Propagation d'incertitudes dans l'Optimisation

R. Holdorf Lopez*, D. Lemosse, E. Souza de Cursi
Institut National des Sciences Appliquées, Rouen, France

*E-mail: rafaelholdorf@gmail.com

Mots clés : optimisation, incertitudes, non-convexe, polynômes de Chaos.

Ce papier s'intéresse à la prise en compte des incertitudes dans les procédures d'optimisation. La solution sera cherchée sous la forme d'une approximation de sa Fonction de Densité de Probabilités (FDP). L'évaluation de la FDP de l'optimum nous permet ainsi d'en obtenir une description complète. Nous cherchons donc à résoudre un problème du type

$$x^* = Arg\,Min\ F(x,b) \tag{1}$$

où F(…) est une fonction qui dépend de la variable indépendante x et d'une variable aléatoire b dont la FDP est connue. Comme la fonction F(…) dépend d'un paramètre aléatoire, son point optimum x^* en dépend aussi. Nous allons chercher une approximation de la FDP de x^*. On peut réaliser cela par une technique de Simulations de Monte Carlo (SMC). Cependant, une telle simulation demande de très importants efforts de calculs et est même quelquefois irréalisable. Aussi, une méthode d'approximation a été développée et validée par comparaison aux résultats fournis par la SMC.

La méthode numérique choisie éstime la FDP de variable à optimiser à l'aide d'une Approximation par Polynômes de Chaos(APC) [1]. Ainsi, la variable x de l'équation (1) peut être approchée par la relation suivante :

$$x(Z) = \sum_{i=0}^{\infty} Z_i \cdot \psi_i\left(\{\xi\}_{n=1}^{\infty}\right) \tag{2}$$

Les termes $\psi_i\left(\{\xi\}_{n=1}^{\infty}\right)$ sont des fonctions qui dépendent d'une variable aléatoire ξ dont la FDP est connue. Les termes Z_i sont alors les coefficients déterministes qui décrivent x dans la base des ψ_i. Le problème est donc maintenant d'évaluer les coefficient déterministes Z^* de l'APC de façon à obtenir une définition statistique du minimum de F(...). Cette dernière étant dépendante des variables aléatoires (i.e. b et ξ), le processus d'optimisation doit être réalisé sur une de ses caractéristiques statistiques comme par exemple sa moyenne.

$$Z^* = \arg\min E\left[F\left(\sum_{i=0}^{\infty} Z_i \cdot \psi_i\left(\{\xi\}_{n=1}^{\infty}\right), b\right)\right] \tag{3}$$

où $E[\ldots]$ est l'opération de moyenne.
L'équation (3) est résolue par une méthode d'approximation stochastique telle que la méthode des quasi-gradient [2]. Il s'agit d'un algorithme de descente qui produit une suite de points

$$x_{n+1} = prj_S\left[x_n - \rho_n \cdot \zeta_n\right] \tag{5}$$

jusqu'à la vérification d'un critère d'arret. Le pas ρ_n de chaque itération est évalué par la méthode de Robbins-Monro [3] et le gradient ς_n est approché par une méthode d'échantillonage [2].

Cet algorithme converge systématiquement vers le point optimum pour les fonctions convexes. Cependant, certaines fonctions à étudier sont non convexes. Un algorithme d'optimisation globale a dû être introduit pour permettre leur résolution. Nous avons opté pour la méthode de Perturbation Aléatoire du Gradient (PAG) [4]. La méthode PAG a la particularité de converger quasi-systématiquement vers l'optimum global, ce qui la rend particulièrement adaptée à notre étude. Dans le cas des fonctions non convexes, le gradient est évalué par l'algorithme de Kiefer-Wolfowitz [5]. En effet, ce dernier améliore les perfomances de la méthode d'optimisation par rapport à l'expression analytique du gradient.

Des fonctions non convexes (i.e. Goldstein-Price, Shekel, Rosenbrock) et un problème mécanique ont été analysées avec différentes lois pour les paramètres aléatoires. Les conclusions principales tirées de ces analyses sont : (i) la méthode numérique développée a réussi à estimé la fonction de densité de probabilité du point optimal, and (ii) les caractéristiques statistiques du point optimal ne sont pas forcement conservés par le processus d'optimisation.

Références

[1] R. Ghanem and P. Spanos, "Stochastic finite elements: a spectral approach", Springer-Verlag, New York, USA, 2003.

[2] R. Wets, "Stochastic approximation", in "Handbook for operations research and management sciences", Elsevier Science Publishers, vol. 1, pp. 573 - 629, 1989.

[3] H. Robbins and S. Monro, "A Stochastic Approximation Method", in "Annals of Mathematical Statistics" 22, pp. 400–407, 1951.

[4] J.E. Cursi and M.B.S. Cortes, "General Genetic algorithms and simulated annealing perturbation of the gradient method with a fixed parameter. In: "Topping, B.H.V. (Ed.), Developments in Neural Networks and Evolutionary Computing for Civil and Structural Engineering", pp. 189-198, 1995.

[5] J. Kiefer and J. Wolfowitz, "Stochastic Estimation of the Maximum of a Regression Function", in "Annals of Mathematical Statistics 23", pp. 462–466, 1952.