Propagation d'Incertitudes pour les Systèmes de Lois de Conservation

G. Poëtte †,‡ B. Després † D. Lucor ‡

† *CEA, DAM, DIF, F - 91297 Arpajon, France*

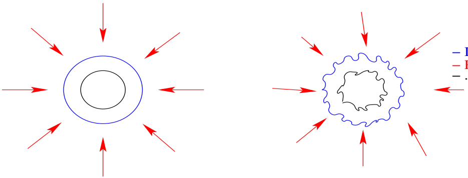
‡ *Institut Jean Le Rond D'Alembert, Paris VI*

poette@ocre.cea.fr/gael.poette@gmail.com

Gdr Mascot-Num, Institut Galilée, Mars 2009

Motivations

- Fusion par Confinement Inertiel (FCI)



– Interfaces rugueuses
– Rayonnement Laser non homogène
– ...

Cas ideal — En pratique: nombreuses sources d'incertitudes

- Propagation d'Incertitudes ⊂ Analyse d'incertitudes

Étape 2

Quantification des sources d'incertitudes

- Conditions Initiales,
- Propriétés des matériaux,
- Conditions aux bords.

Détermination des lois des variables aléatoires d'entrée

Étape 1

Modèle

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$$

muni d'une entropie str. convexe (s, g)

Etape de propagation de l'incertitude dans le modèle

Étape 3

Quantification de l'incertitude sur la réponse

- Variabilité de la réponse,
- Probabilité d'échec,
- pdf complète.

Étape 4

Analyse de sensibilité

- Indices globaux (Sobol)
- Indices locaux (perturbation)

Simplification de modèle

Contexte mathématique

1. Modèle :Système de lois de conservation non linéaires hyperboliques[1]

$$\partial_t u(x,t) + \partial_x f(u(x,t)) = 0,\ u(x,t) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n.$$

Le système est hyperbolique (math. bien posé) pour u dans l'invariant de domaine $\mathcal{U}$

- si $\forall u \in \mathcal{U}$, $A(u) = \nabla_u f(u)$ est diagonisable dans $\mathbb{R}$ dans une base complète de vecteurs propres.
- s'il existe une entropie mathématique strictement convexe (s, g) :

$$\nabla^2_{u,u} s(u) > 0, \forall u \in \mathcal{U} \text{ et } \partial_t s(u) + \partial_x g(u) \leq 0.$$

2. UQ sur les entrées : en pratique dans cet exposé, lois uniformes. Les résultats restent valables pour pdf quelconques.
3. UQ sur les sorties : on souhaite pouvoir faire une analyse complète des pdf des sorties.
4. Analyse de sensibilité : ...
5. Étape de propagation : Résolution d'EDP stochastiques (Monte Carlo, perturbation, Chaos Polynomial,...)

[1] Serre I et II

Chaos Polynomial[2] et Quantification d'Incertitudes

- Chaos Polynomial (PC) : Théorème de Cameron Martin[3] (generalisation th. de Weierstrass)

  Si $\int_{\omega\in\Omega} u^2(\omega)d\mathcal{P}(\omega) < \infty$, alors on a $\Pi^P u(\Xi(\omega)) = \sum_{k=0}^{P} u_k\phi_k(\Xi(\omega)) \underset{P\to\infty}{\overset{L^2(\Omega,\mathcal{P})}{\longrightarrow}} u(\omega)$,

  où
  - $(\Omega, \mathcal{P})$ est un espace de probabilité.
  - Ξ est une v.a. gaussienne de mesure de proba $d\mathcal{P}_\Xi(\xi) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}d\xi$,
  - $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la base des polynômes d'Hermite,
  - $u_k = \int_{\omega\in\Omega} u(\omega)\phi_k(\Xi(\omega))d\mathcal{P}(\omega)$,

- Quelques propriétés des PC :

Étape 2	Généralisation à des pdf arbitraire[4] : ex : - $u \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\Longrightarrow$ $u(\Xi) = \mu\phi_0^H(\Xi) + \sigma\phi_1^H(\Xi)$ où $(\phi_k^H)_{k\in\mathbb{N}}$ sont les polynômes d'Hermite
Étape 3	Représentation paramétrique $u(\xi)$: ex : moyenne u_0, std $\sigma_u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2$, skewness, kurtosis, ...
Étape 4	ex : Indices de Sobol fonction des $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$[5]
Propagation	Choix entre $\begin{cases}\text{Non Intrusive (integration numérique)}^{6}\\ \text{Intrusive (Galerkin)}^{7}\end{cases}$

[2] Wiener (1939), [3] Cameron-Martin (1957), [4] Karniadakis (2005), [5] Sudret (2007), [6] Lucor (2004), [7] Karniadakis (2002)

Chaos Polynomial Intrusif et systèmes de lois de conservation

Illustration sur un exemple simple : p-système en coordonnées lagrangiennes.

$\left\{\begin{array}{lcl} \partial_t \tau - \partial_m u & = & 0, \\ \partial_t u + \partial_m p(\tau) & = & 0, \end{array}\right.$ hyperbolique et $\frac{\partial p}{\partial \tau} < 0$ avec la fermeture $p(\tau)$.

Application de la méthode intrusive à ce problème :

- $(\phi_k)_{k\in\{0,\dots,P\}}$ BON/mesure uniforme sur $[-1,1]$, $\mathrm{d}\mathcal{P}(\xi) = \frac{1}{2}\mathrm{d}\xi$.
- On développe τ, u sur la BON : $m = \sum_{k=0}^{P} m_k \phi_k$ avec $m_k = \int m\phi_k \mathrm{d}\mathcal{P}$.
- $$\left\{\begin{array}{l} \partial_t \begin{pmatrix} \tau_0 \\ \dots \\ \tau_P \end{pmatrix} - \partial_m \begin{pmatrix} u_0 \\ \dots \\ u_P \end{pmatrix} = 0, \\ \partial_t \begin{pmatrix} u_0 \\ \dots \\ u_P \end{pmatrix} + \partial_m \begin{pmatrix} p_0 \\ \dots \\ p_P \end{pmatrix} = 0. \end{array}\right.$$

$\Longrightarrow$ 2 conditions nécessaires d'hyperbolicité :

$$(CN_1)\ A_{i,j} = \frac{\partial p_i}{\partial \tau_j} < 0 \quad \mathit{et} \quad (CN_2)\ \sum_{k=0}^{P} \tau_k \phi_k > 0.$$

Trois principales difficultés :

a.) Dimensions stochastiques importantes : dimension N et polynômes de degrés Q

$\Longrightarrow$ le nombre de termes dans notre développement polynomial est alors $P = \frac{(N+Q)!}{Q!N!}$.

b.) Besoin de définir $p_k(\tau_0, .., \tau_P)$ à partir de $p(\tau)$ non linéaire[3] : (CN_1)

c.) Système de Lois de Conservation/solutions discontinues/Hyperbolicité : (CN_2)

[3] Debusshere *et al.* (2004)

b.) Fermeture et non linéarités : test de la condition CN_1

Considérons deux lois de fermeture du système non tronqué : $p(\tau) = \frac{1}{\tau^2}$ et $p(\tau) = -\ln(\tau)$.
Debusshere *et al.* propose plusieurs façons pour traiter les non linéarités :

1.) $\tau^2 p = 1 \Longrightarrow \sum_{i,j,k=0}^{P} \tau_i \tau_j p_k c_{i,j,k,l} = \delta_{0,l} \; \forall l \in \{0, \ldots, P\}.$

2.) Taylor de p au voisinage de τ_0 : $p = \frac{1}{\tau^2} \approx \frac{1}{\tau_0^2} - 2\frac{\tau - \tau_0}{\tau_0^3} + \ldots.$

3.) Witteveen *et al.* $p_k(\tau_0, \ldots, \tau_P) = \int p\left(\sum_{l=0}^{P} \tau_l \phi_l\right) \phi_k d\mathcal{P}, \; \forall k \in \{0, \ldots, P\}.$

Les représentations cv mais permettent-elles à notre système de conserver ses propriétés ?

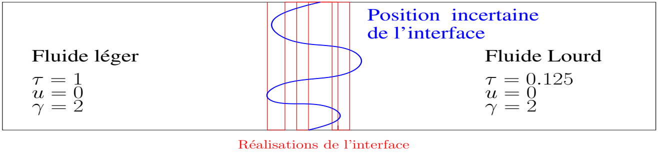
$p(\tau) = \frac{1}{\tau^2}$	1.)	2.)	3.)
Système $P = 1$	hyperbolique	faiblement hyperbolique	hyperbolique
Système $P = 2$	hyperbolique	faiblement hyperbolique	?
Système $\forall P$	?	?	?
Pression $P = 1$	négative	négative	positive
Pression $P = 2$	négative	négative	positive
Pression $\forall P$	?	?	positive

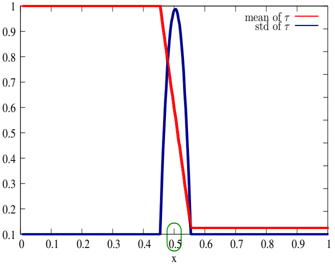
$p(\tau) = -\ln(\tau)$	1.)	2.)	3.)
Système $P = 1$	Non applicable	faiblement hyperbolique	hyperbolique
Système $P = 2$	Non applicable	faiblement hyperbolique	?
Système $\forall P$	Non applicable	?	?

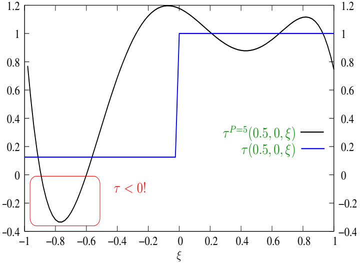
- ? Construit-on des systèmes bien posés ? Difficultés dès que P devient trop grand.
- Il existe $\tau_0, \ldots, \tau_P$ admissibles ($\sum_{k=0}^{P} \tau_k \phi_k > 0$) tels que la pression est négative !
$\Longrightarrow$ Engendre des difficultés au niveau des schémas numériques ($c = \sqrt{\gamma p \tau}$) !

c.) Phénomène de Gibbs : test de la condition CN_2

Phénomène de Gibbs[4] : pb de Riemann stochastique
$x_{interface}(t=0) = x_0 + \sigma\Xi$ où $\Xi \sim$ loi uniforme sur $[-1, 1]$.







4 Karniadakis ME-gPC, Lemaître Multi Resolution Analysis (Ondelettes), Abgrall ENO/WENO-like, Xiu ENO/WENO-like

Plan
Contexte
SLC
Chaos Poly.
Partie Th.
* PC et SLC
* Entropie
Th. Cinétique
Th. Moments
* IPMM
Partie Num.
* Burgers
* Euler 2D
Conclusion

Système de lois de conservation hyperbolique : Ξ un vecteur aléatoire de mesure $\mathrm{d}\mathcal{P}$:

$$\partial_t u(x,t,\Xi) + \partial_x f(u(x,t,\Xi)) = 0, \text{ avec son entropie mathématique } (s,g) \in \mathbb{R} \text{ telle que}$$

$$\partial_t s(u(x,t,\Xi)) + \partial_x g(u(x,t,\Xi)) \leq 0.$$

Question : si $||u(x,0,.)||_{L^2(\Omega)} < \infty, \forall x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, est ce toujours le cas à un temps t quelconque et pour des solutions discontinues ? (conditions d'applications du théorème de Cameron-Martin).

- Cas scalaire (n=1) : $s(u) = \frac{u^2}{2}$ est une entropie.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{D}} \int_{\Omega} \frac{u^2(x,t,\Xi(\omega))}{2} \mathrm{d}\mathcal{P}(\omega)\mathrm{d}x \leq 0,$$

$$\int_{\mathcal{D}} ||u(x,T,.)||^2_{L^2(\Omega)} \mathrm{d}x \leq \int_{\mathcal{D}} ||u(x,0,.)||^2_{L^2(\Omega)} \mathrm{d}x < \infty.$$

- $u \in \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$:

$$\int_{\mathcal{D}} \int_{\Omega} s(u(x,T,\Xi(\omega)))\mathrm{d}\mathcal{P}(\omega)\mathrm{d}x \leq \int_{\mathcal{D}} \int_{\Omega} s(u(x,0,\Xi(\omega)))\mathrm{d}\mathcal{P}(\omega)\mathrm{d}x < \infty.$$

On suppose l'entropie $\alpha-$convexe$\overset{\text{déf.}}{\Longrightarrow} \exists \beta > 0, \delta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\beta \int_{\mathcal{D}} ||u(x,T,.)||^2_{L^2(\Omega)} \mathrm{d}x - \delta < \infty.$$

Ceci justifie la convergence du développement en PC $\forall t$ y compris pour les solutions discontinues.

Analogie entre Théorie Cinétique et Chaos Polynomial

Analogie entre théorie cinétique et propagation d'incertitudes :

Théorie Cinétique		Propagation d'Incertitudes
$\partial_t f + v.\nabla_x f + a.\nabla_v f = C(f)$	$\longrightarrow$	$\partial_t u(x,t,\Xi) + \partial_x f(u(x,t,\Xi)) = 0$
$f(x,t,v)\mathrm{d}v$	$\longrightarrow$	$u(x,t,\Xi(\omega))\mathrm{d}\mathcal{P}(\omega)$
Multiplicateurs $\Phi(x,t,v) = 1, v, v^2, \ldots$	$\longrightarrow$	Multiplicateurs $\Phi = \phi_0, \phi_1, \ldots$
Moments de f : $\rho = \int f\mathrm{d}v = \langle 1 \rangle$, $\rho u = \int fv\mathrm{d}v = \langle v \rangle$, $\ldots$	$\longrightarrow$	Moments de u : $u_0 = \int u\phi_0 \mathrm{d}\mathcal{P}$, $u_1 = \int u\phi_1 \mathrm{d}\mathcal{P}$, $\ldots$
Système tronqué associé à f ($C = 0, a = 0$)	$\longrightarrow$	Système tronqué associé à u

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t \langle 1 \rangle + \partial_x \langle v \rangle & = 0, \\ \ldots & \\ \partial_t \left\langle v^k \right\rangle + \partial_x \left\langle v^{k+1} \right\rangle & = 0, \\ \ldots & \\ \partial_t \left\langle v^P \right\rangle + \partial_x \left\langle v^{P+1} \right\rangle & = 0. \end{array}\right. \quad \longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \partial_t u_0 + \partial_x f_0 = 0, \\ \ldots \\ \partial_t u_k + \partial_x f_k = 0, \\ \ldots \\ \partial_t u_P + \partial_x f_P = 0. \end{array}\right.$$

$\Longrightarrow$ Il reste à fermer les systèmes (PC : étape "traitement des non linéarités").

Fermeture : analogie avec la théorie des moments

Théorie des moments : résolution du problème inverse sous déterminé [5]

Trouver $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ tel que $\mu^P(f) = (f_0, \dots, f_P)^t$ où μ^P est défini par

$$\mu^P : \begin{array}{ccc} L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}) & \longmapsto & \mathbb{R}^{P+1} \\ f & \longrightarrow & (f_0, \dots, f_P)^t, \end{array} \tag{1}$$

$$\text{où } \forall k \in \{0, \dots, P\},\ f_k = \int_\Omega l_i f \, d\mathcal{P},$$

où $(l_i)_{i \in \{0,\dots,P\}}$ sont des fonctions réelles définies sur Ω et formant une base de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.

Non unicité de la distribution f

$\Longrightarrow$ Introduction de l'entropie de fermeture (de Shannon) : $\eta(f) = \int f \ln(f) d\mathcal{P}$.

Recherche de f sous la forme du minimum de η sous les contraintes (1) $\Longrightarrow$ Unicité de f.

Trouver les multiplicateurs de Lagrange $(\lambda_k)_{k \in \{0,\dots,P\}}$ minimisant

$$T(\lambda_0, .., \lambda_P) = -\int \eta(f(\lambda_0, .., \lambda_P)) d\mathcal{P} + \sum_{k=0}^{P} \int f(\lambda_0, .., \lambda_P) \lambda_k l_k d\mathcal{P} - \sum_{k=0}^{P} f_k \lambda_k. \tag{2}$$

[5] Mead-Papanicolaou, Junk

Méthode Intrusive aux Moments Polynomiaux (IPMM)

- D'où le système à résoudre

$$\left\{\begin{array}{c}\partial_t u_0(\lambda_0,..,\lambda_P)+\partial_x f_0(\lambda_0,..,\lambda_P)=0,\\ \dots\\ \partial_t u_k(\lambda_0,..,\lambda_P)+\partial_x f_k(\lambda_0,..,\lambda_P)=0,\\ \dots\\ \partial_t u_P(\lambda_0,..,\lambda_P)+\partial_x f_P(\lambda_0,..,\lambda_P)=0.\end{array}\right.$$

où $(\lambda_k)_{k\in\{0,\dots,P\}}$ minimise

$$T(\lambda_0,..,\lambda_P)=-\int\eta(f(\lambda_0,..,\lambda_P))\mathrm{d}\mathcal{P}+\sum_{k=0}^{P}\int f(\lambda_0,..,\lambda_P)\lambda_k l_k\mathrm{d}\mathcal{P}-\sum_{k=0}^{P}f_k\lambda_k. \quad (3)$$

- $\Longrightarrow$ Variation fonctionnelle par rapport à f :

$\boxed{\nabla_u\eta(f(\lambda_0,..,\lambda_P))=\sum_{k=0}^P\lambda_k l_k,}$ i.e. $f(\lambda_0,..,\lambda_P)=(\nabla_f\eta)^{-1}\left(\sum_{k=0}^P\lambda_k l_k\right)$.

- Retour à notre problème aux moments sur la base de PC :
  - Approche valide pour toute entropie strictement convexe η.
  - Si $\eta(u)=\frac{u^2}{2}$, alors $(\nabla_u\eta)^{-1}(\lambda)=u$ et on retrouve l'approche classique (sG-gPC).
  - Si $\eta(\tau)=\tau\ln(\tau)-\tau$, alors $(\nabla_\tau\eta)^{-1}(\lambda)=\tau(\lambda)=e^\lambda>0$: le choix de l'entropie dépend des invariants de domaine à respecter.
  - Si $\eta=s$, i.e. entropie de fermeture = entropie mathématique du système, alors $\nabla_u s(u)=\lambda=v$ la variable adjointe **RET de Ruggeri-Müller**

- Propriétés du nouveau système
  - Le nouveau système est hyperbolique $\forall P\in\mathbb{N}$.
  - Il possède une entropie str. convexe : $(S,G)=\left(\int s\mathrm{d}\mathcal{P},\int g\mathrm{d}\mathcal{P}\right)$.
  - Possibilité de préserver les invariants de domaine (contraindre la solution $u^P\in\mathcal{U}$).

Description de L'algorithme

Début de pas de temps t^n	
Les moments $u_{k,i}^n = \int u(\Pi^P v_i^n)\phi_k d\mathcal{P}$ sont connus dans chaque maille i.	
Résolution d'un système de taille size $n \times (P+1)$: $u_{k,i}^n \rightarrow u_{k,i}^{n+1}$	Commun
$\frac{1}{\Delta t}\begin{pmatrix} u_{0,j}^{n+1} - u_{0,j}^n \\ \cdots \\ u_{P,j}^{n+1} - u_{P,j}^n \end{pmatrix} + \frac{1}{\Delta x}\begin{pmatrix} f_{0,d}^* - f_{0,g}^* \\ \cdots \\ f_{P,d}^* - f_{P,g}^* \end{pmatrix} = 0.$	avec **sG-gPC**
Calcul de $V_i^{n+1} = (v_{0,i}^{n+1}, \cdots, v_{P,i}^{n+1})^t$ depuis $U_i^{n+1} = (u_{0,i}^{n+1}, \cdots, u_{P,i}^{n+1})$?	
Minimisation de T str. convexe $T(V) = -\left\langle U_i^{n+1}, V\right\rangle + \langle U(V), V\rangle - S(U(V))$.	Spécifique
Newton (convergence quadratique) $\begin{cases} \text{- } V^k \rightarrow V^{k+1}, \\ \text{- } V^{k+1} = V^k - T'^{-1}(V^k)T(V^k), \\ \text{- } \|V^{k+1} - V^k\| < \epsilon_{Newt} = 10^{-13}, \\ \text{- avec } V_i^n \text{ pour "guess".} \end{cases}$	à **IPMM**
Évaluation d'intégrales : méthodes standards de quadrature numérique	
$T'(V^k)_{m,l} = \int \nabla_{v,v} s^*(\Pi^P v_i^n)\phi_m\phi_l d\mathcal{P} \approx \sum_{t=0}^{N} w_t \nabla_{v,v} s^*(\Pi^P v_i^n(\xi_t))\phi_m(\xi_t)\phi_t(\xi_t).$	
Fin du pas de temps t^{n+1}	

Exemple de Burgers (Cas-test discontinu) $P = 5$.

	CIM	IPMM	taux=CIM/IPMM
temps CPU ($t \in [0, T = 0.09]$)	24 s.	55 s.	0.436
$L^2(\Omega)-$Norme de l'erreur à (x, t) fixés	0.028122	0.003855	7.293

IPMM vs CIM $\Longrightarrow$ temps CPU $\times 2$ avec une précision $\times 7$.

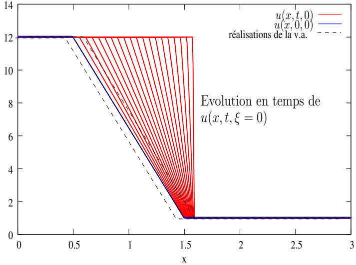
Équation de Burgers avec IPMM, $v = \sum_{k=0}^{P} v_k \phi_k$

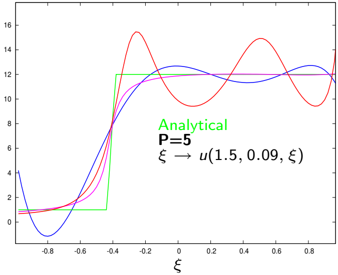
On contraint les oscillations dûes aux phénomènes de Gibbs.

- Burgers : $\partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0$.
- Choix d'une entropie :

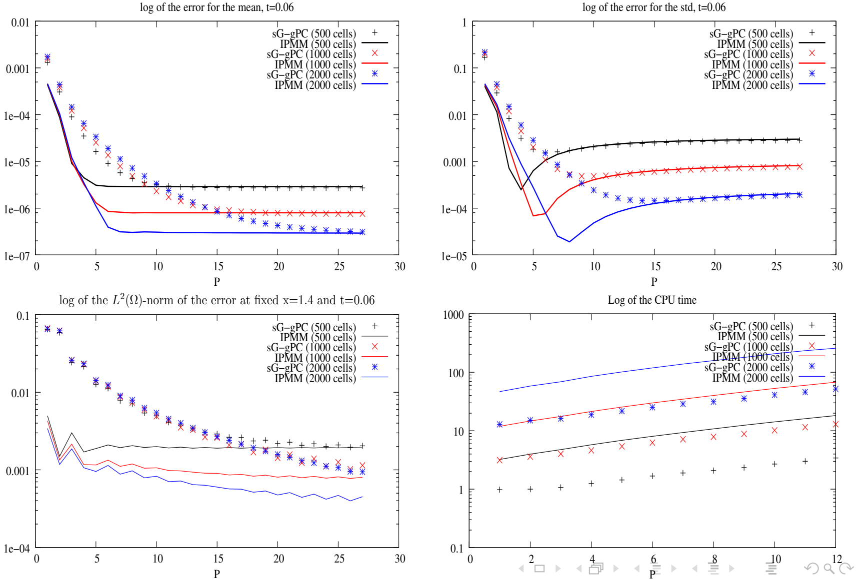
$$\begin{cases} s_0(u) = \frac{u^2}{2} & v(u) = u \\ s_1(u) = -\ln(u - u_-) & v(u) = -\frac{1}{u - u_-} \\ s_2(u) = -\ln(u - u_-) - \ln(u_+ - u) & v(u) = -\frac{1}{u - u_-} + \frac{1}{u_+ - u} \end{cases}$$

- Choix de u_+ et u_- $\longrightarrow$ contrôle du domaine de définition de $u(v)$.





P-Convergence (cas-test discontinu)



Plan

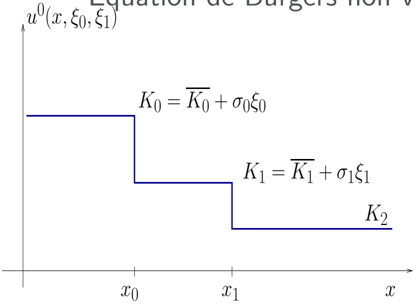
Contexte
- SLC
- Chaos Poly.

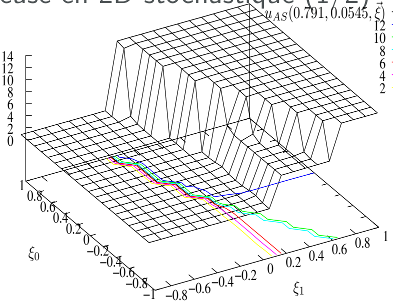
Partie Th.
- * PC et SLC
- * Entropie
- Th. Cinétique
- Th. Moments
- * IPMM

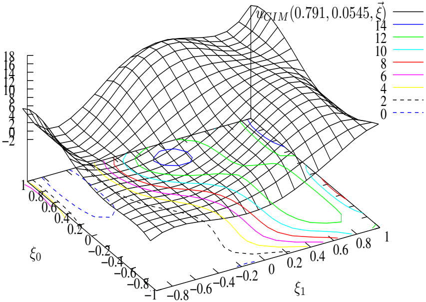
Partie Num.
- *** Burgers**
- * Euler 2D

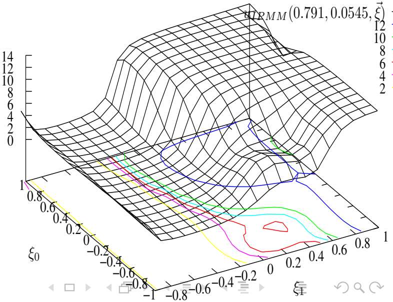
Conclusion

Équation de Burgers non visqueuse en 2D stochastique (1/2)

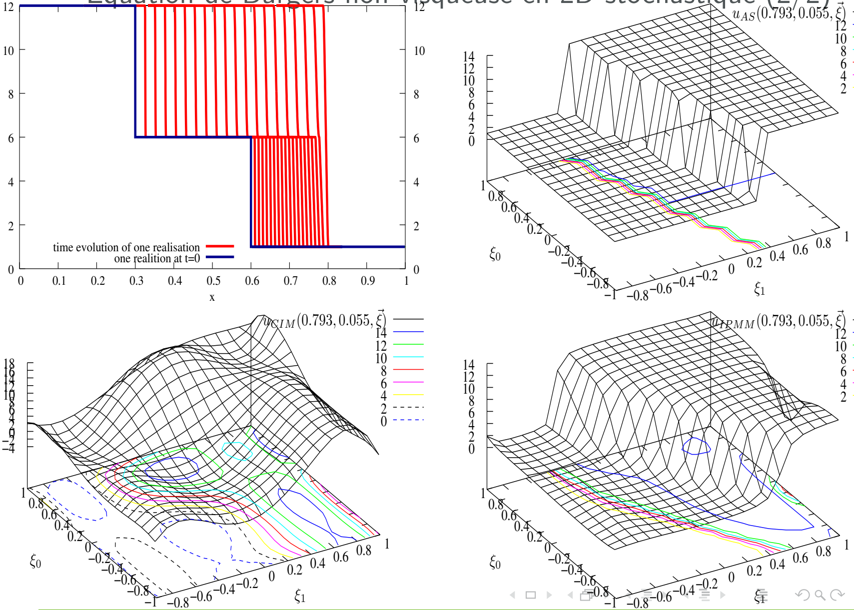








Équation de Burgers non visqueuse en 2D stochastique (2/2)



Dynamique des gaz compressibles

- Système de la dynamique des gaz compressibles en 2D d'espace :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) + \partial_y(\rho v u) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v u) + \partial_y(\rho v^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho u e + p u) + \partial_y(\rho v e + p v) = 0, \end{array}\right.$$

avec une fermeture de type gaz parfait : $p = (\gamma - 1)\rho\epsilon$.

- Entropie du système : $s(\rho, \rho u, \rho v, \rho e) = -\rho \ln \left(\rho^{-\gamma}(\rho e - \frac{(\rho u)^2 + (\rho v)^2}{2\rho})\right)$.
- Expression de $(\rho, \rho u, \rho v, \rho e)^t$ par rapport à la variable adjointe $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)^t$.

$$\begin{pmatrix} \rho(V) \\ \rho u(V) \\ \rho v(V) \\ \rho e(V) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\, v_1\, v_4 - 2\, v_4\, \ln(-v_4) - 2\, v_4\, \gamma - v_2{}^2 - v_3{}^2}{2 v_4 (\gamma - 1)}} \\ -\frac{v_2}{v_4}\, e^{\frac{2\, v_1\, v_4 - 2\, v_4\, \ln(-v_4) - 2\, v_4\, \gamma - v_2{}^2 - v_2{}^2}{2 v_4 (\gamma - 1)}} \\ -\frac{v_3}{v_4}\, e^{\frac{2\, v_1\, v_4 - 2\, v_4\, \ln(-v_4) - 2\, v_4\, \gamma - v_2{}^2 - v_2{}^2}{2 v_4 (\gamma - 1)}} \\ \frac{v_2^2 + v_3^2 - 2 v_4}{2 v_4^2}\, e^{\frac{2\, v_1\, v_4 - 2\, v_4\, \ln(-v_4) - 2\, v_4\, \gamma - v_2{}^2 - v_3^2}{2 v_4 (\gamma - 1)}} \end{pmatrix}.$$

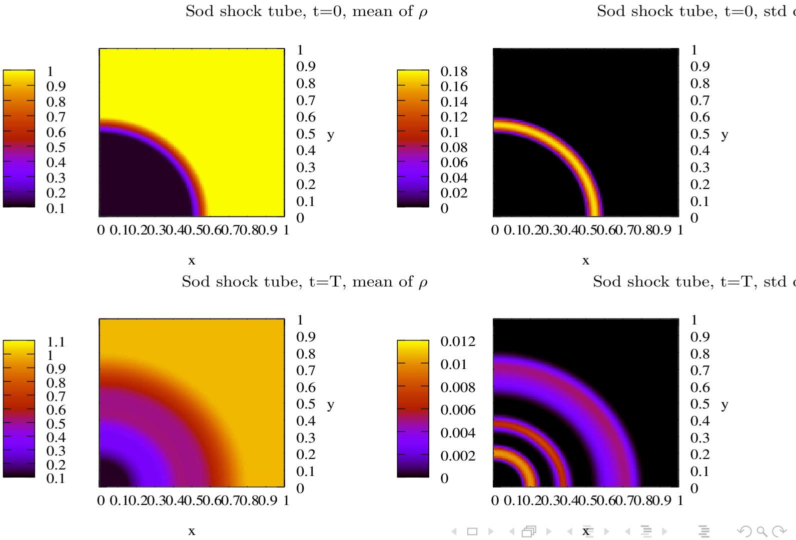
$\Longrightarrow$ Positivité de la densité de masse ρ assurée même lorsque V est un polynôme.

- Schéma Lagrange+projection d'ordre élevé avec splitting directionnel.

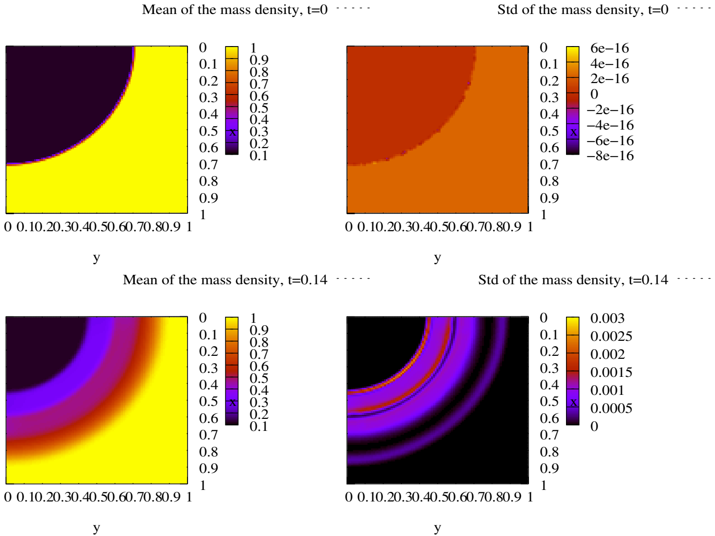
$$R_{interface}(t = 0, \xi) = 0.5 + 0.05\xi,\ \xi \in [-1, 1] \text{ paramétrise une loi uniforme,}$$

$$\text{maillage } 100 \times 100,\ P = 5,\ \text{temps final } t = 0.14,\ \gamma = 1.4.$$

Euler 2D : Tube à chocs de Sod incertain (interface)



Euler 2D : Tube à chocs de Sod incertain (γ)



Conclusion

- Bilan :
  - Problèmes des PC (non linéarités+Gibbs) sont aggravés par les difficultés inhérentes aux systèmes de lois de conservation (non linéarités+chocs).
  - La méthode classique ne préserve pas les invariants de domaine et dans certains cas l'hyperbolicité.

  - Avec une analogie avec les méthodes aux moments (RET Ruggeri-Müller, Chen-Levermore-Liu, Junk...), nous avons montré

    - que le système tronqué (IPMM) est hyperbolique, $\boxed{v(x,t,\xi) = \sum_{i=0}^{P} v_i(x,t)\phi_i(\xi)}$
    - qu'il est possible de contrôler le phénomène de Gibbs,
    - qu'il est possible de préserver les invariants de domaine ($\rho > 0$ cas Euler),
    - que la méthode est en accord avec le principe de minimisation de l'entropie (Ruggeri-Muller, Evans).

  - La méthode généralise la méthode sG-gPC.
  - conservative, non adaptative.
  - La méthode est plus coûteuse que la méthode classique (lorsqu'il est possible de les comparer).
  - Plus de détails dans un papier JCP (DOI : 10.1016/j.jcp.2008.12.018).

- Perspectives :
  - Existence du minimum des fonctionnelles de l'entropie (Mead-Papanicolaou/Junk).
  - Caractérisation de la rugosité d'une interface (développement de Karhunen Loève $\Longrightarrow$ grande dimension stochastique).
  - Rédaction de ma thèse.