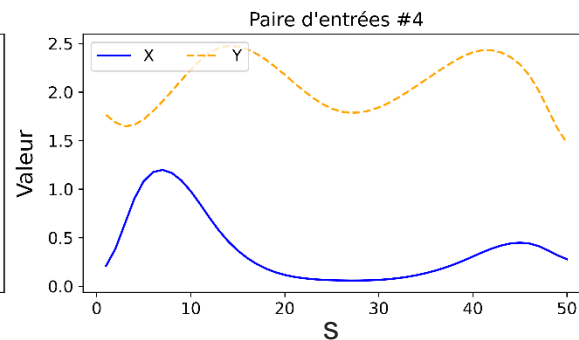
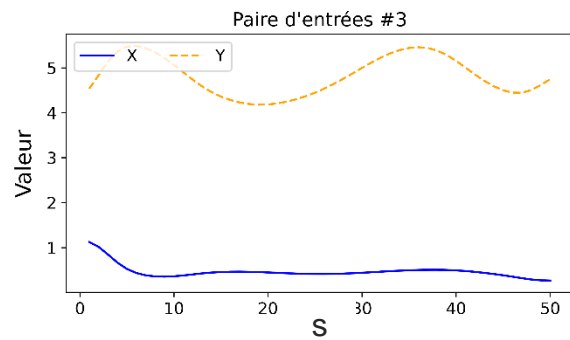
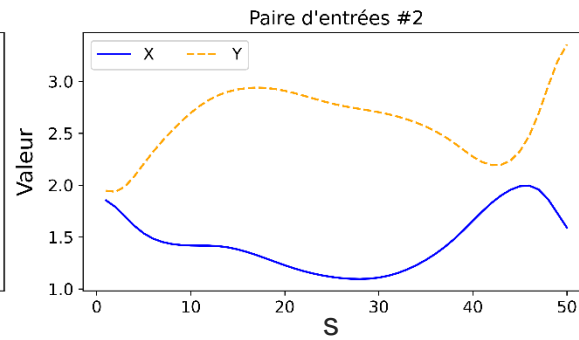
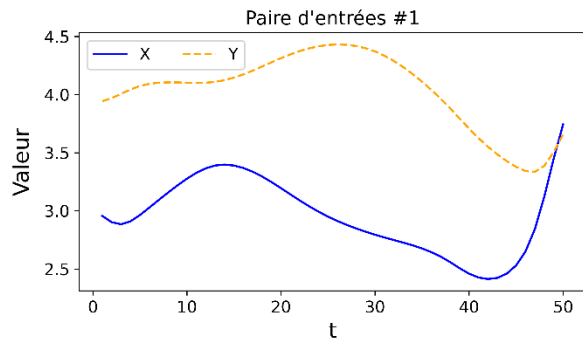
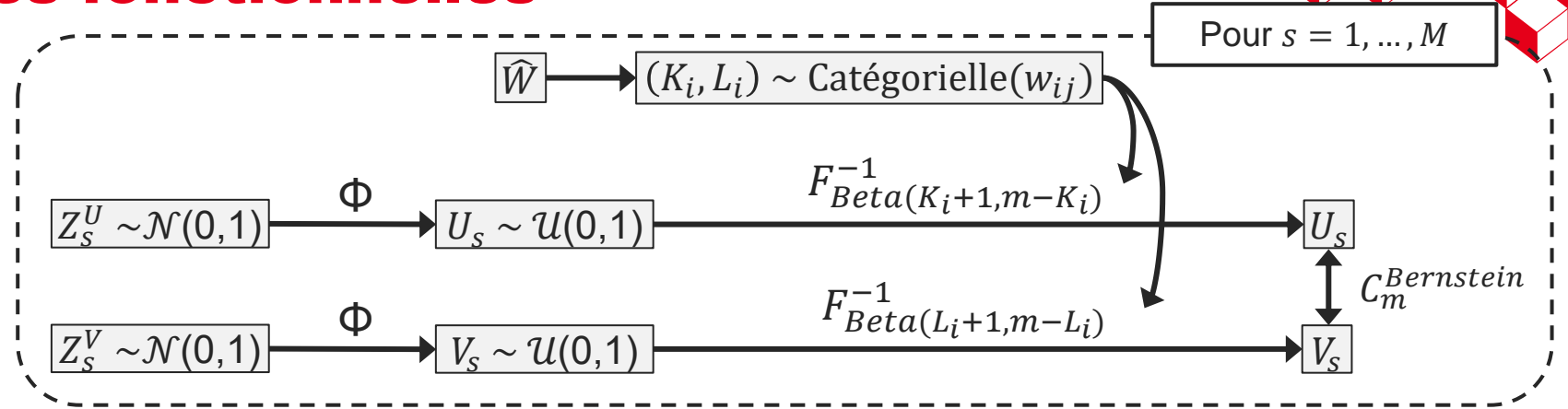
Génération des entrées fonctionnelles



Tirage aléatoire

$$\beta^U \sim \mathcal{N}(0, I_m) \rightarrow Z^W \sim \mathcal{N}(0, \widetilde{\mathbf{B}}^T \widetilde{\mathbf{B}})$$

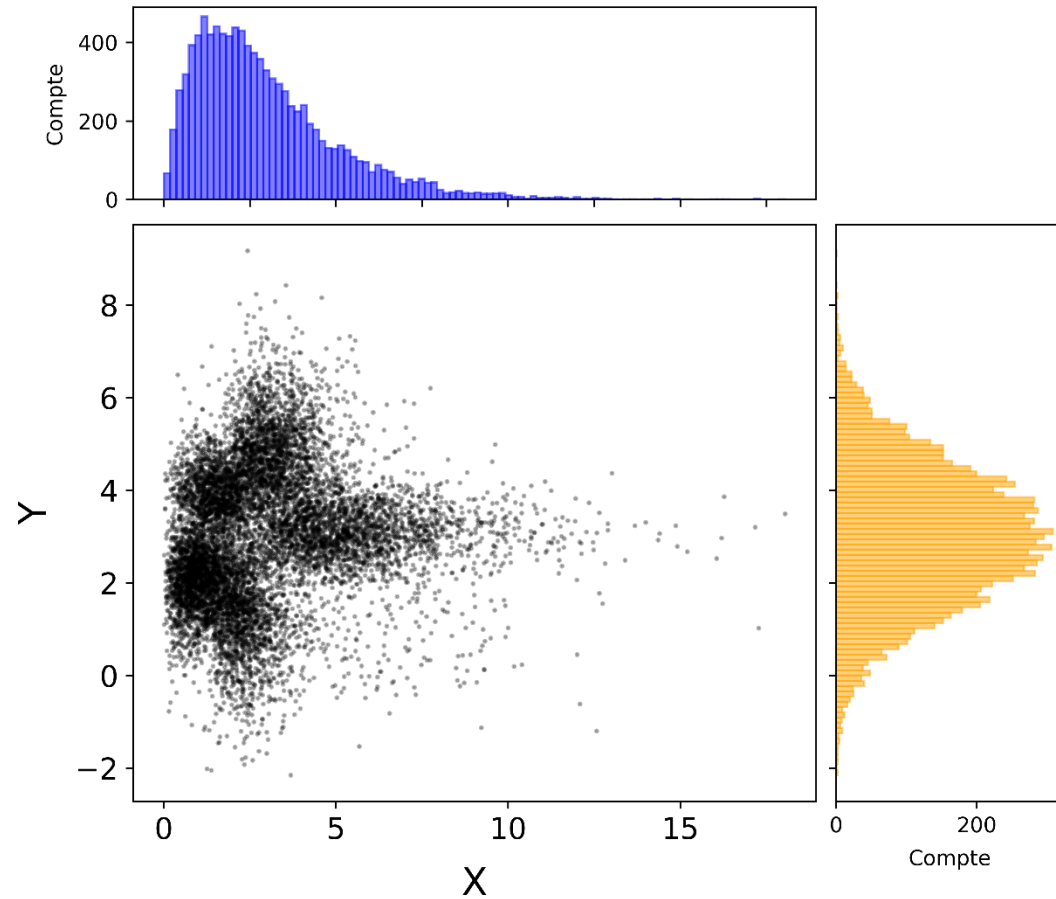
$$\beta^V \sim \mathcal{N}(0, I_m) \rightarrow Z^{E_1} \sim \mathcal{N}(0, \widetilde{\mathbf{B}}^T \widetilde{\mathbf{B}})$$



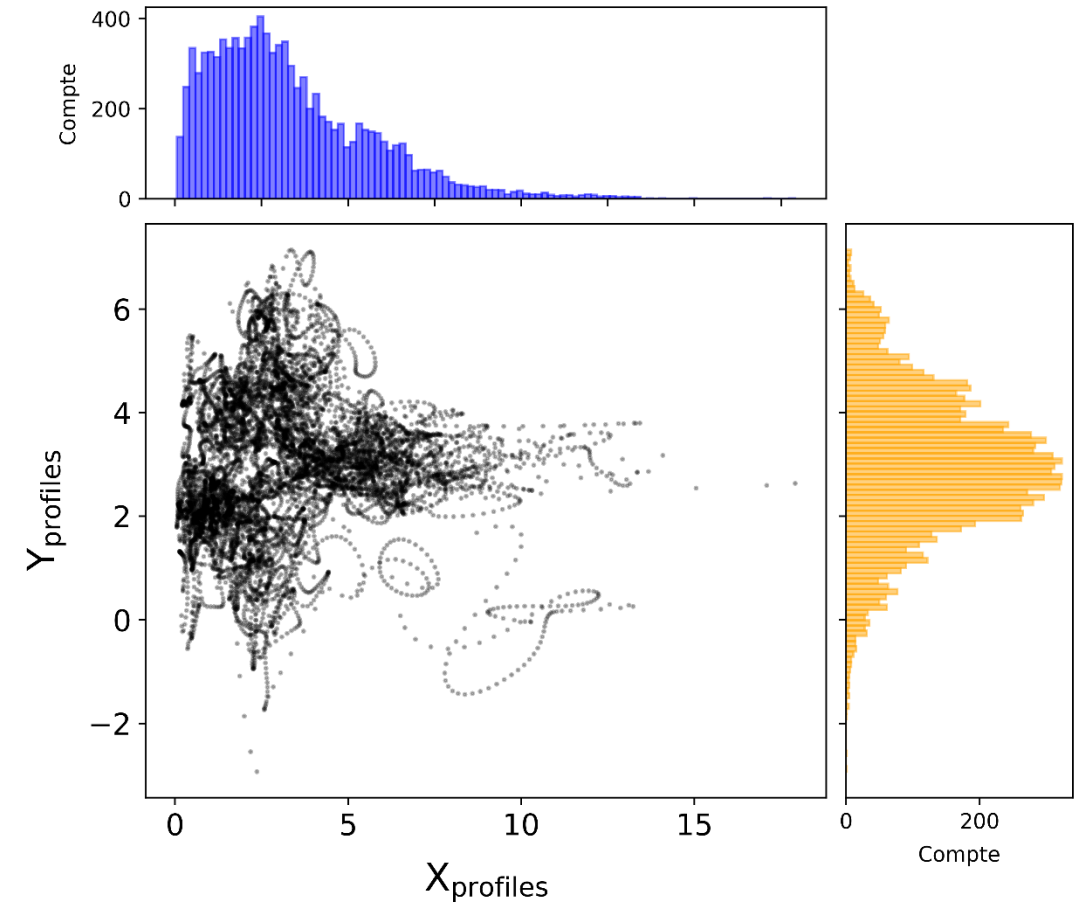
Génération des entrées fonctionnelles

Comparaison des nuages de points

Distribution jointe initiale



Distribution des points agrégés



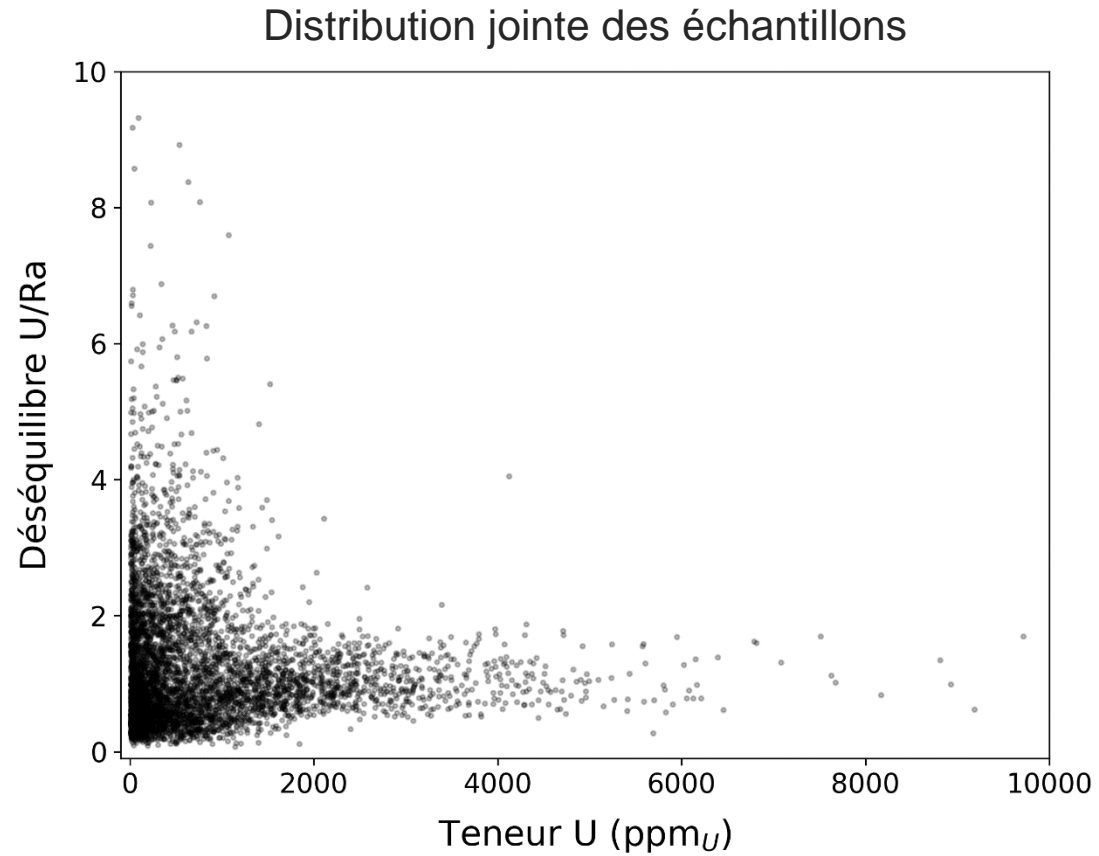


5

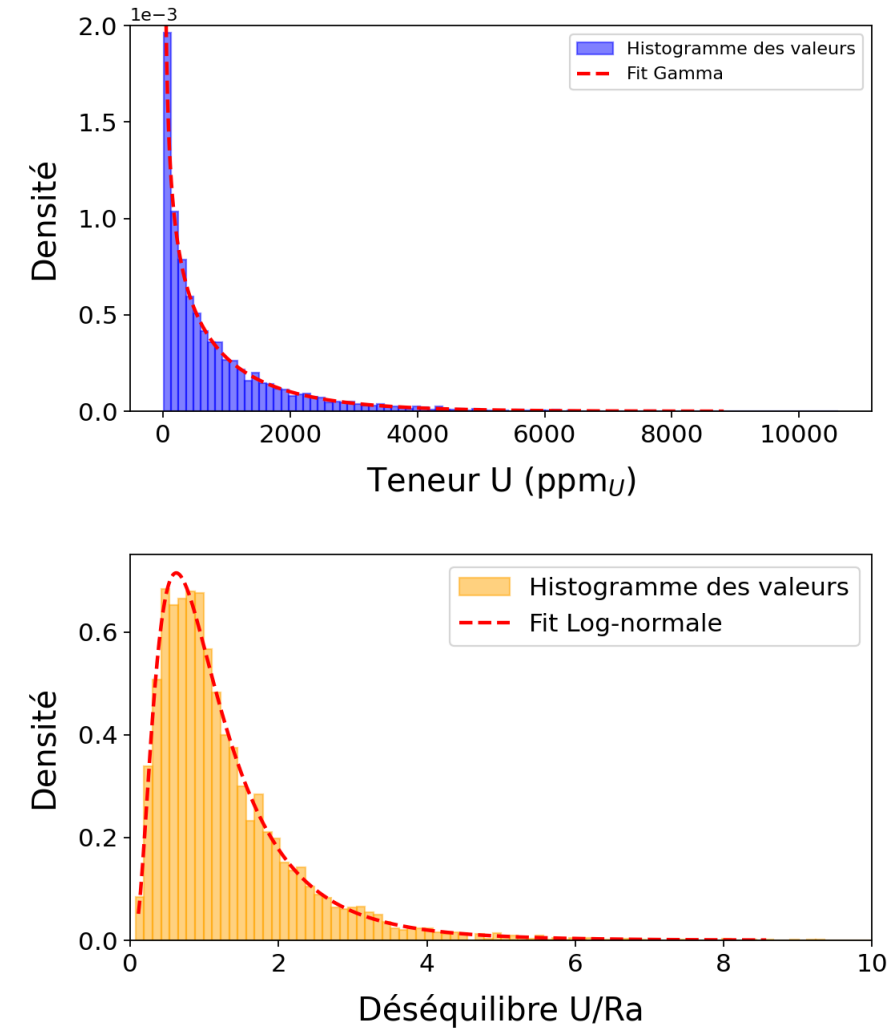


Plan d'expérience pour la génération de spectres gamma en puits de forage

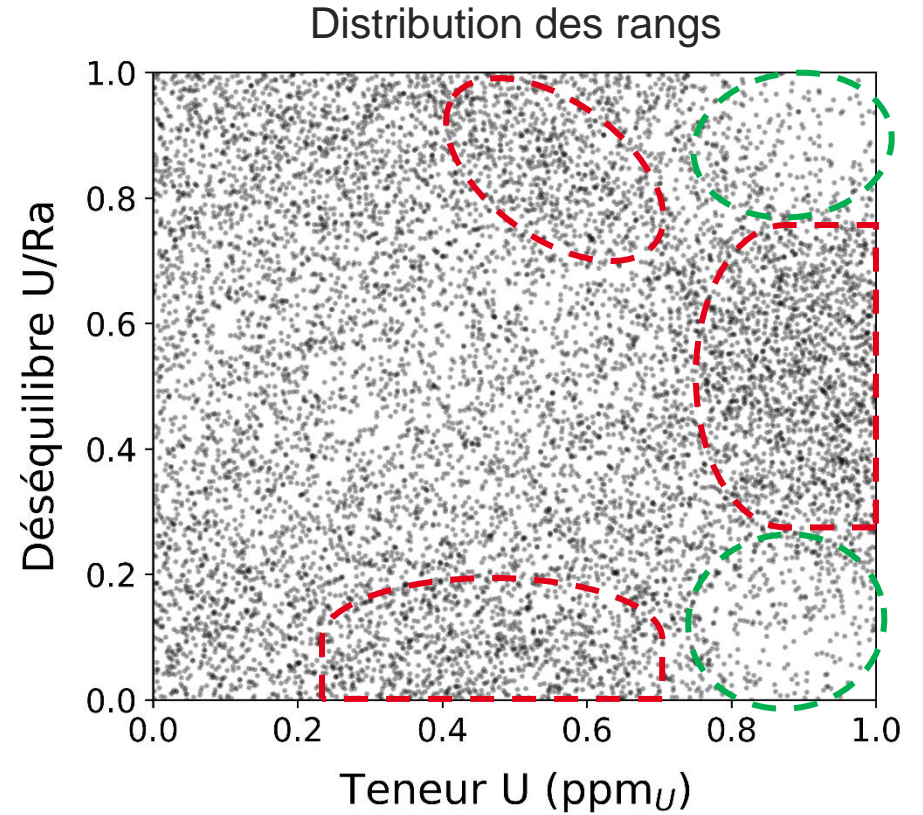
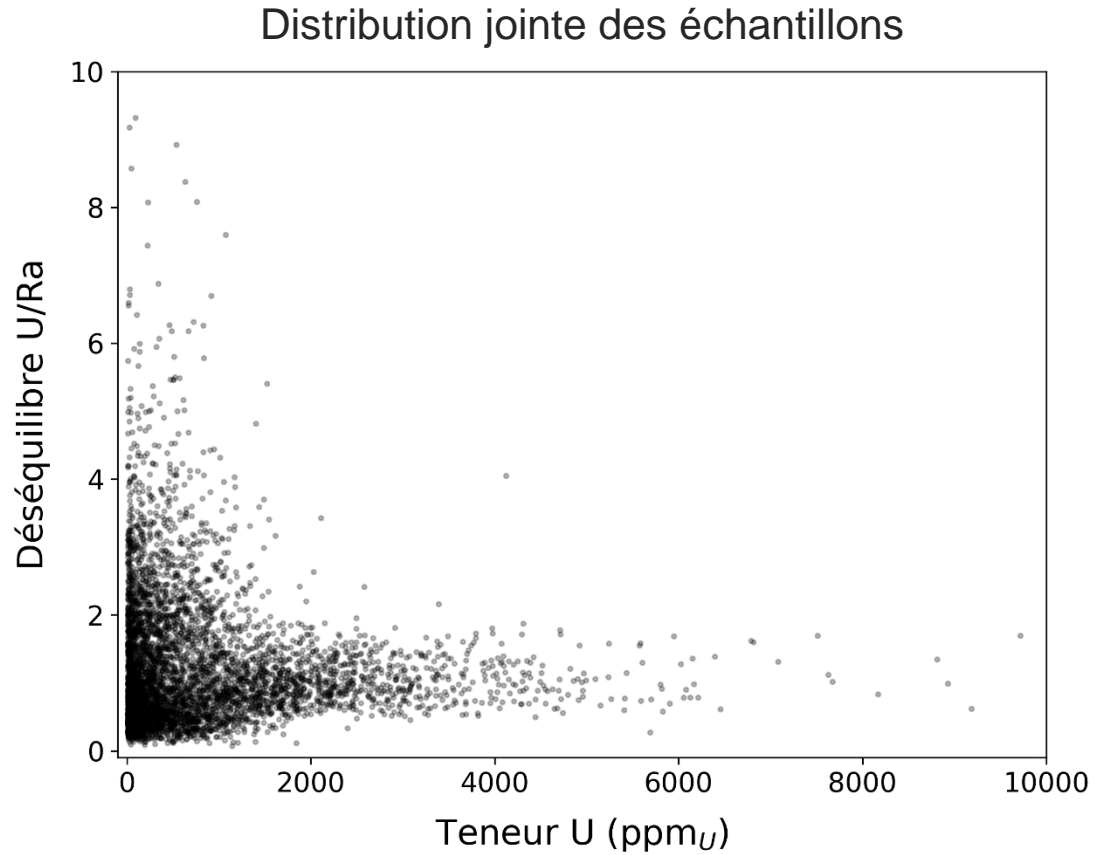
Relation Teneur U – Déséquilibre U/Ra



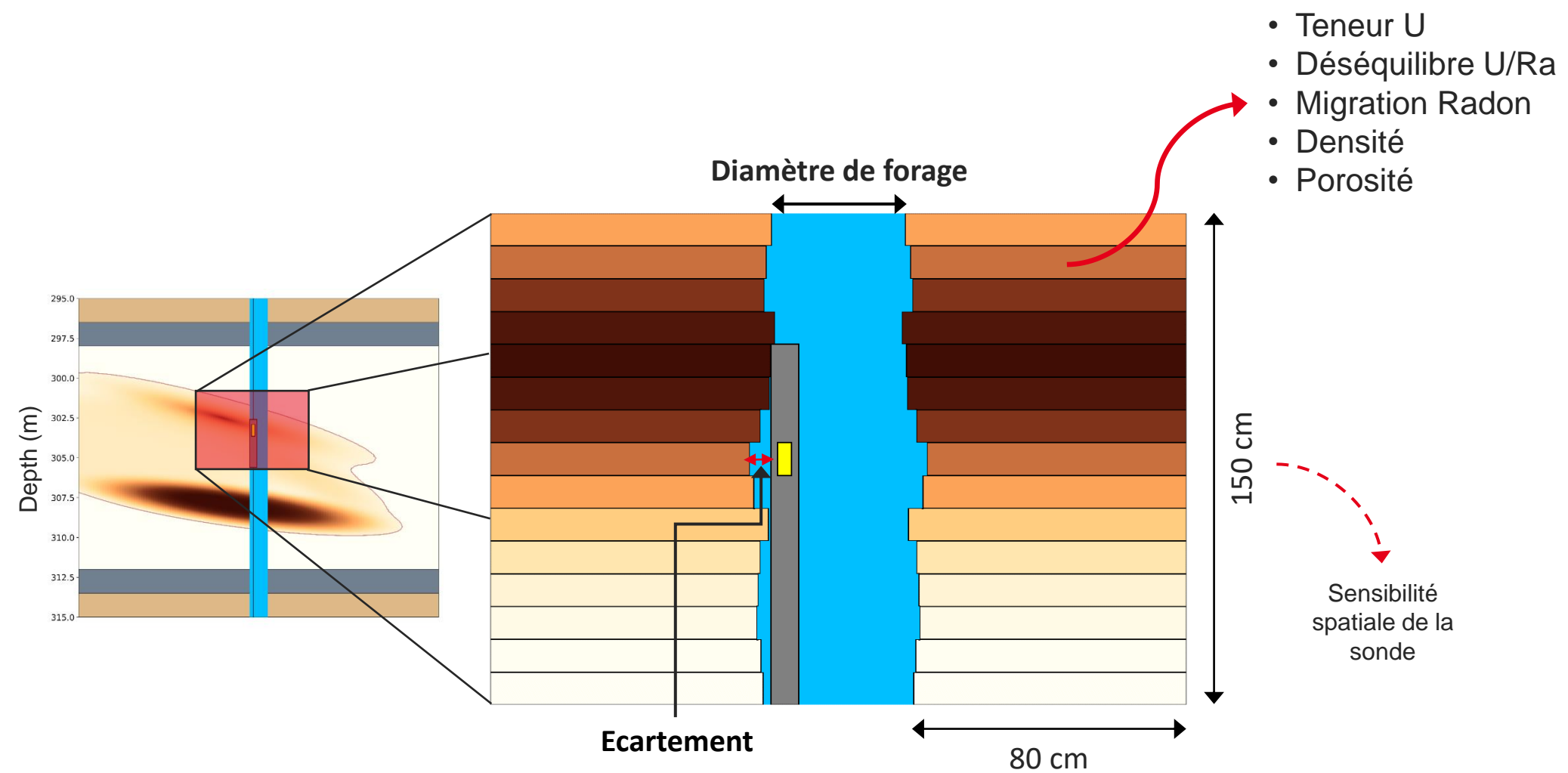
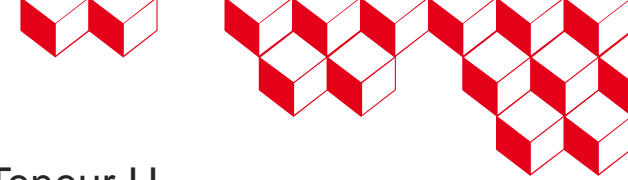
Distributions marginales empiriques et lois ajustées



Relation Teneur U – Déséquilibre U/Ra

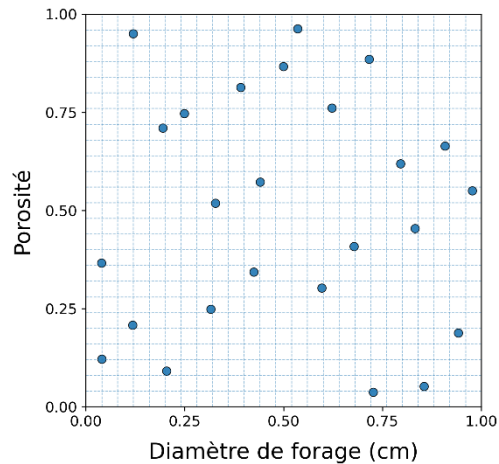


Autres variables d'entrée



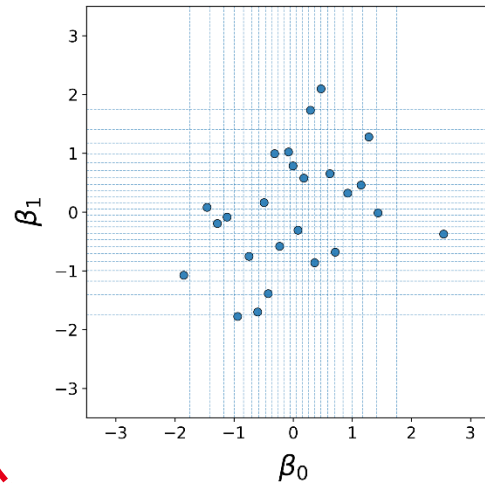
Plan d'expérience

Entrées scalaires



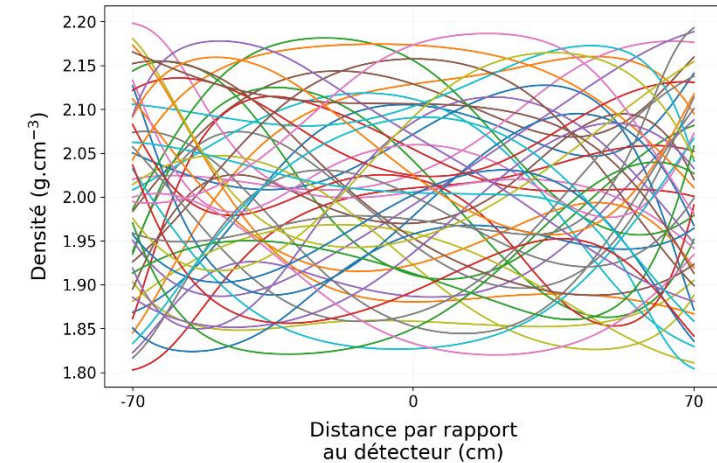
Entrées fonctionnelles indépendantes

Optimisation de l'hypercube latin sur les coefficients β par recuit simulé



$$d_{ij} = \|f(\beta^i) - f(\beta^j)\|_{L_2}$$

$$\phi_q = (\sum_{ij} (d_{ij})^{-q})^{1/q} [1,2]$$

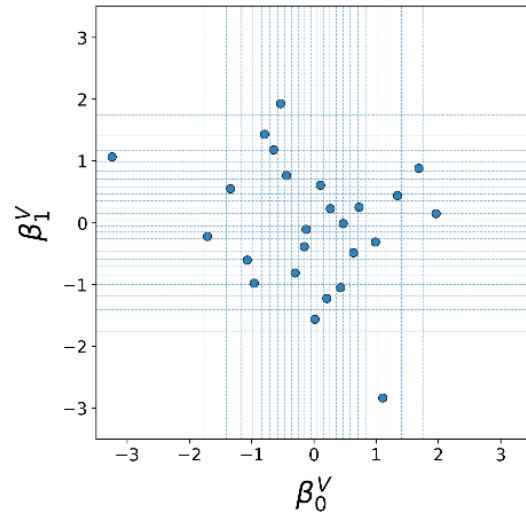
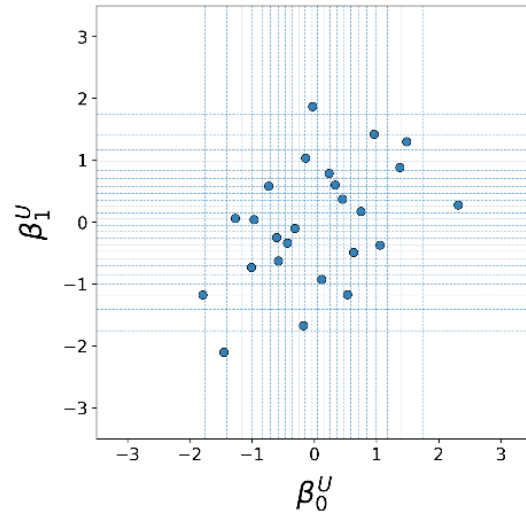


Appariement optimal avec optimisation de sur l'ensemble joint pare recuit simulé

$$d_{ij}^{joint} = \left(\|x^{\pi(i)} - x^{\pi(j)}\|_2^2 + \|f(\beta^{\pi(i)}) - f(\beta^{\pi(j)})\|_{L_2}^2 \right)^{1/2}$$

$$\phi_q = (\sum_{ij} (d_{ij}^{joint})^{-q})^{1/q} [1,2]$$

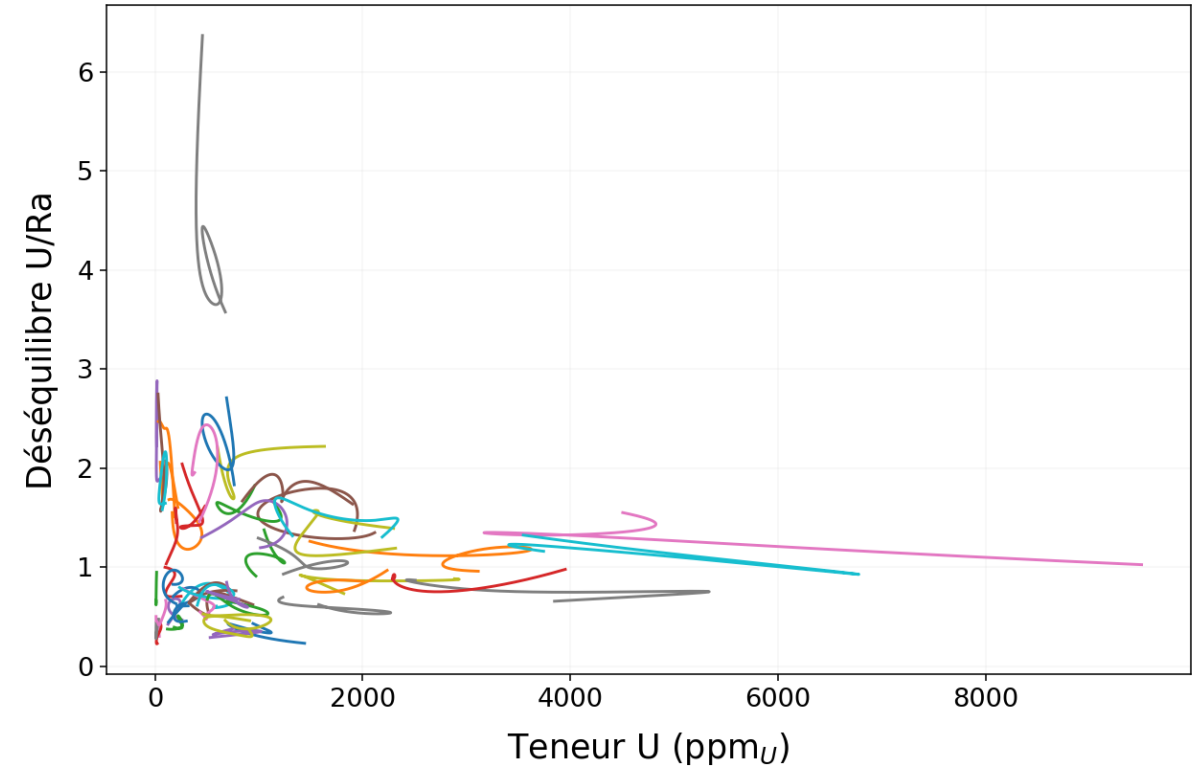
Plan d'expérience



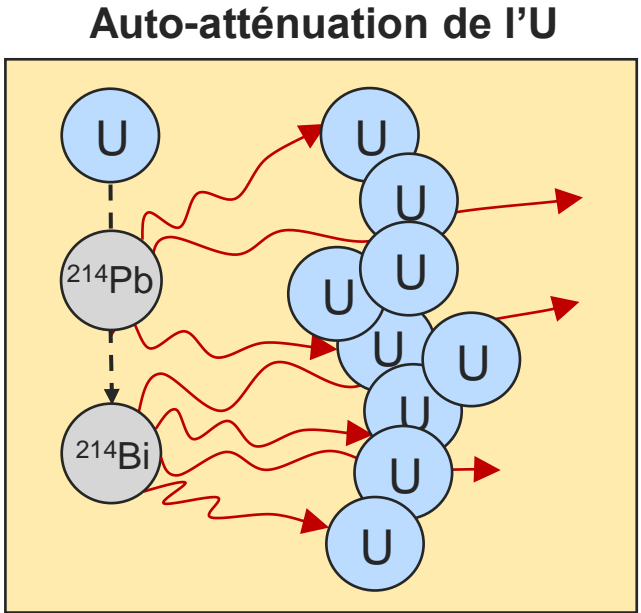
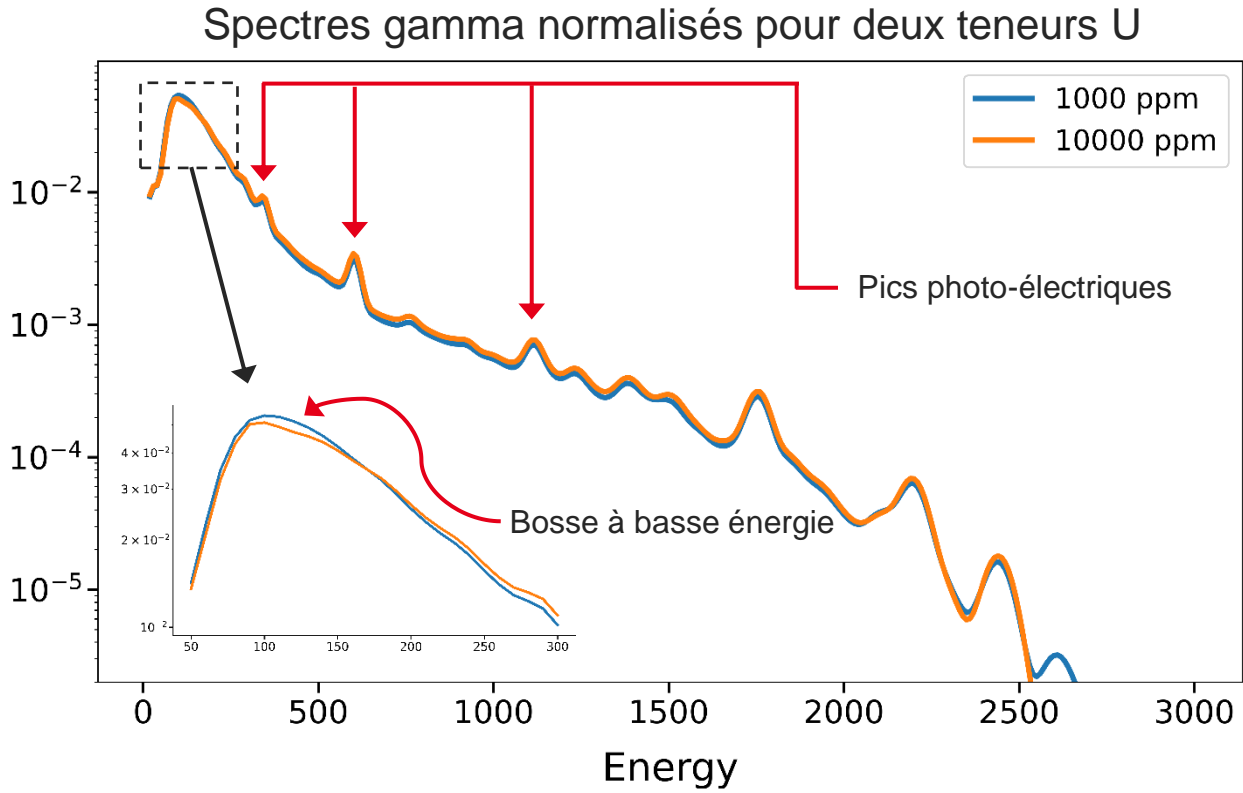
Optimisation séparée des hypercubes latins selon le même principe



Entrées fonctionnelles dépendantes



Sorties fonctionnelles : spectres gamma



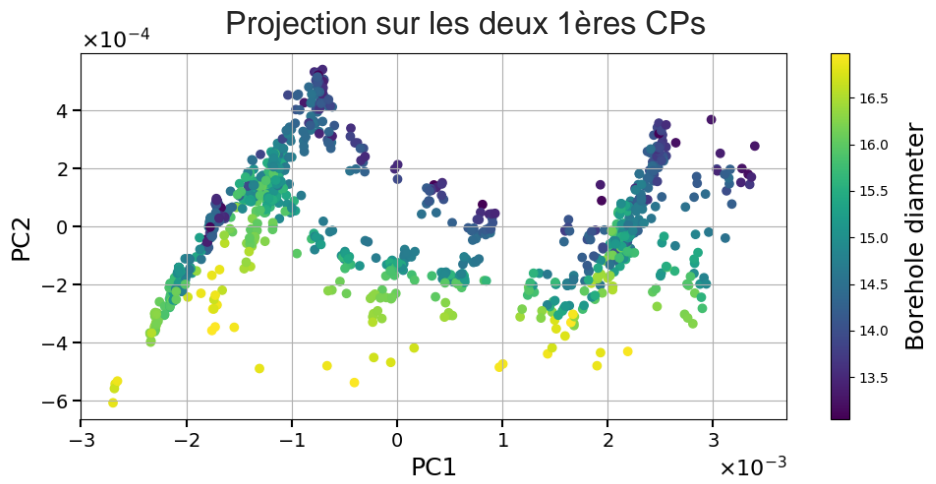
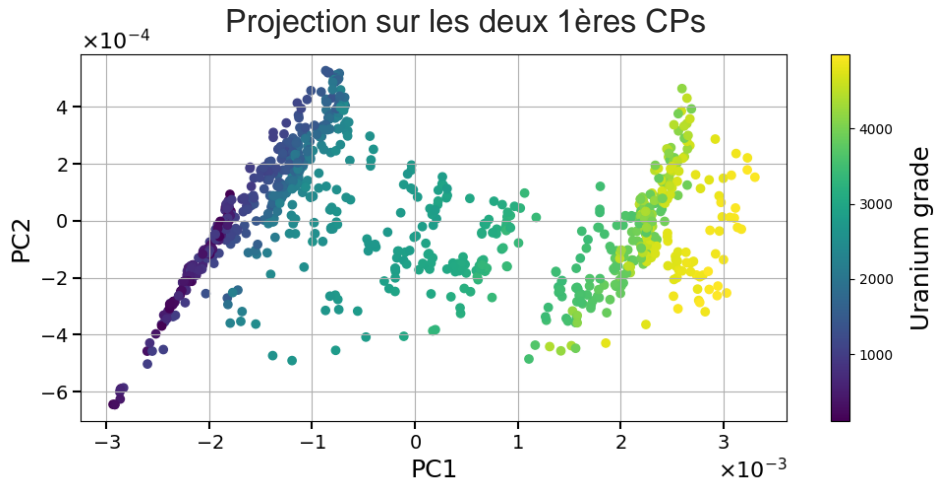
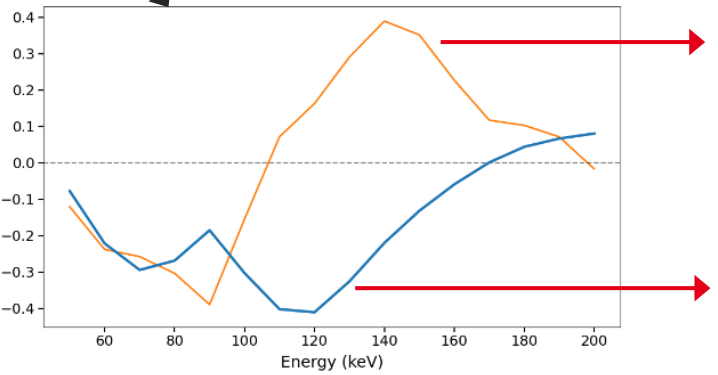
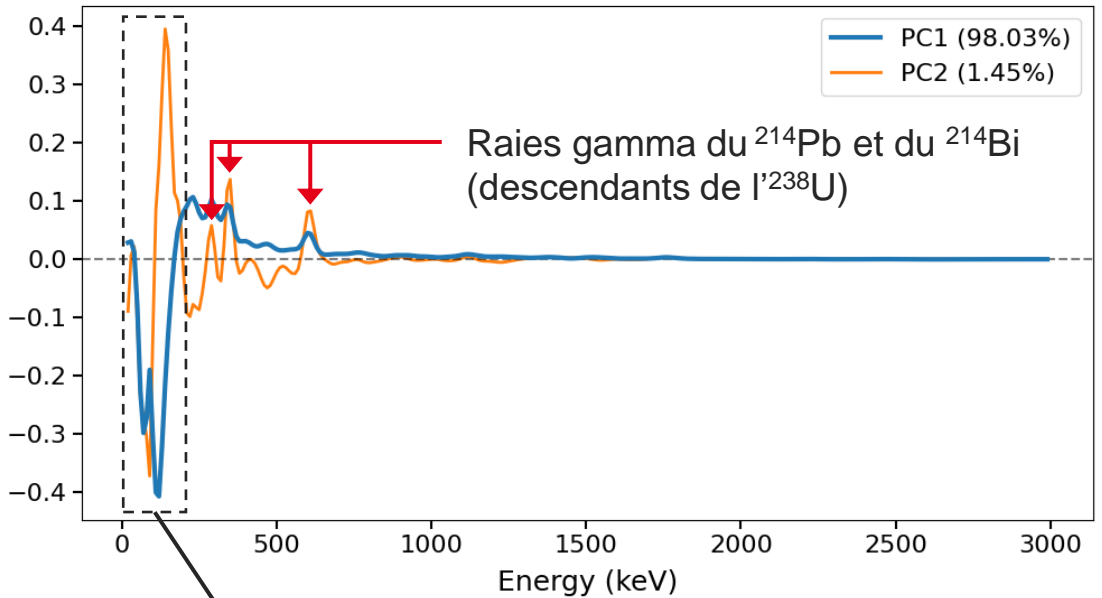
U

Atomes d'uranium
dans la formation
géologique

Sorties fonctionnelles : décomposition par ACP



Deux premières composantes principales



➡ Phénomènes physiques connus retrouvés par l'ACP



Conclusions et perspectives

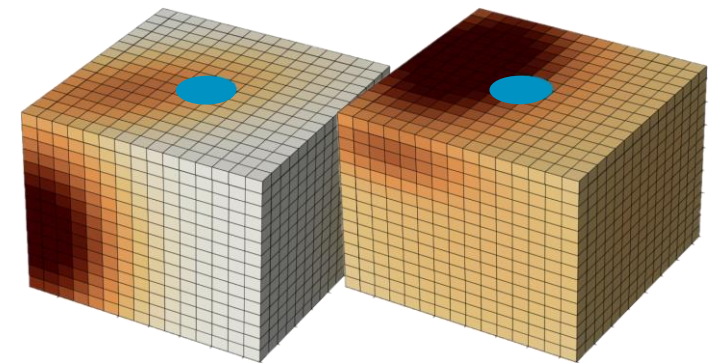
❑ Méthode de génération d'entrées fonctionnelles dépendantes pour différentes copules

- Décomposition sur une base de B-splines standardisées naturellement adaptée à la définition d'un plan d'expérience
- Choix de la dimension de la base fonctionnelle : complexité des courbes vs taille du plan d'expérience

❑ Plan d'expérience pour la génération de spectres gamma

- Incorporation de la relation teneur U – déséquilibre U/Ra , modélisée par une copule de Bernstein
- Limite 1 : loi jointe estimée sur un ensemble fini d'échantillons \Rightarrow propager l'incertitude liée à l'estimation des paramètres ?
- Limite 2 : tendance des trajectoires à n'occuper qu'une partie restreinte de l'espace
- Perspective : relation très haute teneur U – épaisseur du dépôt

❑ Perspective : entrées fonctionnelles dépendantes 3D



Merci pour votre attention