Nouvelle méthode d'optimisation sous contraintes pour la résolution d'équations mal posées

Maëva Biret
Université Pierre et Marie Curie

Supervisor(s): Prof. Michel Broniatowski (UPMC) and Dr. Mohamed Achibi (Snecma)

Ph.D. expected duration: 2012-2015

Adress: 28 rue des acacias 77940 ESMANS

Email: mae_bb4@hotmail.com

Abstract: L'objectif de cette communication est de présenter une nouvelle méthode de résolution d'équations de type $y = f(X)$, où $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, voire $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$. Il s'agit d'un problème d'optimisation, qui peut être sous contraintes, dont l'objectif est d'atteindre un vecteur cible y pour la fonction f. On parle souvent d'ensembles de niveaux (ou d'antécédents) qui peuvent être des droites, des surfaces ou des ensembles de dimension supérieure. Le problème a largement été étudié dans le cas des solutions ponctuelles (f est univariée et à valeurs réelles) [6] et pour les systèmes d'équations avec moins d'inconnues que d'équations ($d \leq k$) [2]. C'est le cas de Newton et Raphson qui donnèrent leur nom à la célèbre méthode de recherche des zéros. Ce type de problème peut également faire l'objet de méthodes usuelles d'optimisation (descente de gradient, algorithme génétique, etc), [7], [1], [3], [4]. Ces méthodes ne permettent d'obtenir qu'une seule solution et sont souvent limitées en termes de nombre de calculs. Dans le cas plus général où le problème est mal posé [5] (le nombre de solution est infini),, la méthode que nous proposons, COMETE (Constrained Optimization MEthod for Target achiEvement) permet d'obtenir plusieurs points (autant que souhaité) très proches des solutions (précision choisie) x telles que $f(x) = y$.

Le contexte dans lequel a été développée cette méthode est le suivant. L'aéronautique est un secteur très concurrentiel dans lequel les motoristes doivent répondre aux exigences des avionneurs et respecter une réglementation stricte. Les premiers disposent de l'offre : ils conÃ§oivent, développent, produisent et commercialisent les moteurs d'avions. Les seconds disposent de la demande : ils développent et produisent les avions pour lesquels un certain type de moteur est exigé. Le développement d'un nouveau moteur se fait suivant quatre grandes phases. La première est la phase avant-projets, qui se positionne comme une phase clé durant laquelle sont définies les grandes orientations du programme moteur. A partir des spécifications fournies par l'avionneur (poussée, consommation, émissions, masse, bruit, etc), des choix technologiques sont effectués et des engagements contractuels sont pris. Au terme de cette étape, l'architecture du moteur est figée et la conception détaillée des différents composants peut commencer. Cette phase est un processus itératif où les paramètres et les contraintes sont nombreux. Les itérations se font entre corps de métier. En effet, lorsque le métier aval rencontre un problème qu'il ne peut pas résoudre à son niveau, il contacte le métier amont afin qu'il fournisse de nouvelles données.
Dans le but de répondre aux appels d'offre des avionneurs avec des incertitudes estimées et bornées, les ingénieurs avant-projets ont un objectif permanent d'amélioration de la qualité de leurs résultats tout en réduisant la durée et les coûts de leurs études. L'étude de l'optimisation par atteinte de cible s'inscrit dans cette optique d'amélioration. En effet, la méthode que nous proposons permet de faciliter et d'accélérer les itérations entre métiers.
L'application industrielle portera sur le dimensionnement aérodynamique et mécanique d'un compresseur HP : f sera la fonction permettant d'obtenir la distance entre deux pièces. La quantité y sera la distance cible et $X \in \mathbb{R}^d$ représentera les variables d'entrée dont on cherche toutes les combinaisons qui satisfont l'équation à résoudre. Ce problème est dépendant de la satisfaction de

15 contraintes. Nous résoudrons donc un problème d'optimisation sous contraintes par atteinte de cible.

La description de la méthode est fournie ici sans précisions car elle ne peut être divulguée pour le moment.
Nous disposons d'un certain nombre d de variables en entrée d'un code de calculs vu comme une boîte noire. En sortie, nous avons une quantité d'intérêt pour laquelle une valeur cible est connue ainsi que plusieurs contraintes (15) dont la satisfaction n'est vérifiable qu'avec le lancement du code de calculs. Dans notre exemple, la sortie d'intérêt est une distance entre deux pièces. Nous la voulons positive, pour éviter toute collision entre les pièces, et aussi minimale afin d'optimiser l'espace entre les deux pièces. Nous viserons donc une valeur proche de 0, 0.5 mm par exemple, avec une tolérance de 0.5 mm. Ainsi, tous les points obtenus par la méthode assureront une distance positive et peu élevée puisqu'elle appartiendra à [0,1].
La méthode est souvent précédée d'une étude de screening où le nombre d de variables en entrée est réduit pour ne garder que les plus significatives. Dans notre exemple, deux variables ont été retenues. La méthode COMETE est suffisamment générique pour être appliquée directement sur le code de calculs, sans traitement préalable. Grâce à cela, les contraintes du problème peuvent être prises en compte directement dans l'algorithme.
A partir d'un plan initial composé de plusieurs points bien répartis sur le domaine d'étude, la méthode consiste à simuler aléatoirement des nouveaux points et à ne les évaluer que s'ils sont bien placés par rapport à la solution. Le plan initial forme l'échantillon d'apprentissage. La qualité d'un nouveau point est déterminée via ses plus proches voisins parmi les points de l'échantillon d'apprentissage, selon une surface de réponse adaptative. S'il est suffisamment bon (suivant un critère déterminé dans la méthode), le nouveau point est évalué et ajouté à l'échantillon d'apprentissage. Et ainsi de suite jusqu'à atteindre le nombre voulu de points dans le voisinage choisi de la solution.

Les résultats obtenus sur le cas d'application sont très satisfaisants. En dimension 2, l'application de la méthode permet d'obtenir plusieurs points satisfaisant les 15 contraintes et la cible de la quantité d'intérêt. Dans le cas d'un nombre d'appels limité à la fonction, elle permet d'obtenir rapidement un nombre de points voulu avec le moins d'appels possible. Pour des codes de calculs moins coûteux mais très irréguliers, elle permet de bien couvrir l'ensemble des solutions, mêmes lorsqu'elles forment des ensembles disjoints.
La méthode a également été testée sur plusieurs fonctions tests, plus ou moins régulières, dans des dimensions différentes. Ces tests permettent de mettre en avant les possibilités de la méthode COMETE. Nous l'avons également testée pour résoudre un système de deux équations.

Références

[1] Thomas Bäck. *Evolutionary algorithms in theory and practice : evolution strategies, evolutionary programming, genetic algorithms.* Oxford university press, 1996.

[2] Ake Björck. *Numerical methods for least squares problems.* Siam, 1996.

[3] Christian Blum and Andrea Roli. Metaheuristics in combinatorial optimization : Overview and conceptual comparison. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 35(3) :268–308, 2003.

[4] Brigitte Lucquin, Olivier Pironneau, and Michel Kern. *Introduction to scientific computing.* Wiley Chichester, 1998.

[5] Curtis Miller. Search for level sets of functions using computer experiments. 2005.

[6] Endre Süli and David F Mayers. *An introduction to numerical analysis.* Cambridge university press, 2003.

[7] El-Ghazali Talbi. *Metaheuristics : from design to implementation*, volume 74. John Wiley & Sons, 2009.

Short biography – Après une licence en mathématiques appliquées, j'ai poursuivi mon cursus au sein de l'ISUP (Institut de Statistique de l'Université Pierre et Marie Curie) où je me suis

spécialisée dans la gestion du risque industriel et économique. En parallèle, j'ai obtenu un master en mathématiques, spécialité statistique à l'UPMC. Depuis fin 2012, j'effectue une thèse CIFRE via un partenariat entre le LSTA (Laboratoire de Statistique Théorique et Appliquée), laboratoire de l'UPMC et Snecma, société du groupe Safran, spécialisé dans l'aéronautique.
L'objectif général de la thèse est double. D'un côté, il s'agit de développer, par la conception robuste, une démarche et des outils génériques probabilistes, fournissant une aide au choix d'une architecture robuste lors du dimensionnement d'un nouveau moteur. D'un autre côté, il s'agit de développer des méthodes de résolution de problèmes inverses pour des fonctions à valeurs réelles et de plusieurs variables afin de résoudre rapidement des problèmes d'intégration (collision entre deux pièces) lors du dimensionnement. Ces deux objectifs font appel à des méthodes pouvant être de plus en plus complexes avec l'augmentation de la dimension du problème et donc coûteuses en temps de calculs. D'autant que le code de calculs lui-même peut être coûteux. Les méthodes de réduction de la dimension et de méta-modélisation sont donc également étudiées dans cette thèse.